Dynamique Des Structures 2
(DDS2)

Année universitaire 2019/2020,

Dr BENMANSOUR-MEDDANE Nassima

Dynamique des structures 2

1. Systèmes à Plusieurs Degrés de Libertés (SPDDL) Equations de Mouvements

1. SPDDL - Introduction

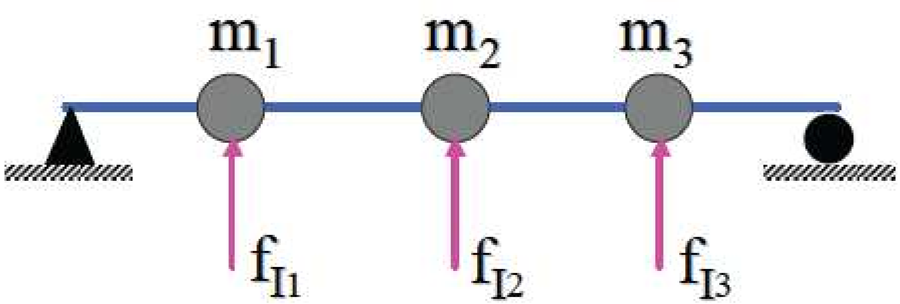
Introduction

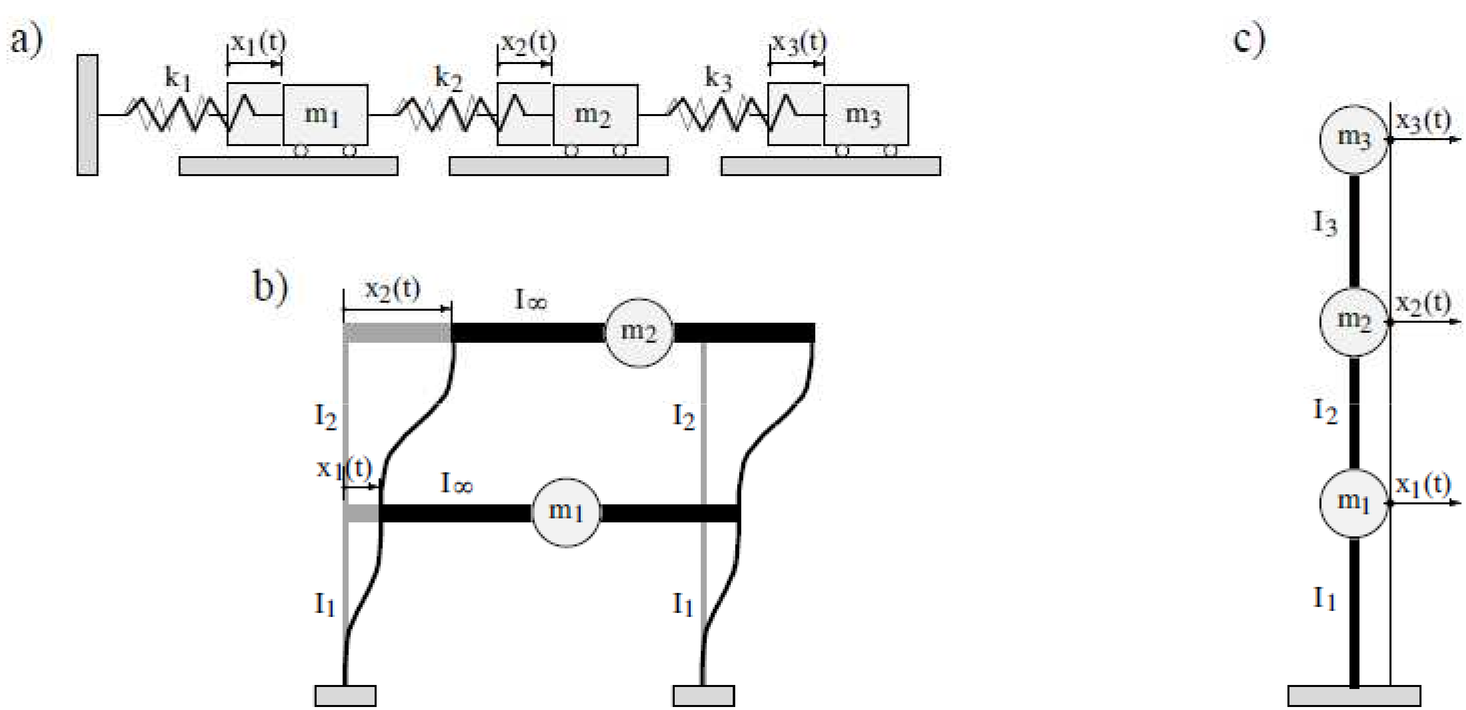
La modélisation par un SSDDL est bonne si:

