Dynamique Des Structures 2 (DDS2)

Année universitaire 2019/2020,

Dr BENMANSOUR-MEDDANE Nassima

Dynamique des structures 2

1. Vibrations libres des SPPDDL

1.Introduction

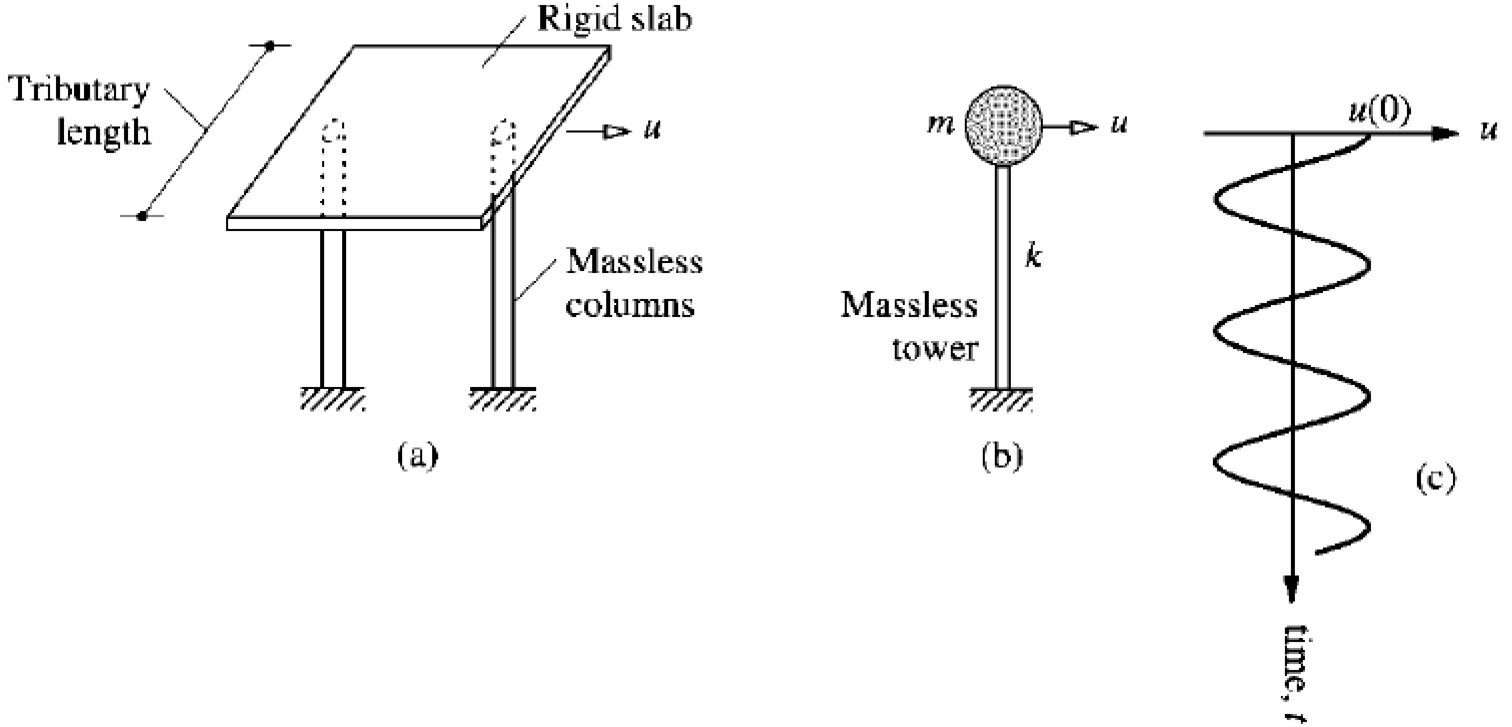
Rappel

- **Un système est en vibration libre si l'excitation dynamique extérieure est nulle durant le mouvement.**

- **Un système est peut être en vibration libre sous certaines conditions initiales de déplacement et/ou de vitesse.**

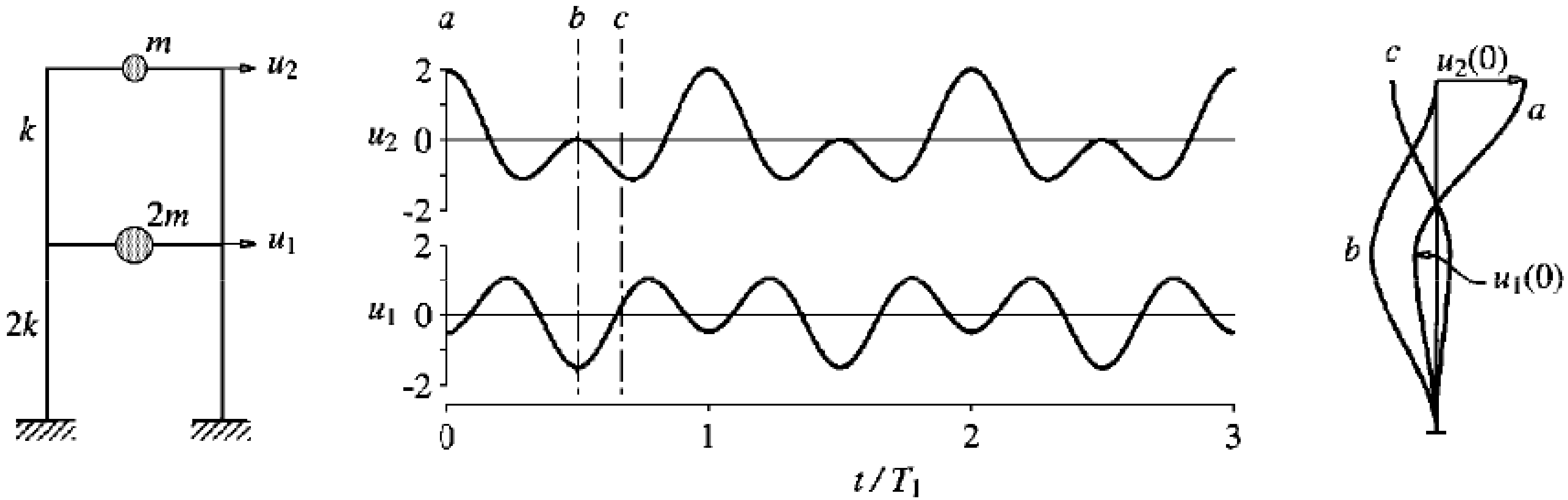
Un SSDDL en vibration libre oscille à une fréquence ou à une période propre.

Une fréquence ou période naturelle, avec laquelle le système vibre naturellement.



Analyse qualitative des vibrations libres des SPDDL

Vibrations libres d'un S2DDL



- Le mouvement est **périodique** mais il n'est pas harmonique.

• Les vibrations libres sont une **succession de forme** qui dépendent de la distribution de la masse, la rigidité et les conditions initiales.

