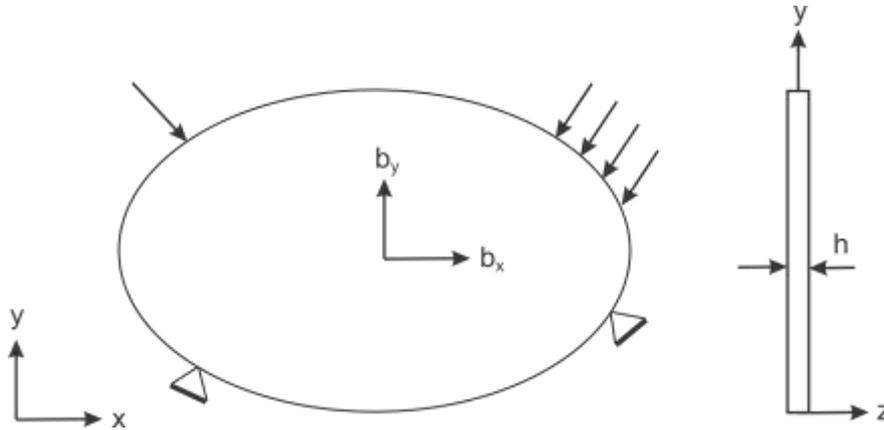


CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONTRAINTES

4.1 CONTRAINTES BIDIMENSIONNELLES (ETAT DE CONTRAINTE PLANE) :

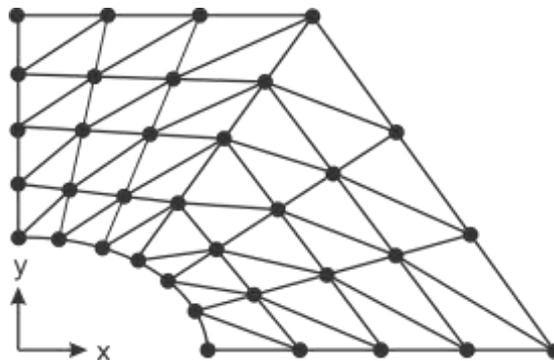
Un problème de contrainte plane est celui d'une plaque relativement mince chargée seulement dans son plan. La définition de contrainte plane dans le plan x - y implique que :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{52}$$



4.1.1 CARACTERISTIQUES DE L'ELEMENT FINI (ELEMENT TRIANGULAIRE) :

Une plaque d'épaisseur h constante est discrétisée en un nombre approprié d'éléments. Chaque nœud a deux degrés de liberté (composantes suivant x et y du vecteur déplacement).



Puisque chaque élément a 3 nœuds et chaque nœud a 2 degrés de liberté, la matrice fonction de forme $[N]$ est donnée par

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \tag{53}$$

Les 3 fonctions de forme sont données par les équations (22) et (23) du Chapitre 3.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T \tag{54}$$

$$\{u\} = \{u \quad v\}^T \quad (55)$$

mais

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (56)$$

donc

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (57)$$

et

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 \\ 0 & m_{31} & 0 & m_{32} & 0 & m_{33} \\ m_{31} & m_{21} & m_{32} & m_{22} & m_{33} & m_{23} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Les m_i sont donnés par les équations (23) du Chapitre 3.

Pour un matériau élastique linéaire

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (60)$$

où

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Si $\{\varepsilon_0\}$ est due à un changement de température ΔT , alors

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0\}^T \quad (62)$$

ε_{zz} n'est pas nulle. Elle est donnée par

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \varepsilon_{zz0} \quad (63)$$

