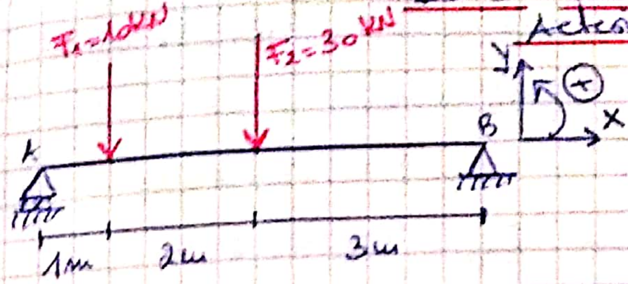
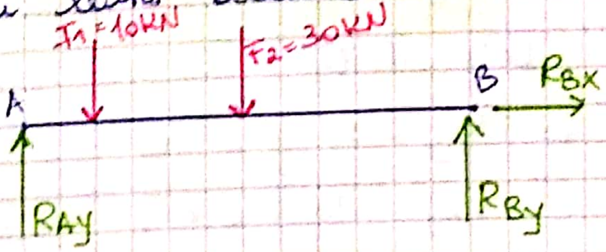
Solution de la série des travaux dirigés 1

TD 1 "Calcul des réactions d'appuis / actions de liaisons"



Les liaisons sont représentées par leurs actions



Les directions sont choisies arbitrairement.

Le principe fondamentale de la statique qui traduit l'équilibre permet de déterminer les réactions aux appuis.

Le P.F.S $\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = 0 & (2) \\ \Sigma M_{/P} = 0 & (3) \end{cases}$

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} = 0.$ (1)

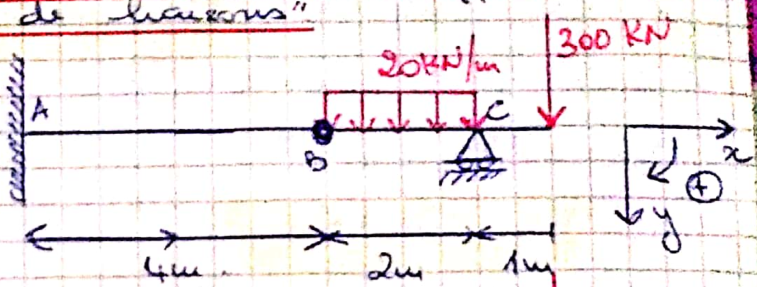
$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} - 10 - 30 = 0$

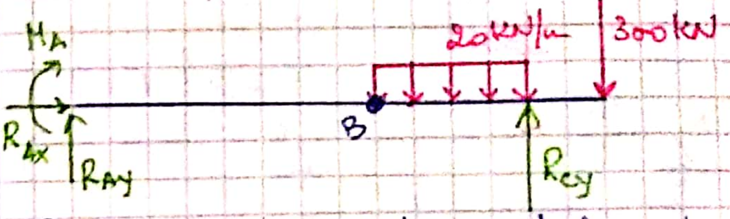
$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = 40\ kN$ (2)

$\Sigma M_{/B} = 0 \Leftrightarrow 10.5 + 30.3 - R_{Ay}.5 = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} = 23{,}33\ kN$

(2) $\Rightarrow R_{By} = 40 - 23{,}33$

$\Rightarrow R_{By} = 16{,}67\ kN.$





Le principe fondamentale de la statique exprime l'équilibre globale de la structure et permet de déterminer les actions de liaisons. (P.F.S).

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} = 0.$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay} - R_{cy} + 300 + 20.2 = 0.$

$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{cy} = 340\ kN.$ (2)

$\Sigma M_{/A} = 0 \Leftrightarrow M_A + 20(2).5 - R_{cy}.6 + 300.7 = 0.$

$\Leftrightarrow M_A - 6R_{cy} = -2300\ kN.m$ (3)

Nous avons 2 équations avec 3 inconnues, pour pouvoir résoudre ce système il nous faut exploiter l'articulation qui nous permet d'écrire deux (02) équations supplémentaires

