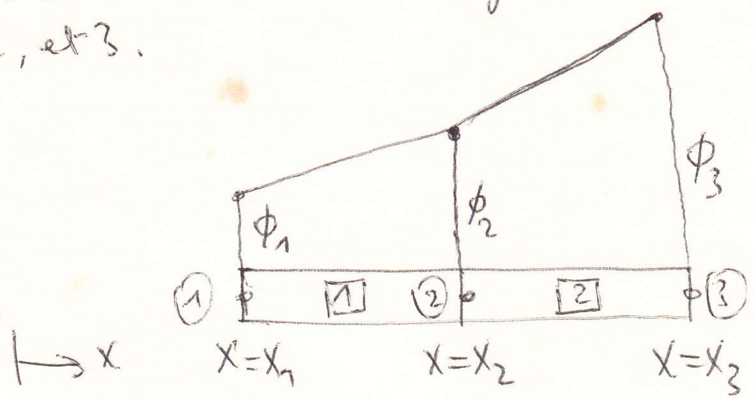
Solution T.D. N° 3

Ex. 1 :

Considérons 2 éléments adjacents avec les noeuds globaux 1, 2, et 3.



La condition de compatibilité exige que la valeur de la fonction paramètre au noeud 2 (c.a.d. ϕ_2) doit être la même quelque soit l'élément considéré.

La forme équivalente de la fonction paramètre est :

$$\phi(x) = \left(\frac{X_j - X}{X_j - X_i}\right)\phi_i + \left(\frac{X - X_i}{X_j - X_i}\right)\phi_j$$

Pour l'élément 1 en $X = X_2$, nous avons :

$$\phi(X_2) = \left(\frac{X_2 - X_2}{X_2 - X_1}\right)\phi_1 + \left(\frac{X_2 - X_1}{X_2 - X_1}\right)\phi_2 = \phi_2$$

et pour l'élément 2 en $X = X_2$, nous avons :

$$\phi(X_2) = \left(\frac{X_3 - X_2}{X_3 - X_2}\right)\phi_2 + \left(\frac{X_2 - X_2}{X_3 - X_2}\right)\phi_3 = \phi_2$$

puisque $\phi(X_2)$ à partir de l'élément 1 est la même que $\phi(X_2)$ à partir de l'élément 2, alors la condition de compatibilité est satisfaite.

Ex. 2 :

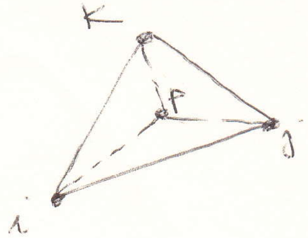
$$\xi = \frac{2(X - \bar{X})}{X_j - X_i} \quad ; \quad \bar{X} = \frac{X_i + X_j}{2}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2(X - \bar{X})}{X_j - X_i}\right] = \frac{X_j - X}{X_j - X_i}$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 + \xi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2(X - \bar{X})}{X_j - X_i}\right] = \frac{X - X_i}{X_j - X_i}$$

Solution T.D. N° 3

Ex. 3 :



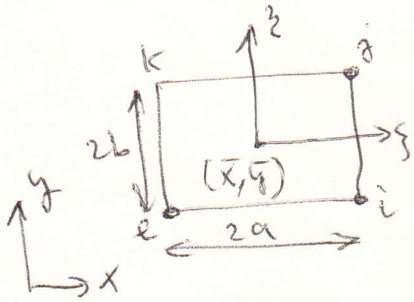
$$L_i = \frac{\text{aire } pjk}{\text{aire } ijk} = \frac{\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{bmatrix}}{A}$$

$$= \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{2A}$$

$$= m_{11} + m_{21}x + m_{31}y$$

$$= N_i$$

Ex. 4 :



$$\xi = \frac{x - \bar{x}}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y - \bar{y}}{b}$$