•On distingue **deux types de forme**:

u_1 et u_2 vibrent dans la même direction

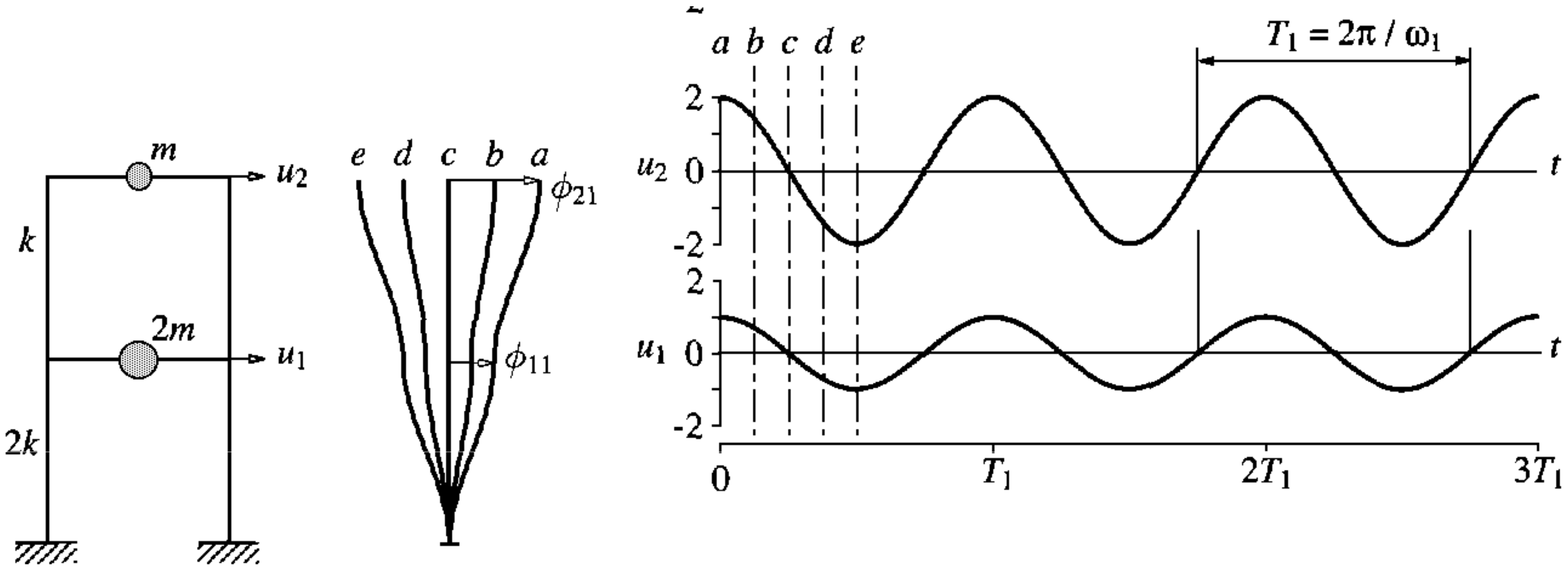
u_1 et u_2 vibrent dans des directions opposées

Vibrations libres d'un S2DDL

- Chaque forme de vibration correspond à une fonction harmonique oscillant avec une période.
- Le mouvement en vibration libre peut être donc représenté par une superposition de mouvement harmonique.
- On sépare les formes de vibrations.

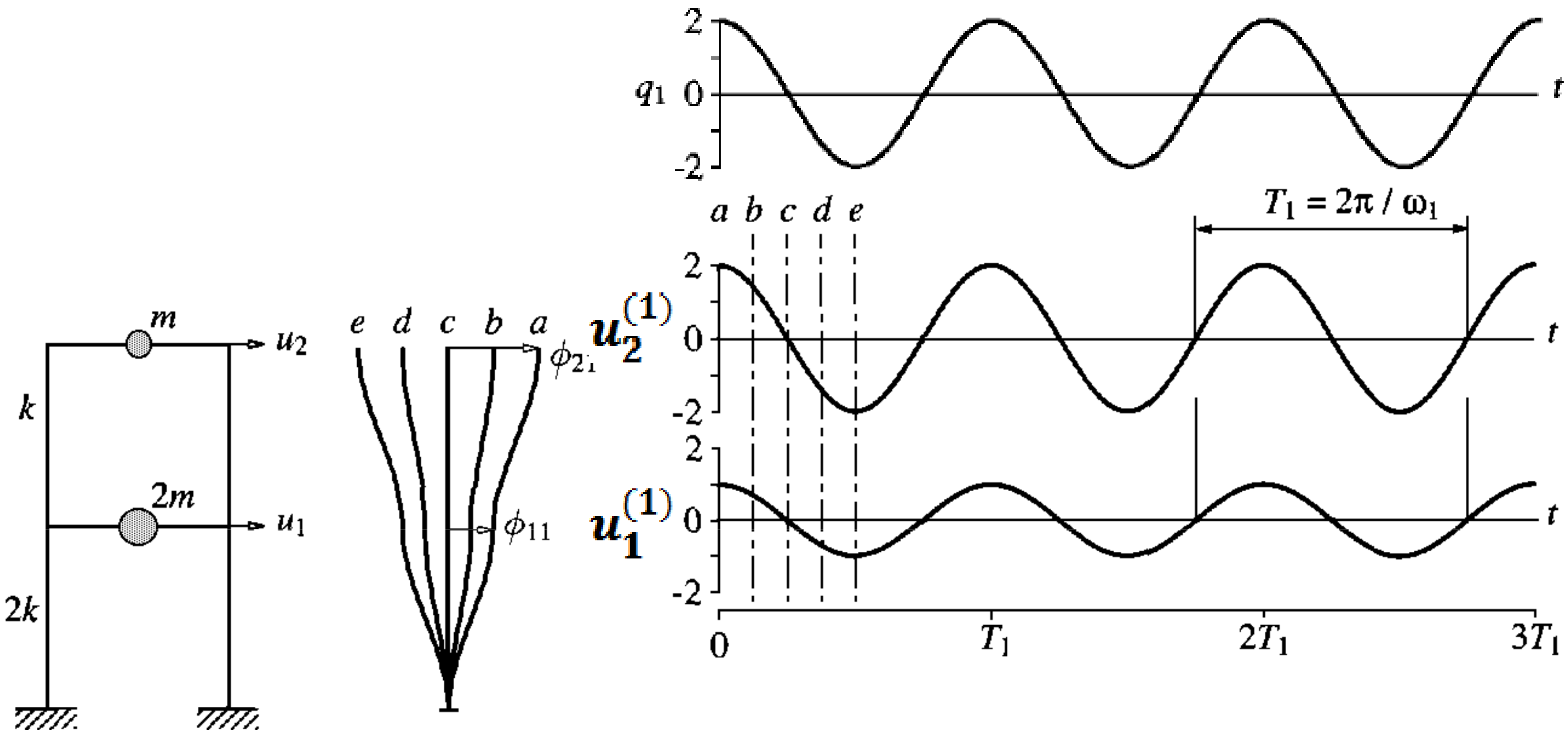
Pour l'exemple traité on a deux forme.

- Forme 1: u_1 et u_2 vibrent dans la même direction.



Le mouvement est décrit par une même **fonction harmonique** $q_1(t)$ **de période T_1** avec amplitudes **différentes**..

- Forme 1: u_1 et u_2 vibrent avec une période T_1.



$\boldsymbol{q_1(t)}$ fonction harmonique de période T_1 .