$\Sigma M_{G/B} = 0$ et $\Sigma M_{D/B} = 0.$

$\Sigma M_{D/B} = 0 \Leftrightarrow 300.3 - 2R_{cy} + 20.2.1 =$

$\Leftrightarrow R_{cy} = 470\ kN$

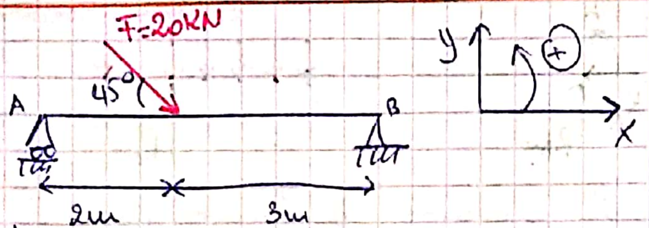
A partir de l'equation ②

$\Rightarrow R_{Ay} = 340 - 470 \Rightarrow R_{AY} = -130 \text{ kN}$

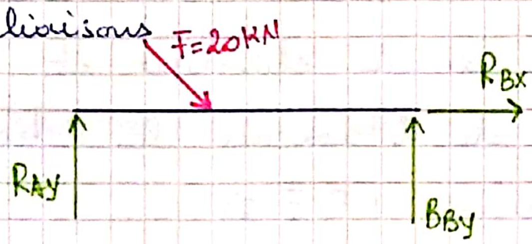
A partir de l'equation ③

$M_A = -2300 + 6(470)$

$\Rightarrow M_A = 520 \text{ kN.m}$



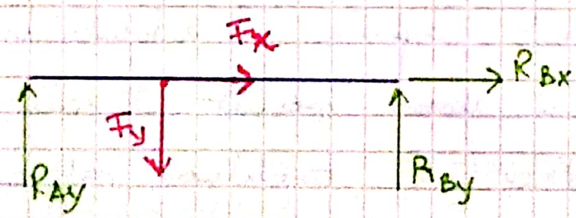
Determination des actions de liaisons



Le P.F.S (Principe fondamental de la statique permet d'ecrire).

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & ① \\ \Sigma F_y = 0 & ② \\ \Sigma M_{F/P} = 0 & ③ \end{cases}$$

Dans le referentiel choisit la force F peut etre decomposé et possède 2 composantes Fx et Fy. Le schema statique devient



$① \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} + F_x = 0$

$\Leftrightarrow R_{Bx} + F\cos 45 = 0$

$\Leftrightarrow R_{Bx} = -10\sqrt{2} \text{ kN}$

$② \Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow + R_{Ay} + R_{By} + F_y = 0$

$\Leftrightarrow R_{Ax} + R_{By} = F_y = F_y \sin 45$

$③ \Rightarrow \Sigma M_{F/A} = 0 \Leftrightarrow$

$R_{By} \cdot 5 - F\sin 45 \cdot 2 = 0$

$\Leftrightarrow R_{By} = F\sin 45 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow R_{By} = 8 \sin 45$

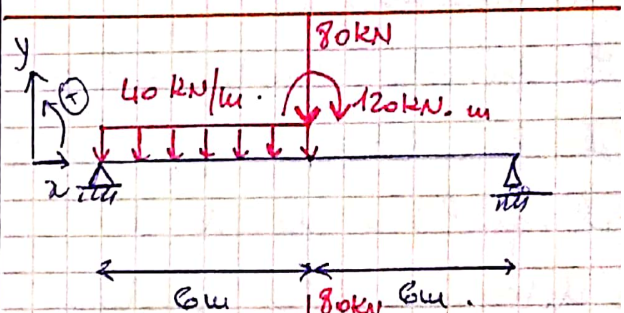
$\Leftrightarrow R_{By} = 4\sqrt{2} \text{ kN}$

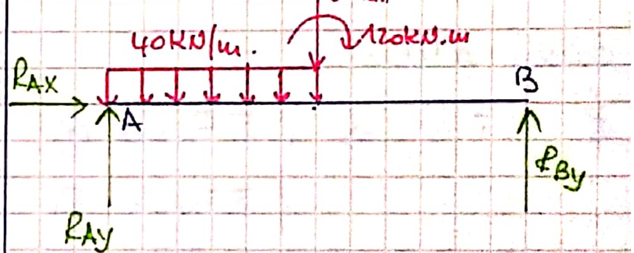
A partir de ②

$\Rightarrow R_{Ay} = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - R_{By}$

