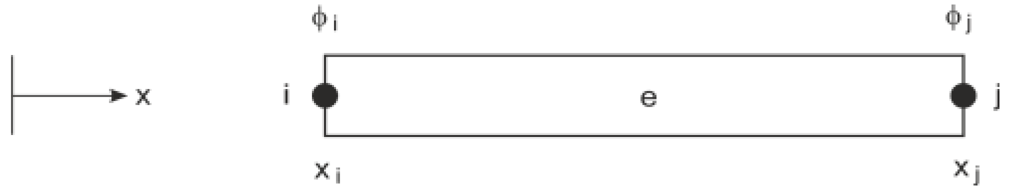
CHAPITRE 3 : FONCTIONS PARAMETRES ET FONCTIONS DE FORME

1. ELEMENT UNIDIMENSIONNEL A DEUX NŒUDS :

1.1. COORDONNEES GLOBALES :

$\phi = \phi(x)$ = fonction paramètre



$$\phi = c_1 + c_2 x \tag{107}$$

L'équation (107) peut s'écrire :

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \tag{108}$$

en $x = x_i$ (nœud i), nous avons $\phi = \phi_i$; et en $x = x_j$ (nœud j), nous avons $\phi = \phi_j$. Donc :

$$\begin{aligned} \phi_i &= c_1 + c_2 x_i \\ \phi_j &= c_1 + c_2 x_j \end{aligned} \tag{109}$$

Le système d'équations (109) peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \tag{110}$$

L'équation (110) donne :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \tag{111}$$

Substitution de l'équation (111) dans l'équation (108) donne :

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \tag{112}$$

L'équation (108) peut s'écrire :

$$\phi = N_i(x)\phi_i + N_j(x)\phi_j \tag{113}$$

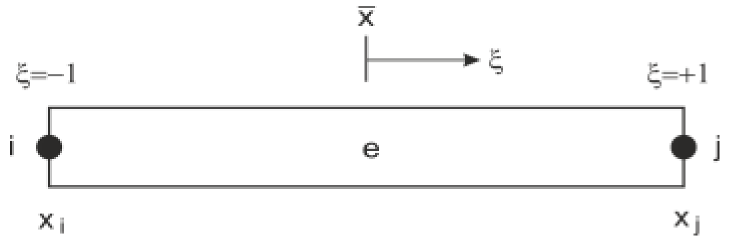
Les fonctions de forme sont données par :

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad ; \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{114}$$

1.2. COORDONNEES LOCALES :

ξ = coordonnée locale normalisée

$\bar{x} = \dfrac{x_i + x_j}{2}$



ξ et x sont reliés par :

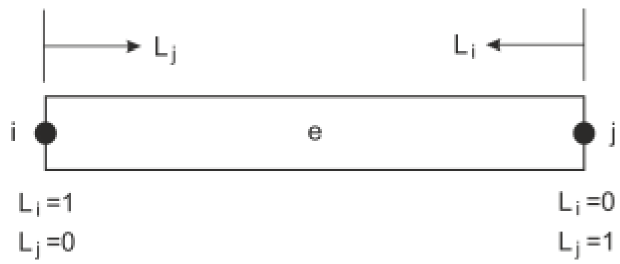
$$\xi = \frac{2(x - \bar{x})}{x_j - x_i} \tag{115}$$

En fonction de ξ, les fonctions de forme deviennent :

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad ; \quad N_j = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{116}$$

1.3. COORDONNEES DE LONGUEUR :

p = point (pas un nœud)



Les coordonnées de longueur sont définies comme suit :

$$L_i = \frac{\text{longueur} \quad \text{pj}}{\text{longueur} \quad \text{ij}} \quad ; \quad L_j = \frac{\text{longueur} \quad \text{ip}}{\text{longueur} \quad \text{ij}} \tag{117}$$

Nous avons :

$$0 \le L_i \le 1 \quad ; \quad 0 \le L_j \le 1 \quad ; \quad L_i + L_j = 1 \tag{118}$$

Si le point p est situé à une coordonnée globale générale x, alors les équations (117) seront équivalentes à :

$$L_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad ; \quad L_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{119}$$

Donc :

$$L_i = N_i \quad ; \quad L_j = N_j \tag{120}$$