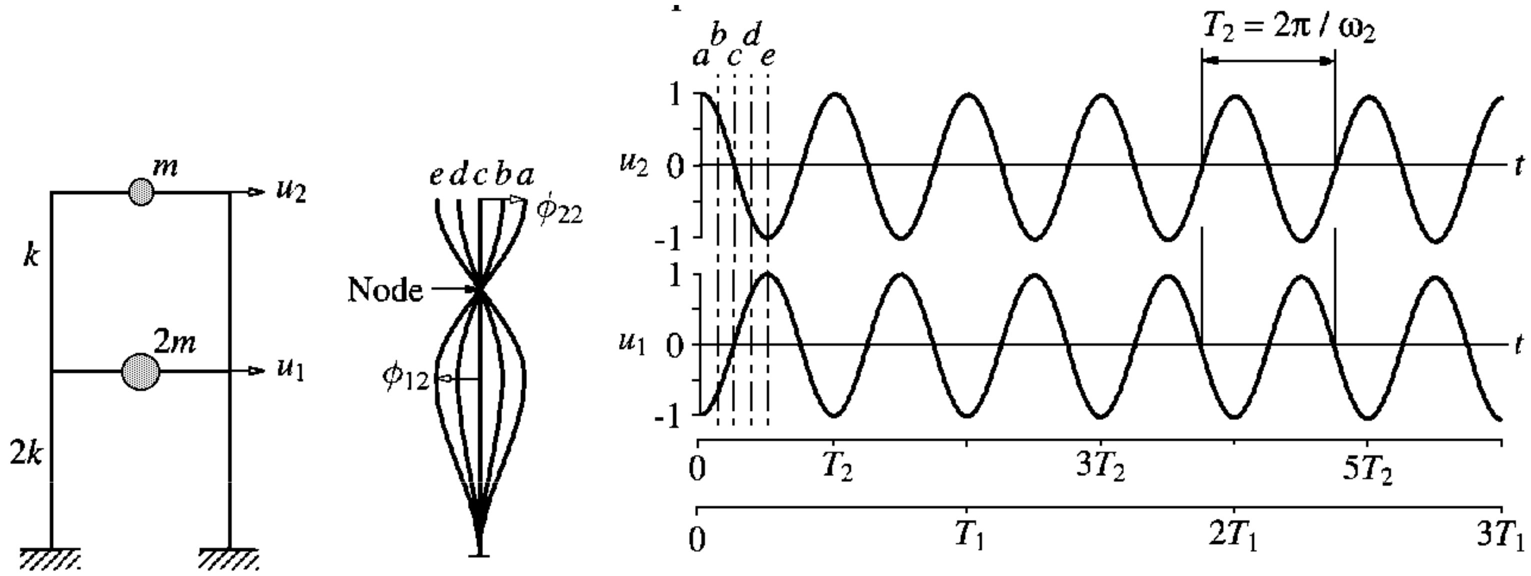
$\emptyset_{11}$ amplitude de $u_1^{(1)}$ et $\emptyset_{21}$ amplitude de $u_2^{(1)}$.

$$u_1^{(1)} = q_1(t).\emptyset_{11}$$

$$u_2^{(1)} = q_1(t).\emptyset_{21}$$

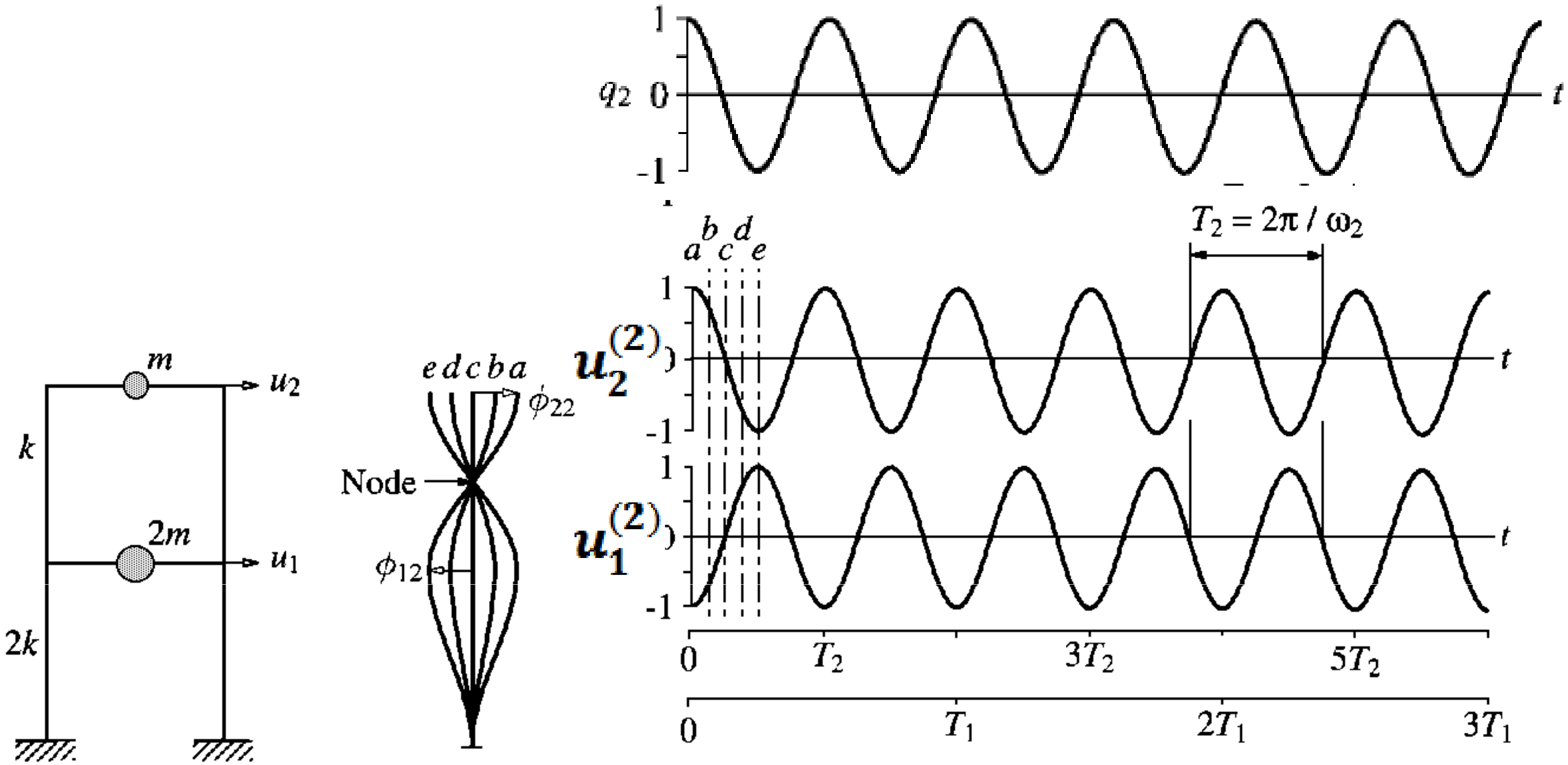
$$u_{(1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{(1)} = \begin{pmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{21} \end{pmatrix} q_1(t)$$

- Forme 2: u_1 et u_2 vibrent dans des deux directions opposées.



Le mouvement est décrit par une **même fonction harmonique** $q_2(t)$ **de période** $\mathbf{T_2}$ avec amplitudes **différentes**.

- Forme 2: u_1 et u_2 vibrent dans des deux directions opposées.



$q_2(t)$ fonction harmonique de période T_2

$\emptyset_{12}$ amplitude de $u_1^{(2)}$ et $\emptyset_{22}$ amplitude de $u_2^{(2)}$

$$u_1^{(2)} = q_2(t).\emptyset_{12}$$

$$u_2^{(2)} = q_2(t).\emptyset_{22}$$

$$u_{(2)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{(2)} = \begin{pmatrix} \emptyset_{12} \\ \emptyset_{22} \end{pmatrix} q_2(t)$$

- Le déplacement est donc la superposition des déplacements obtenus à travers les deux formes de vibrations donc deux fréquences propres:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}_{(1)} + \boldsymbol{u}_{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{(1)} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{(2)} = \begin{pmatrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \end{pmatrix} q_1(t) + \begin{pmatrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \end{pmatrix} q_2(t)$$

Les différentes formes de vibration sont appelés **modes propres de vibration** pour l'exemple on a deux modes de vibration.