$\Leftrightarrow R_{Ay} = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow R_{Ay} = 6\sqrt{2} \text{ kN}$





P.F.S $\Rightarrow \Sigma F_x = 0$

$\Leftrightarrow R_{AX} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} - 80 - 40 \cdot 6 = 0$

$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = 320 \text{ kN}$

$\Sigma M_{/A} = 0 \Leftrightarrow R_{By} \cdot 12 - 120 - 80 \cdot 6 - 40 \cdot 6 \cdot 3 = 0$

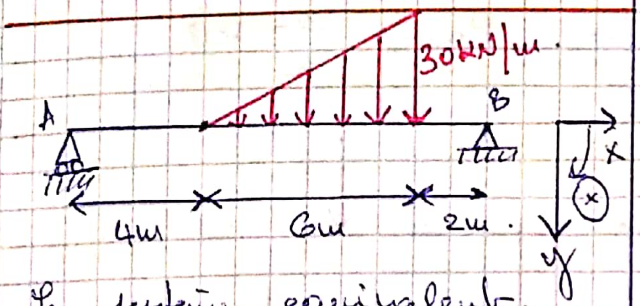
$\Leftrightarrow R_{By} = 110 \text{ kN}$

Nous pouvons utiliser une

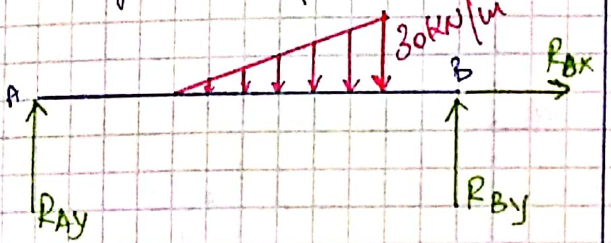
2ème fois l'équation (3) qui doit être vérifiée quelque soit le point choisi pour assurer l'équilibre.

$\sum \mathcal{M}_{F/B} = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay}\cdot 12 + 40\cdot 6\cdot 9 + 80\cdot 6 - 120 = 0$

$\Leftrightarrow R_{Ay} = 210\,kN$



Le système équivalent.



La résultante d'une force répartie est donnée par: la surface du diagramme de répartition qui représente son intensité et est appliquée au niveau du centre de gravité du même diagramme.

P.F.S $\Leftrightarrow$ (1) $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} = 0\,kN$

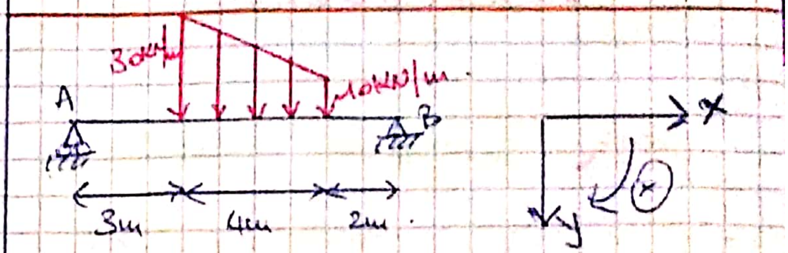
$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay} - R_{By} + \frac{1}{2}(30)(6) = 0$

$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = 90\,kN$ (2)

$\sum \mathcal{M}/_B = 0 \Leftrightarrow R_{Ay}\cdot 12 - \frac{1}{2}(30)(6)\cdot 4 = 0$

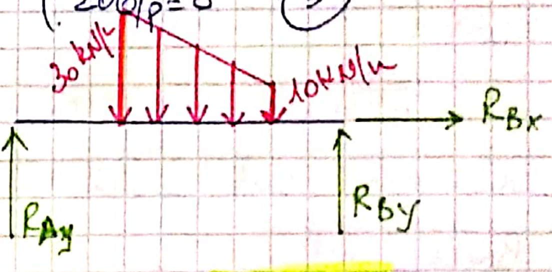
$\Leftrightarrow R_{Ay} = 30\,kN$

(2) $\Leftrightarrow R_{By} = 60\,kN$



Le P.F.S qui traduit l'équilibre

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 & (2) \\ \sum \mathcal{M}/_B = 0 & (3) \end{cases}$$



