CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONTRAINTES

4.1 PRINCIPE DU MINIMUM DE L'ENERGIE POTENTIELLE :

Parmi tous les champs déplacement possibles qui vérifient les conditions aux limites géométriques (c.a.d. les déplacements), le champ déplacement qui vérifie aussi les équations d'équilibre statique résulte au minimum de l'énergie potentielle.
L'énergie potentielle est donnée par :

$$U = U_i + U_e \tag{1}$$

où U_i = énergie potentielle interne (énergie de déformation)
U_e = énergie potentielle externe (due aux forces externes)

Dans les systèmes de forces conservatrices, la perte de l'énergie potentielle externe durant le chargement doit être égale au travail des forces externes W_e , ou

$$-U_e = +W_e \tag{2}$$

et l'équation (1) devient

$$U = U_i - W_e \tag{3}$$

Le principe du minimum de l'énergie potentielle exige que U soit un minimum pour un équilibre stable. U est une fonctionnelle puisque elle est fonction de fonctions (fonctions de déplacement et de déformation). La minimisation de l'énergie potentielle totale est un problème de calcul variationnel.

Pour minimiser U , la première variation de l'énergie potentielle totale doit être nulle, ou

$$\delta U = \delta U_i - \delta W_e = 0 \tag{4}$$

Donc

$$\delta U_i = \delta W_e \tag{5}$$

Mais

$$\delta U_i = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \tag{6}$$

où $\{\delta\varepsilon\}$= première variation du vecteur déformation $\{\varepsilon\}$
$\{\sigma\}$= vecteur contrainte

Aussi

$$\delta W_e = \int_V \{\delta u\}^T \{b\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{s\} dS + \sum_{p=1}^{n} \{\delta u\}^T \{f_p\} \tag{7}$$

où $\{\delta u\}^T$ = première variation du vecteur déplacement $\{u\}$
$\{b\}$= vecteur force volumétrique (par unité de volume)
$\{s\}$= vecteur traction surfacique
$\{f_p\}$= vecteur force ponctuelle

L'équation (5) peut s'écrire

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV = \int_V \{\delta u\}^T\{b\}dV + \int_S \{\delta u\}^T\{s\}dS + \sum_{p=1}^{n}\{\delta u\}^T\{f_p\} \tag{8}$$

Pour un matériau élastique linéaire, la relation contrainte-déformation est donnée par :

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \tag{9}$$

où $[D]$= matrice des constantes élastiques
$\{\sigma_0\}$= vecteur contrainte résiduelle
$\{\varepsilon_0\}$= vecteur déformation résiduelle

Substitution de l'équation (155) dans l'équation (154) donne :

$$\begin{aligned}\int_V \{\delta\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}dV = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon_0\}dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma_0\}dV + \int_V \{\delta u\}^T\{b\}dV + \int_S \{\delta u\}^T\{s\}dS \\ + \sum_{p=1}^{n}\{\delta u\}^T\{f_p\}\end{aligned} \tag{10}$$

Nous pouvons montrer que l'énergie potentielle totale doit être donnée par :

$$\begin{aligned}U = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}dV - \int_V \{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon_0\}dV + \int_V \{\varepsilon\}^T\{\sigma_0\}dV - \int_V \{u\}^T\{b\}dV - \int_S \{u\}^T\{s\}dS \\ - \sum_{p=1}^{n}\{u\}^T\{f_p\}\end{aligned} \tag{11}$$