Mode1 Mode 2

$$\emptyset^{(1)} = \begin{pmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{21} \end{pmatrix} \qquad \emptyset^{(2)} = \begin{pmatrix} \emptyset_{12} \\ \emptyset_{22} \end{pmatrix}$$

le mode 1 correspond au mouvement harmonique de période T_1.
le mode 2 correspond au mouvement harmonique de période T_2.
T_1 et T_2 sont nommées **les périodes propres de vibration du portique**

Cas général SPDDL

- Tous les corps qui possèdent une masse, vibrent à leur fréquence propre, voire leurs fréquences propres.
- une structure complexe, par exemple un bâtiment, possède plusieurs (NDDL) fréquences propres et déformées propres. On imagine par exemple facilement une déformée propre et une fréquence par balcon, mais aussi des déformées propres plus globales qui intéressent par exemple les déplacements d'ensemble du bâtiment.

Cas général SPDDL

- Une structure élastique possède une infinité de modes propres de vibration caractérisant le mouvement des DDL de la structure.
- On peut donc supposer que le mouvement d'une structure est la superposition des vibrations selon les divers modes propres.
- Le mode donne la forme de vibration, en le multipliant par une fonction temporelle on obtient l'amplitude.

Cas général SPDDL

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}_{(1)} + \boldsymbol{u}_{(2)} + \cdots + \boldsymbol{u}_{(N)}.$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}_{(1)} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}_{(2)} + \ldots + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}_{N}$$

$$= \begin{pmatrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \\ \vdots \\ \varnothing_{N1} \end{pmatrix} q_1(t) + \begin{pmatrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \\ \vdots \\ \varnothing_{N2} \end{pmatrix} q_2(t) + \cdots + \begin{pmatrix} \varnothing_{1N} \\ \varnothing_{2N} \\ \vdots \\ \varnothing_{NN} \end{pmatrix} q_N(t)$$

Chaque mode propre i correspond à une période propre Ti.
Chaque DDL entraine une nouvelle forme de vibration donc
<u>le nombre de modes propres est égale au nombre de DDL= N</u>

Notations

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} u_{(i)}$$

$u_{(i)}$ **Déplacement au mode i.**

Φ **: Matrice modale**

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} \emptyset_{(i)}\, q_i(t) = \Phi q(t)$$

$$\Phi = \left[\begin{pmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{21} \\ \vdots \\ \emptyset_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset_{12} \\ \emptyset_{22} \\ \vdots \\ \emptyset_{N2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \emptyset_{1N} \\ \emptyset_{2N} \\ \vdots \\ \emptyset_{NN} \end{pmatrix} \right]$$

$q(t)$**: déplacement en coordonnées modales**

$$q_i(t) = A_i cos\,(\omega_i t) + B_i sin\,(\omega_i t)$$

$q_i(t)$ **: fonction harmonique de période** $T_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix}$$

A_i et B_i constantes déterminées à partir des conditions initiales

$$u(0); \dot{u}(0)$$

2. Evaluation des modes et fréquences propres-
ANALYSE MODALE

Fréquences propres et modes propres

En vibration libre non amortie l'équation de mouvement est:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0$$

Le déplacement en vibration libre est:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} \emptyset_{(i)}\, q_i(t) = \Phi q(t)$$

Pour un mode i on a:

$$u_i\,(t) = \emptyset_i q_i(t) = \emptyset_i(A_i cos\,(\omega_i t) + B_i sin\,(\omega_i t))$$

les inconnues sont le mode propre $\emptyset_i$ et la pulsation propre ω_i

Fréquences propres et modes propres

En vibration libre non amortie l'équation de mouvement est:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0$$

Pour un mode i on a:

$$u_i\,(t) = \emptyset_i q_i(t) = \emptyset_i(A_i cos\,(\omega_i t) + B_i sin\,(\omega_i t))$$

Remplaçons $u(t); \ddot{u}(t)$ dans l'équation de mouvement :

$$\left(-\omega_i^2 M\phi_i + K\phi_i\right)q_i(t) = 0$$

$$q_i(t) \neq 0 \qquad\qquad \omega_i^2 M\phi_i = K\phi_i$$

Cette relation algébrique est nommée problème au valeurs et vecteurs propres.

Fréquences propres

$$\omega_i^2 M\phi_i = K\phi_i \quad \Rightarrow \quad (K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0$$

C'est un système d'équations homogène
Il n'admet pas de solution unique (triviale) seulement si:

$$\boxed{det(K - \omega_i^2 M) = 0}$$

On obtient un polynôme de dégrée N **en** variable ω_i^2.

Il est nommé équation caractéristique sa résolution permet d'obtenir les N valeurs de $\omega_i^2\ (i = 1 \dots N)$.

Fréquences propres

Les ω_i^2 Sont réelles et positives car les matrices K et M sont symétriques et définies positives.

La plus faible pulsation est notée ω_1

On l'appelle souvent pulsation fondamental.

$$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_i < \cdots < \omega_N$$

Matrice spectrale

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Modes propres

Pour chaque ω_i^2 on a un mode propre $\emptyset_i$.

$\emptyset_i$ est obtenu en résolvant le système:

$$\boxed{(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0}$$

Ce système a une infinité de solution.

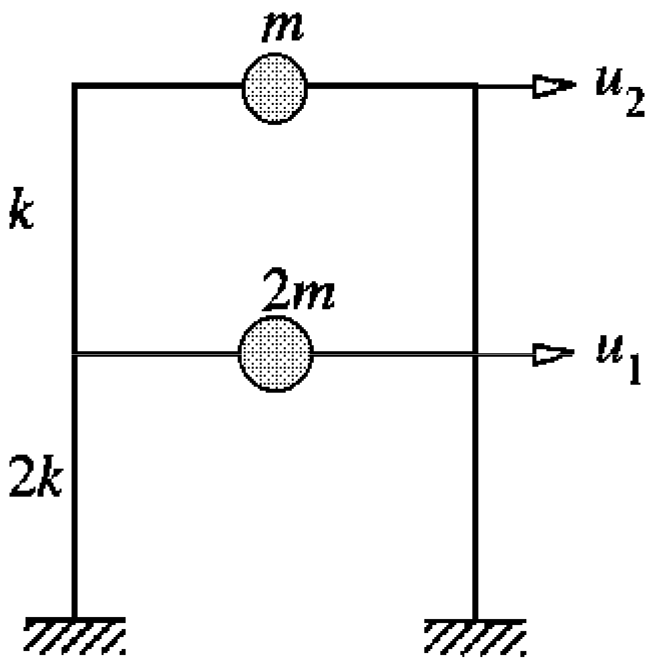
On fixe une composante du vecteur $\emptyset_i$ (généralement la première $\emptyset_{1i}$ ou mieux la plus grande) .