$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} = 0.$ (1)

$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay} - R_{By} + (10\cdot 4) + \frac{1}{2}(20)(4) = 0.$ (2)

Le Principe de superposition nous permet de diviser la répartition trapézoïdale en deux:

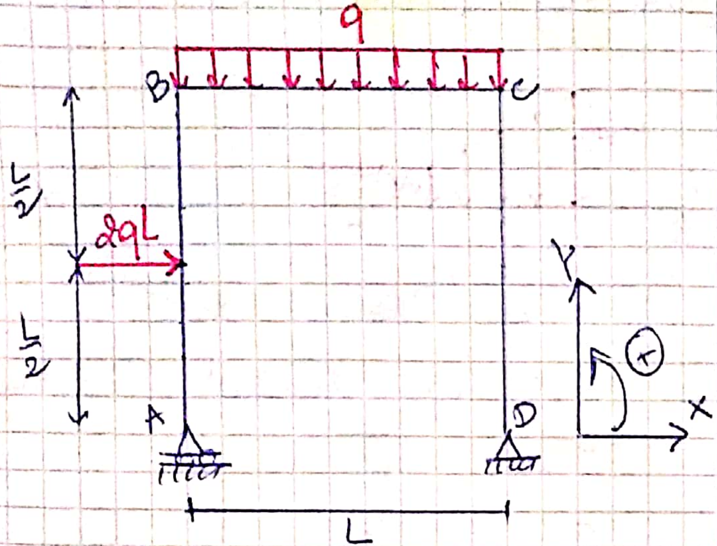
- Une répartition uniforme de 10 kN/m et
- Une répartition linéaire (triangulaire) de $q(x=3) = 20\,kN/m$ et $q(x=7m) = 0\,kN/m$.

(2) $\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = 80\,kN$

(3) $\Leftrightarrow \sum \mathcal{M}/_B = 0 \Leftrightarrow R_{Ay}\cdot 9 - (10\cdot 4)(4) - \frac{1}{2}(20)(4)\left(2 + \frac{2}{3}\cdot 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow R_{Ay} = 38{,}5185\,kN$

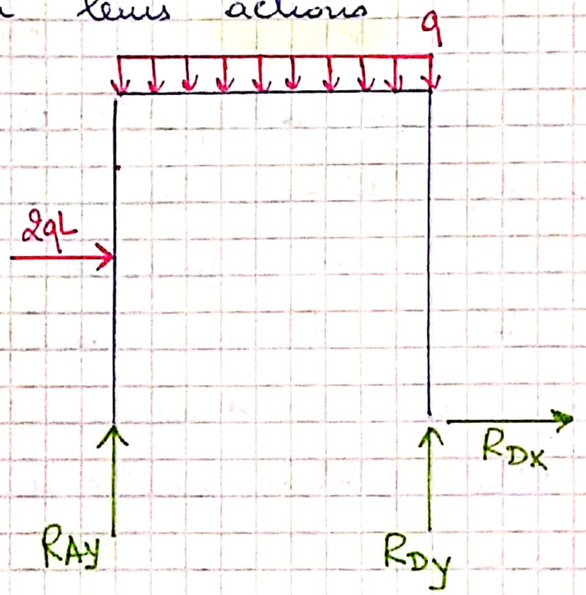
$\sum \mathcal{M}/_A = 0 \Leftrightarrow -R_{By}\cdot 9 + (10\cdot 4)(5) + \frac{1}{2}(20\cdot 4)\left(3 + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow R_{By} = 41{,}4815\,kN$



C'est un système plan. (portique).

$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ et $\Sigma \mathcal{M}/_p = 0$.