Dans le cas de déformation thermique

$$\varepsilon_{zz0} = \alpha \Delta T \quad (64)$$

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad (65)$$

Les éléments de $[B]$, $[D]$ et h sont constants et

$$dV = h dx dy \quad (66)$$

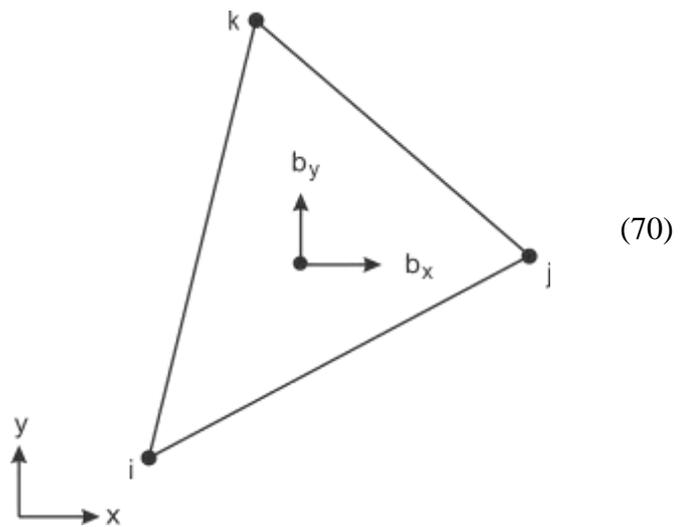
alors

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] h A^e \quad (67)$$

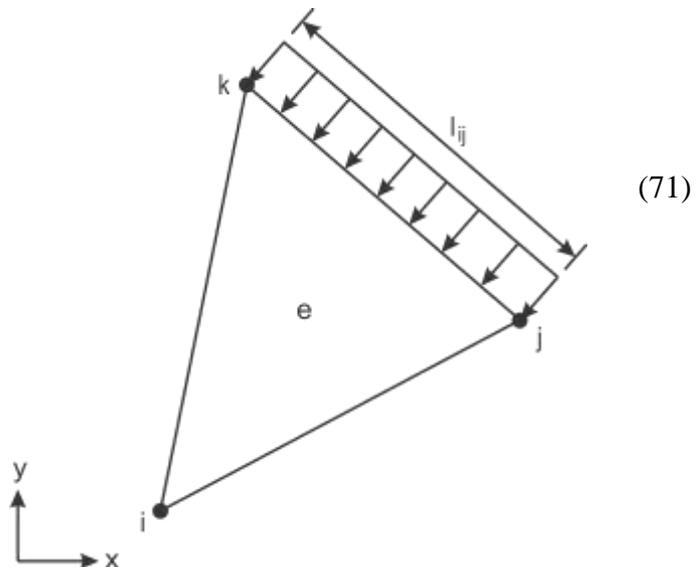
$$\{f_{\varepsilon_0}^e\} = [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} h A^e \quad (68)$$

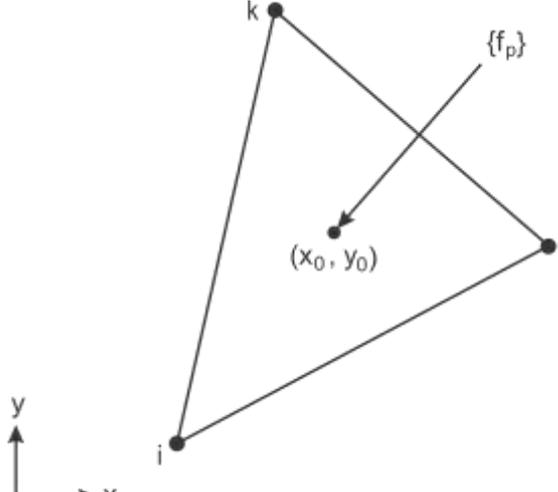
$$\{f_{\sigma_0}^e\} = [B]^T \{\sigma_0\} h A^e \quad (69)$$

$$\{f_b^e\} = \frac{h A^e}{3} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$



$$\{f_s^e\} = \frac{h l_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_x \\ s_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\{f_{cp}^e\} = \begin{Bmatrix} N_i(x_0, y_0) f_{px} \\ N_i(x_0, y_0) f_{py} \\ N_j(x_0, y_0) f_{px} \\ N_j(x_0, y_0) f_{py} \\ N_k(x_0, y_0) f_{px} \\ N_k(x_0, y_0) f_{py} \end{Bmatrix} \quad (72)$$


The diagram shows a triangle with vertices labeled i, j, and k. A Cartesian coordinate system is established with the origin at node i, with the x-axis pointing to the right and the y-axis pointing upwards. The center of gravity of the triangle is marked with a dot and labeled with the coordinates (x_0, y_0). A force vector, denoted as {f_p}, is shown as an arrow pointing towards the center of gravity from the upper right. The triangle is oriented such that node i is at the bottom left, node j is at the bottom right, and node k is at the top.

4.1.2 RESULTANTES ELEMENTAIRES :

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [B]\{a^e\} \quad (73)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = [D](\{\bar{\varepsilon}\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (74)$$

$\{\bar{\varepsilon}\}$ et $\{\bar{\sigma}\}$ sont respectivement les déformations moyennes et les contraintes moyennes et sont généralement associées avec le centre de gravité de l'élément fini.