$$\boldsymbol{\Phi} = \left[\begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{pmatrix} \right]$$

$$\boldsymbol{K\Phi} = \boldsymbol{M\Phi\Omega}^2$$

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

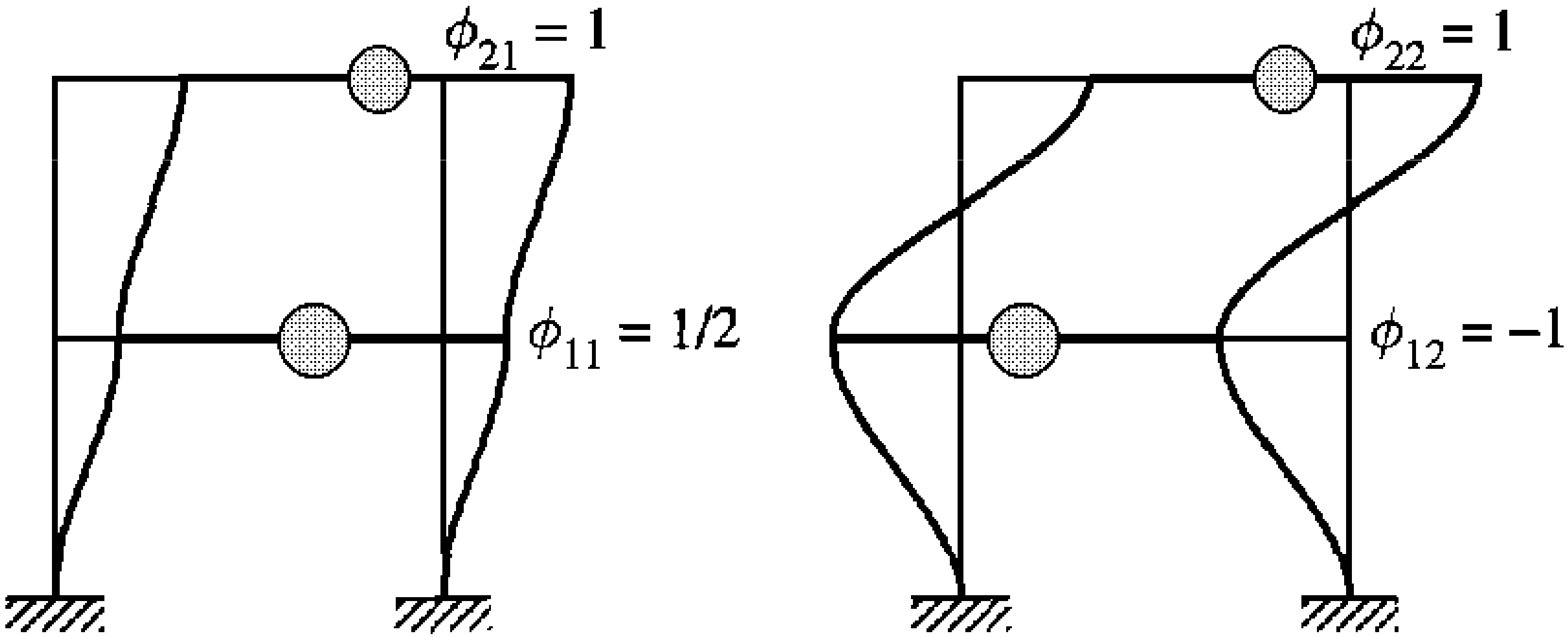
Exemple2:Donnée



$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

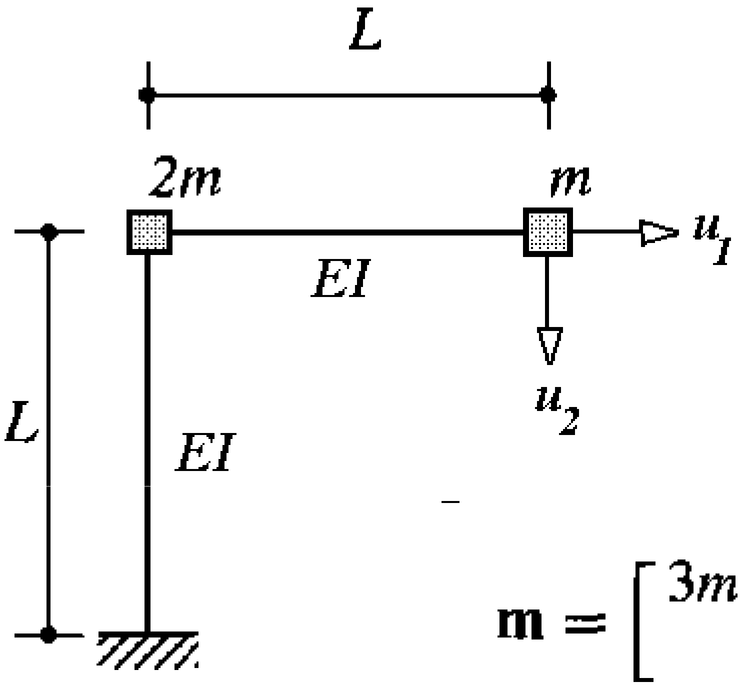
Exemple2:
Modes et pulsations propres

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



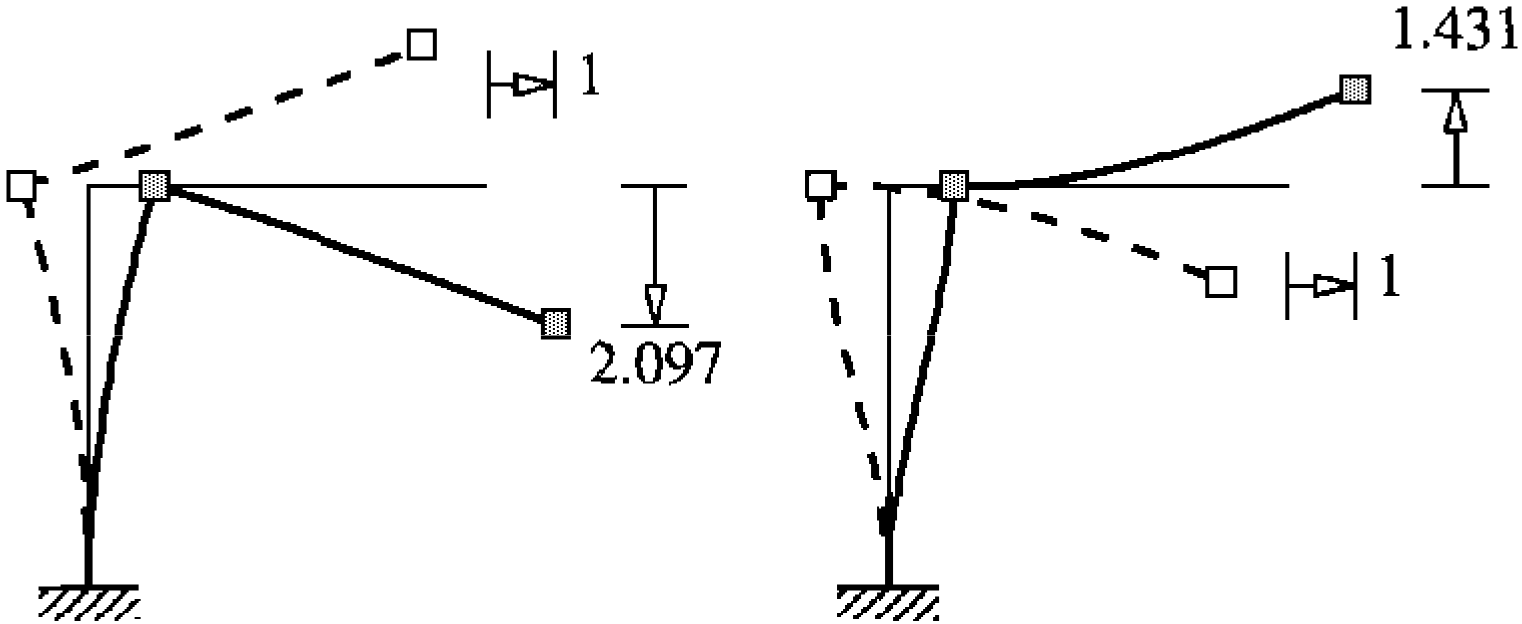
$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Exemple 1: Donnée



$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple1:
Modes et pulsations propres



$$\omega_1 = 0.6987\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \qquad \omega_2 = 1.874\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.431 \end{Bmatrix}$$