Les liaisons sont remplacées par leurs actions



$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Dx} + 2qL = 0.$

$\Leftrightarrow \boxed{R_{Dx} = -2qL \text{ kN}}$

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_{Dy} - q.L = 0.$

$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{Dy} = q.L.$

$\Sigma \mathcal{M}/_D = 0 \Leftrightarrow - R_{Ay}.L + 2q.L.\frac{L}{2}$
$+ q.L.\frac{L}{2} = 0.$

$\Leftrightarrow R_{Ay} = -qL + q\frac{L}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{R_{Ay} = -q\frac{L}{2}. \text{ kN}}$

$R_{Ay} + R_{Dy} = qL.$

$\Leftrightarrow R_{Dy} = qL - R_{Ay}$

$\Leftrightarrow R_{Dy} = qL + q\frac{L}{2}.$

$\Leftrightarrow \boxed{R_{Dy} = \frac{3qL}{2} \text{ kN}}$

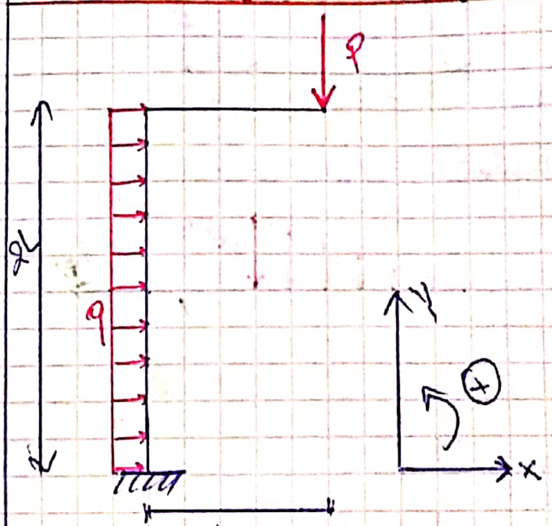
ou.

$\Sigma \mathcal{M}/_A = 0$

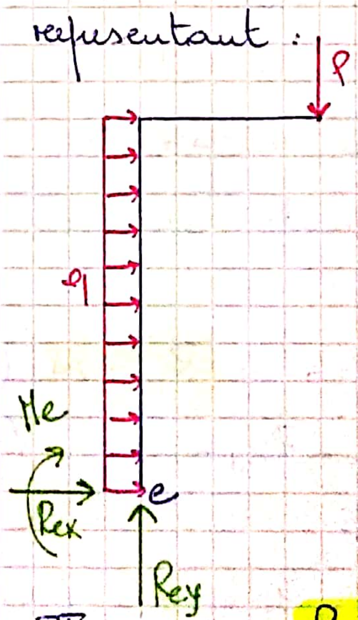
$\Leftrightarrow R_{Dy}.L - q.L.\frac{L}{2} - 2q.L\frac{L}{2} = 0$

$\Leftrightarrow R_{Dy} = \frac{qL}{2} + qL$

$\Leftrightarrow \boxed{R_{Dy} = \frac{3qL}{2} \text{ kN}}$



L'encastrement est remplacé par les actions le représentant :



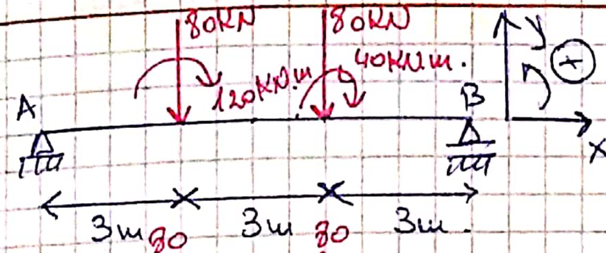
$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_{ex} = -q.2L \text{ kN}}$

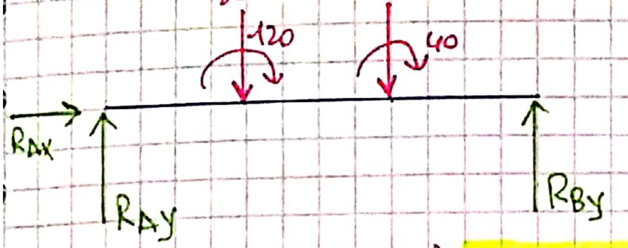
$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_{ey} = P \text{ kN}}$

Scanned with CamScanner

$\Sigma \mathcal{M}/_e = 0 \Leftrightarrow -M_e - q \cdot 2L \cdot L - P \cdot L = 0$

$\Leftrightarrow$ $M_e = -2qL^2 - P.L$ KN.m.