donc : $dx = a\,d\xi$

$dy = b\,d\eta$

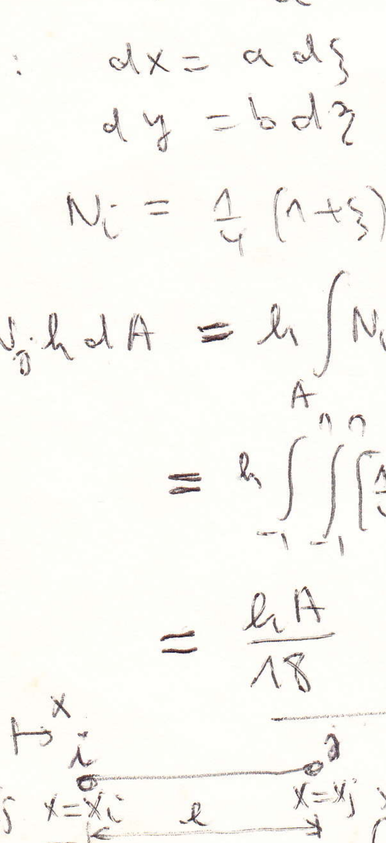
$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad ; \quad N_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$\int_A N_i N_j h\, dA = h \int_A N_i N_j\, dA = h \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i N_j\, ab\, d\xi\, d\eta$$

$$= h \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\right]\left[\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\right] ab\, d\xi\, d\eta$$

$$= \frac{hA}{18} \quad (A = 4ab)$$

Ex. 5 :



$$\int_\ell L_i^\alpha L_j^\beta\, d\ell = \frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}\,\ell$$

$$\int_{x_i}^{x_j} [N]^T \gamma A\, dx = \gamma A \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} dx = \gamma A \int_\ell \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} d\ell = \gamma A \begin{bmatrix} \int_\ell L_i\, d\ell \\ \int_\ell L_j\, d\ell \end{bmatrix}$$

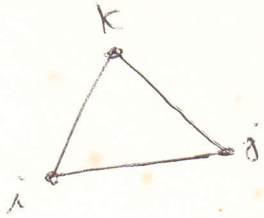
$$= \gamma A \begin{bmatrix} \frac{1!\,0!}{(1+0+1)!}\,\ell \\ \frac{0!\,1!}{(0+1+1)!}\,\ell \end{bmatrix} = \frac{\gamma A \ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\gamma A (x_j - x_i)}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(avec : $\ell = x_j - x_i$)

Solution T.D. N° 3

Ex. 6 :

$$\int_A L_i^{\alpha} L_j^{\beta} L_k^{\gamma} \, dA = \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \, 2A$$

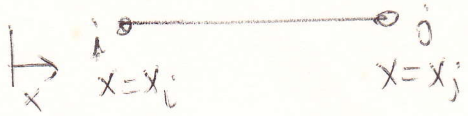


$$\int_A N_i N_j h \, dA = h \int_A N_i N_j \, dA = h \int_A L_i L_j \, dA$$

$$= h \, \frac{1!\,1!\,0!}{(1+1+0+2)!} (2A)$$

$$= \frac{hA}{12}$$

Ex. 7 :



$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad ; \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

3 propriétés :

① $N_i(x_i) = \dfrac{x_j - x_i}{x_j - x_i} = 1 \quad ; \quad N_j(x_i) = \dfrac{x_i - x_i}{x_j - x_i} = 0$

$N_i(x_j) = \dfrac{x_j - x_j}{x_j - x_i} = 0 \quad ; \quad N_j(x_j) = \dfrac{x_j - x_i}{x_j - x_i} = 1$

$\Rightarrow$ 1ère propriété vérifiée

② $N_i(x)$ et $N_j(x)$ varient linéairement entre les nœuds i et j.

$\Rightarrow$ 2ème propriété vérifiée.

③ $N_i + N_j = \dfrac{x_j - x}{x_j - x_i} + \dfrac{x - x_i}{x_j - x_i} = 1$ pour tout x.

$\Rightarrow$ 3ème propriété vérifiée.

$\Rightarrow$ N_i et N_j possèdent les 3 propriétés des fonctions de forme C_0 - continues.