Orthogonalité des modes propres

par rapport à la matrice M

$$\emptyset_i^{T} M \emptyset_j \quad = 0 \qquad si \qquad i \neq j$$

$$\emptyset_i^{T} M \emptyset_j \quad \neq 0 \qquad si \qquad i = j$$

par rapport à la matrice K

$$\emptyset_i^{T} K \emptyset_j \quad = 0 \qquad si \qquad i \neq j$$

$$\emptyset_i^{T} K \emptyset_j \quad \neq 0 \qquad si \qquad i = j$$

on note:

$$M^* = \begin{pmatrix} \emptyset_1{}^T M \emptyset_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \emptyset_N{}^T M \emptyset_N \end{pmatrix} \qquad M_i^* = \emptyset_i{}^T M \emptyset_i$$

$$K^* = \begin{pmatrix} \emptyset_1{}^T K \emptyset_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \emptyset_N{}^T K \emptyset_N \end{pmatrix} \qquad K_i^* = \emptyset_i{}^T K \emptyset_i$$

$$M^* = \begin{pmatrix} M_1^* & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & M_N^* \end{pmatrix} \qquad K^* = \begin{pmatrix} K_1^* & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & K_N^* \end{pmatrix}$$

La relation suivante est donc toujours vérifiée

$$\omega_i^2 = \frac{M_i^*}{K_i^*}$$

Estimation des déplacement modaux
q(t) à partir de u(t)

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{N} \emptyset_{(i)}\, \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Phi q}(\boldsymbol{t})$$

U(t): vecteur déplacement en coordonnées géométriques
q(t): déplacement en coordonnées modales.

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \sum_{i=1}^{N} \emptyset_i\, \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{t}) \quad = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \emptyset_i \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{t})$$ (orthogonalité des modes propres)

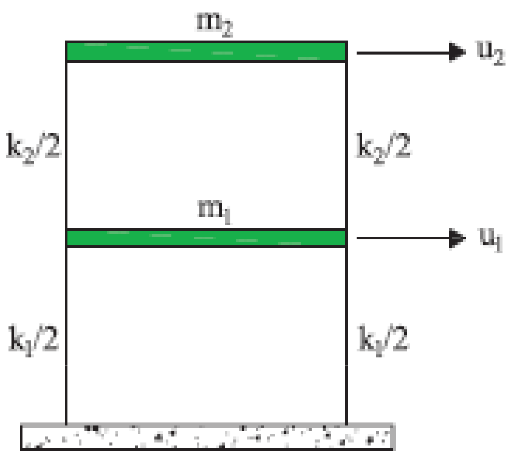
$$\boxed{\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M u}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \emptyset_i}}$$

Cette relation peut être utilisé pour déterminer les coordonnées modales initiales

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{q}}_i(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M \dot{u}}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \emptyset_i}}$$

$$\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{0}) \qquad \dot{\boldsymbol{q}}_i(\boldsymbol{0})$$

Exemple d'un calcul en vibration libre



$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k$$

Equation de mouvement

$$m\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Pulsations propres

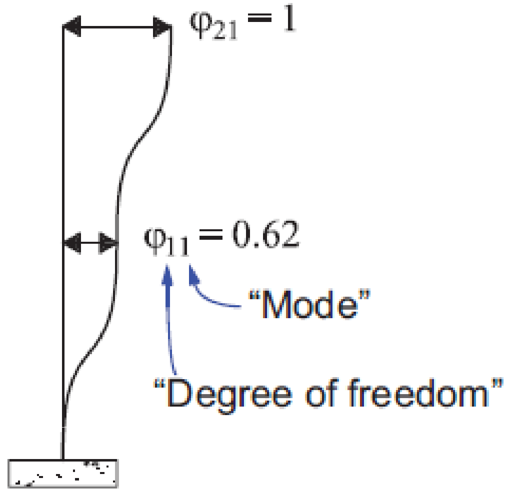
$$\left|K - \omega_n^2 M\right| = \left|\begin{bmatrix} 2k - \omega_n^2 m & -k \\ -k & k - \omega_n^2 m \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$(2k - \omega_n^2 m) \cdot (k - \omega_n^2 m) - (-k) \cdot (-k) = m^2 \omega_n^4 - 3km\omega_n^2 + k^2 = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

Modes propres

- Mode 1

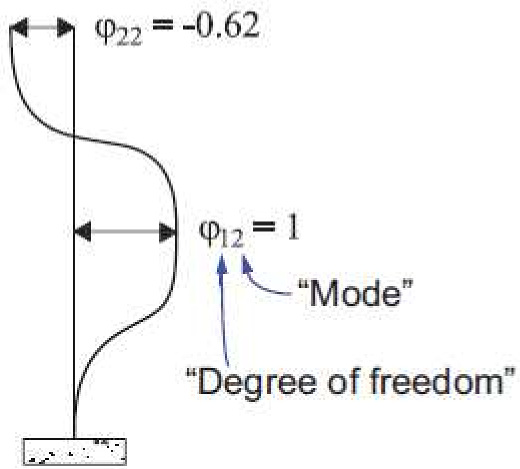


Fundamental mode:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{1+\sqrt{5}}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.618\\ 1\end{bmatrix}$$