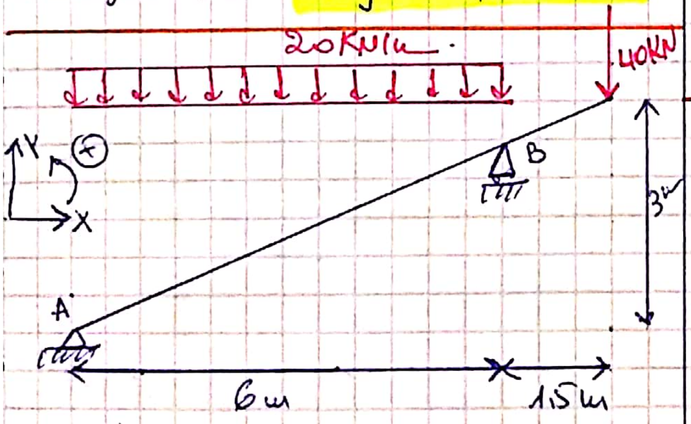
P.F.S $\Leftrightarrow$ $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow$ $R_{Ax} = 0$ KN

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = 160$ kN

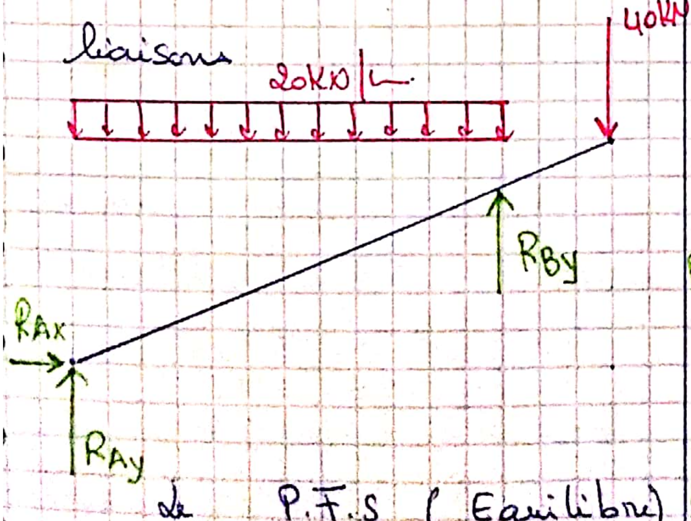
$\Sigma \mathcal{M}/_A = 0 \Leftrightarrow R_{By} \cdot 9 - 120 - 40 - 80.6 - 80.3 = 0$.

$\Leftrightarrow$ $R_{By} = 97,7778$ KN.

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$ $R_{Ay} = 62,2222$ KN



Modèle avec les actions de liaisons



de P.F.S (Equilibre)

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = 0 & (2) \\ \Sigma \mathcal{M}/_P = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow$ $R_{Ax} = 0$ KN.

(2) $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} - 40 - 20.6 = 0 \Leftrightarrow$

$R_{Ay} + R_{By} = 160$ KN.

$\Sigma \mathcal{M}/_A = 0 \Leftrightarrow R_{By} \cdot 6 - 40 \cdot (7,5) - 20(6) \cdot (3) = 0$.

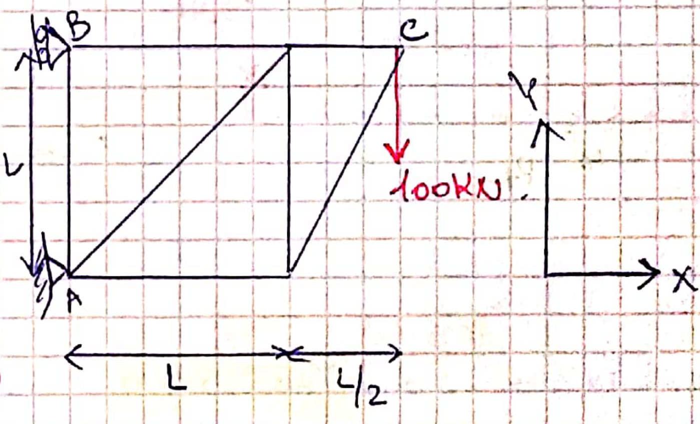
$\Leftrightarrow$ $R_{By} = 110$ KN.