- Mode 2



Second mode

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -0.618\end{bmatrix}$$

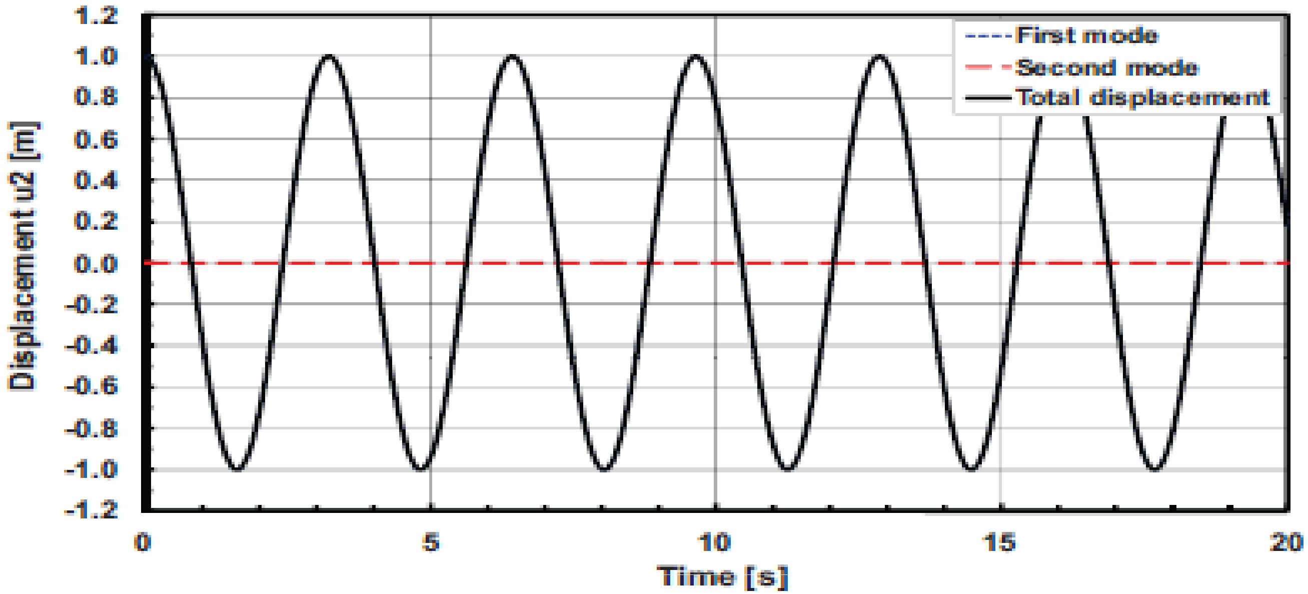
Déplacements en vibrations libres

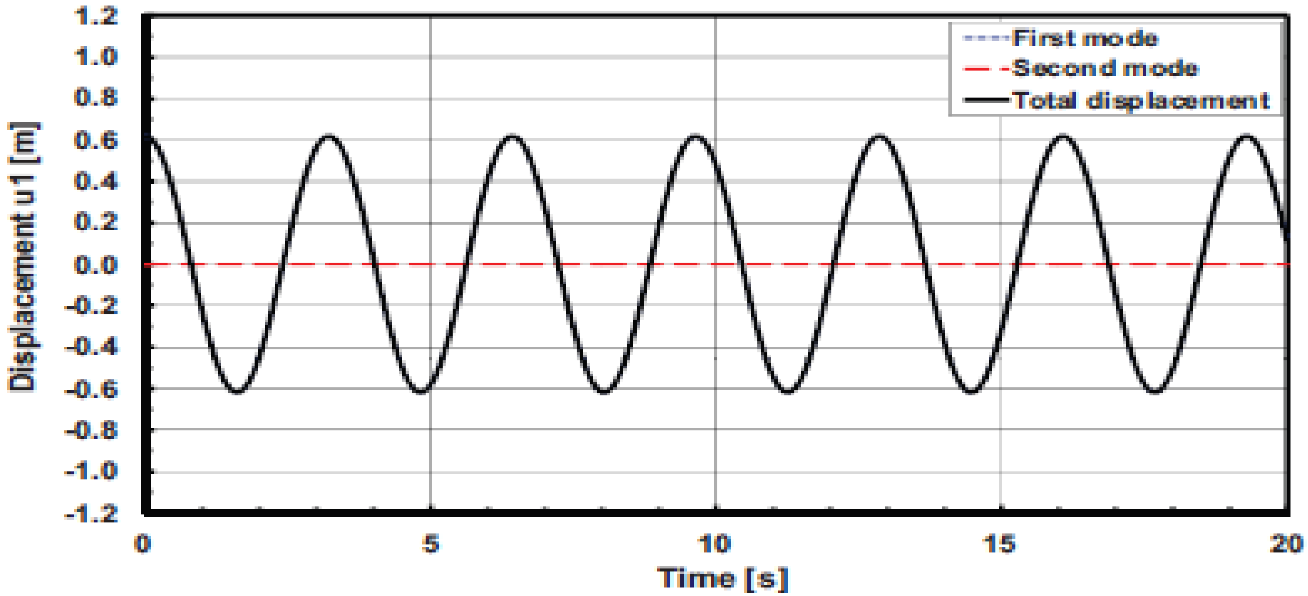
- Conditions initiales $\begin{cases} u_1(0) = u1 \\ u_2(0) = u2 \\ \dot{u}_1(0) = v1 \\ \dot{u}_2(0) = v2 \end{cases}$

$$\boldsymbol{u(t)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_{(i)} \qquad \boldsymbol{u_i}\,(\boldsymbol{t}) = \emptyset_i q_i(\boldsymbol{t}) = \emptyset_i(A_i cos\,(\omega_i \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}_i sin\,(\omega_i \boldsymbol{t}))$$

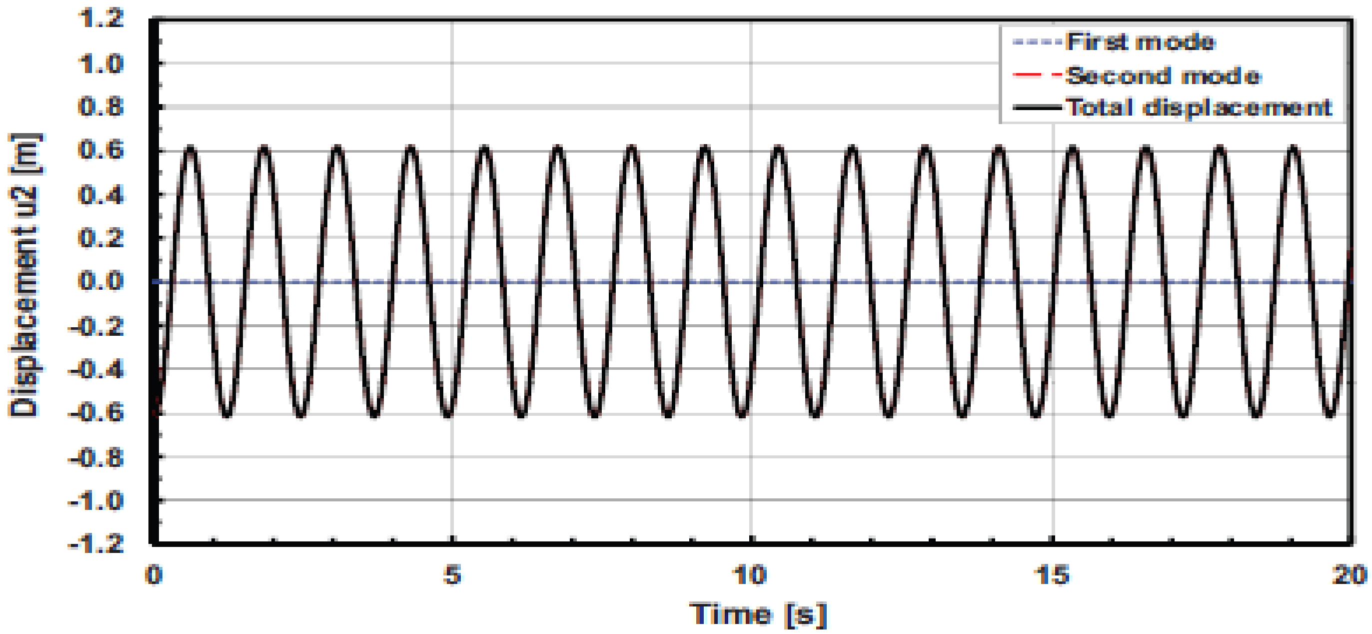
$$q_i(0) = \frac{\phi_i^T M u(0)}{\phi_i^T M \emptyset_i} \qquad \dot{q}_i(0) = \frac{\phi_i^T M \dot{u}(0)}{\phi_i^T M \emptyset_i}$$

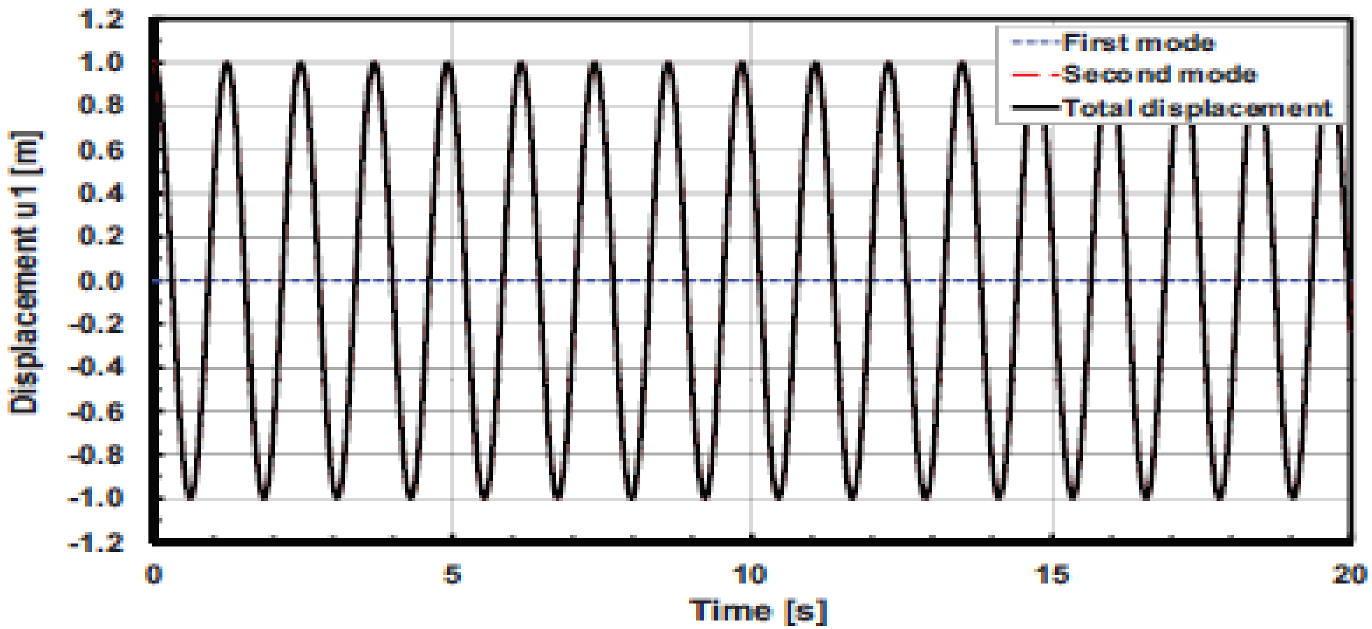
- Case 1: u1 = 0.618, u2 = 1.000, v1 = v2 = 0



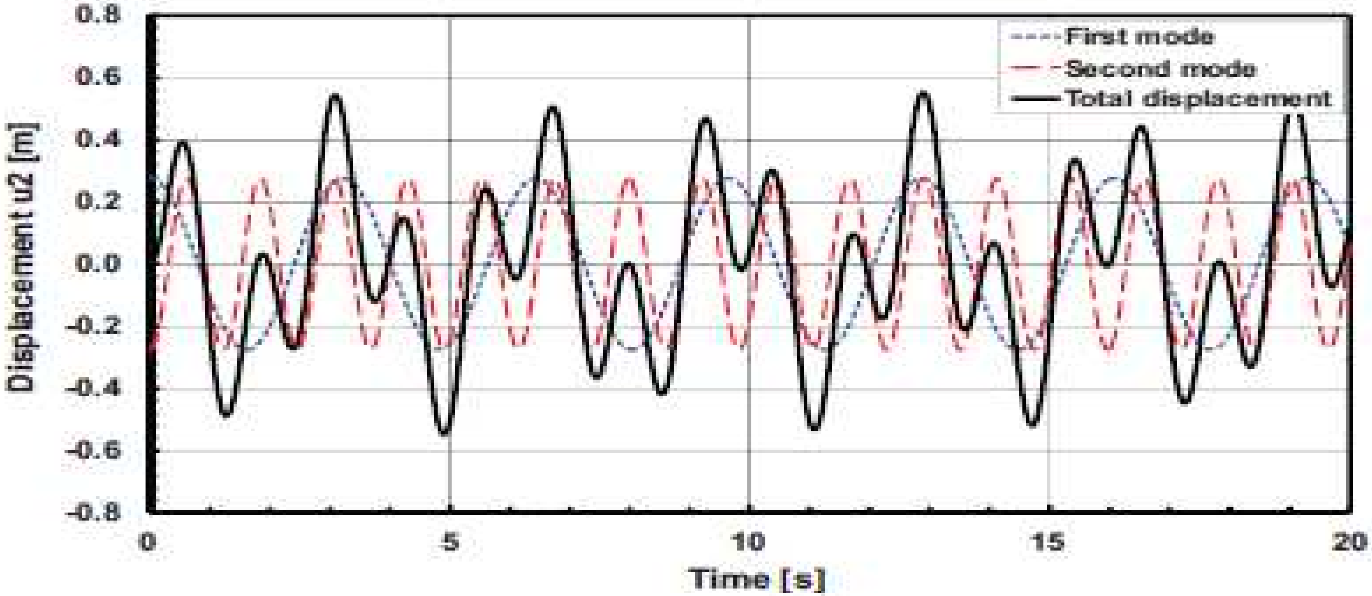


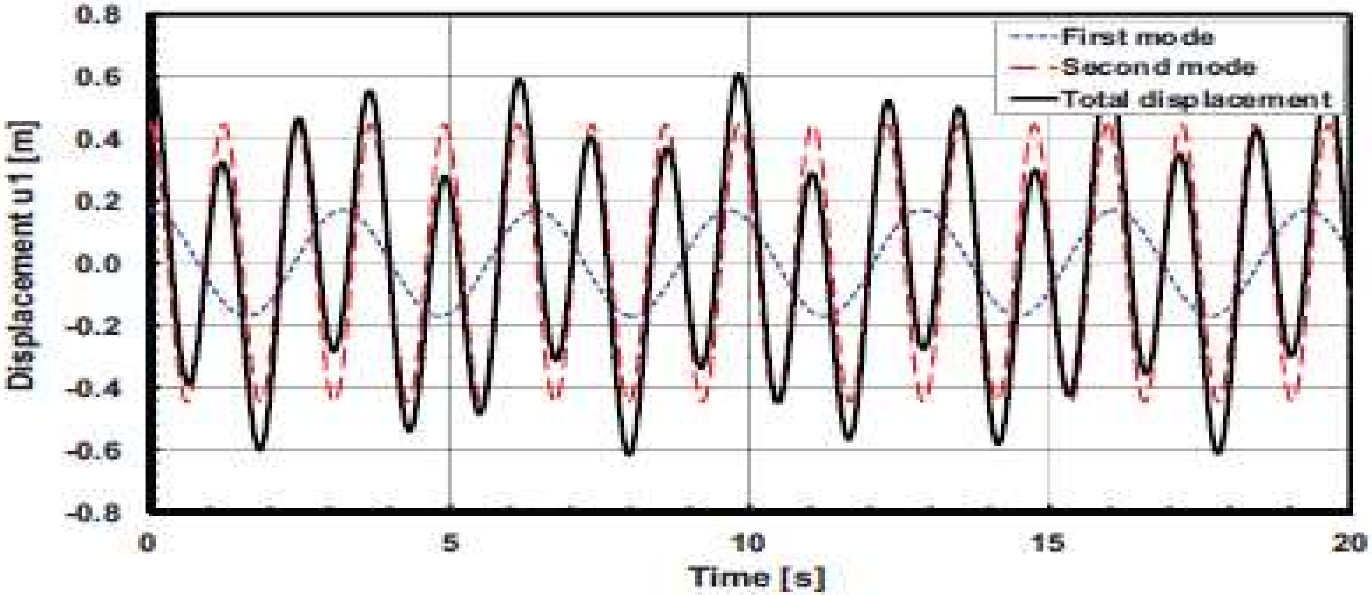
- Case 2: $u1 = 1.000$, $u2 = -0.618$, $v1 = v2 = 0$





• Case 3: u1 = 0.618, u2 = 0.000, v1 = v2 = 0





Conclusion

- Un système à PDDL procède N fréquences propres et N modes de vibration.
- L'analyse modale concerne le calcul des pulsations et modes propres.
- L'analyse en vibration libre (analyse modale) est importante car elle permet de calculer les fréquences propres et de comprendre le comportement vibratoire de la structure.