En utilisant une deuxième fois la 3ème équation on obtient

$\Sigma \mathcal{M}/_B = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay} \cdot 6 + 20(6) \cdot (3) - 40 \cdot (1,5) = 0$.

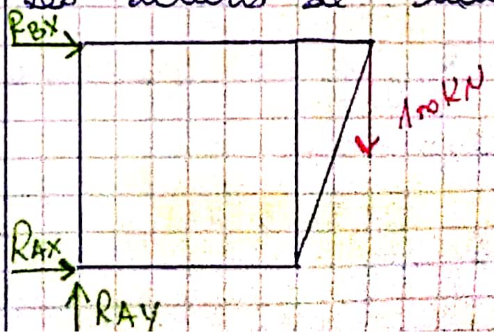
$\Leftrightarrow$ $R_{Ay} = 50$ KN.

L'équation (2) est vérifiée.



C'est un système plan triangulé appelé treillis.

Les actions de liaisons



$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} + R_{Bx} = 0$.

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} = 100\ kN$.

$\Sigma \mathcal{M}/_A = 0 \Leftrightarrow -100.\left(\frac{3L}{2}\right) - R_{Bx}.L = 0$.

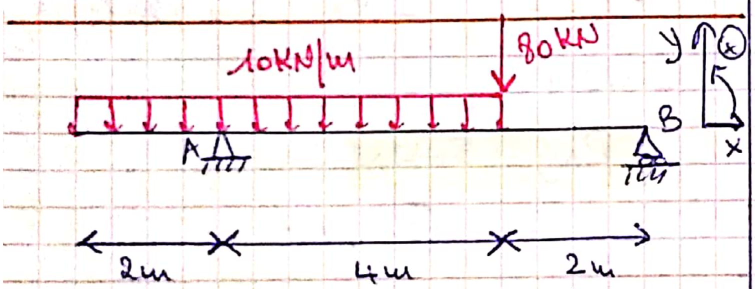
$\Leftrightarrow R_{Bx} = -150\ kN$.

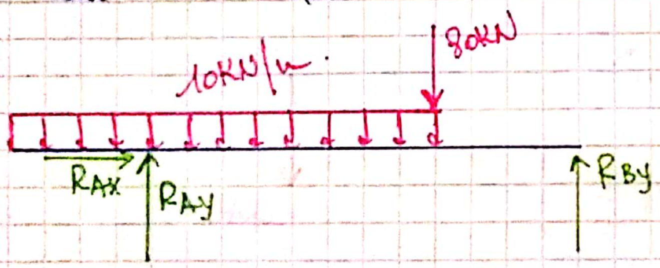
Utilisons une deuxième fois la 3ème equation en changeant le point de rotation.

$\Sigma \mathcal{M}/_B = 0 \Leftrightarrow R_{Ax}.L - 100.\frac{3L}{2} = 0$.

$\Leftrightarrow R_{Ax} = 150\ kN$.

Avec ces valeurs l'equation (2) est vérifié donc l'equilibre est assuré.





Le P.F.S

(1) $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} = 0\ kN$.

(2) $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} - 80 - 10\ 6 = 0$

$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = 140\ kN$

(3) $\Sigma \mathcal{M}/_A = 0 \Leftrightarrow R_{By}.6 - 80.4 - 10.4.2 + 10.2.1 = 0$.

$\Leftrightarrow R_{By} = 63,3334\ kN$

(3) $\Sigma \mathcal{M}/_B = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay}.6 + 10.2.7 + 10.4.4 + 80.2 = 0$.

$\Leftrightarrow R_{Ay} = 76,6666\ kN$.