- le mouvement de la structure réelle est contraint par des conditions aux limites permettant de décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point ou bien une seule déformée.
- Dans le cas contraire cette approximation n’est pas valide.
- Il faut faire une modélisation avec SPDDL.

Introduction

- les degrés de liberté d'une structure peuvent être représentés par le déplacement d'un nombre fini de points,

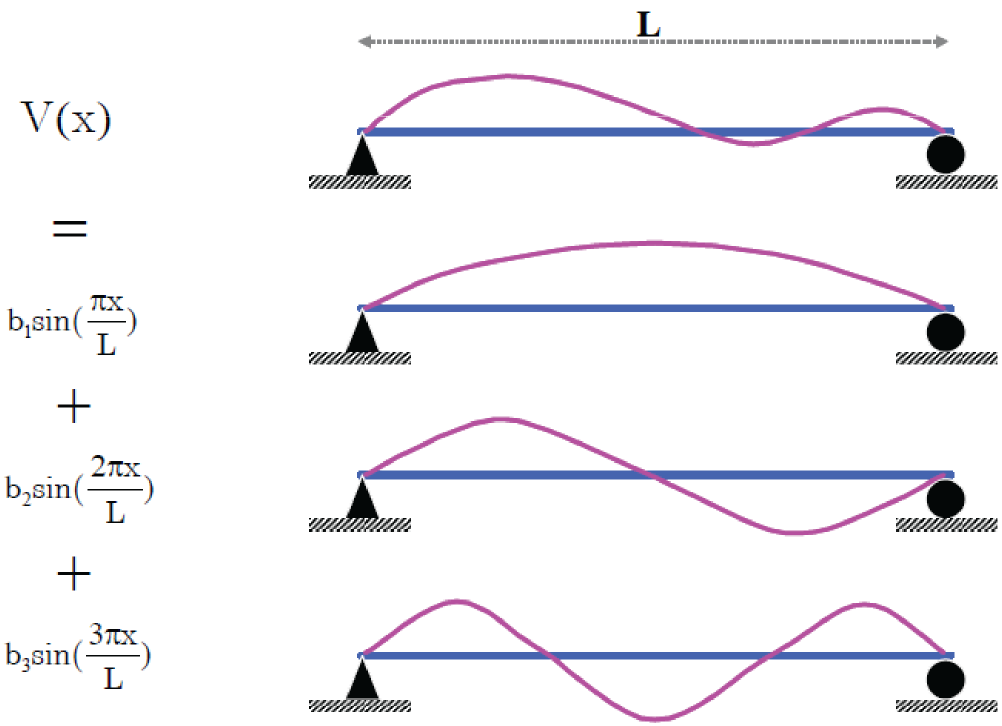




Oscillateurs multiples à trois (ou deux) masses concentrées sans amortissement. Représentation traditionnelle orientée mécanique (a) et représentations orientées structure (b, c).

Introduction

- ou par l'introduction de coordonnées généralisées représentant les amplitudes d'un nombre spécifié de déformées.



Introduction

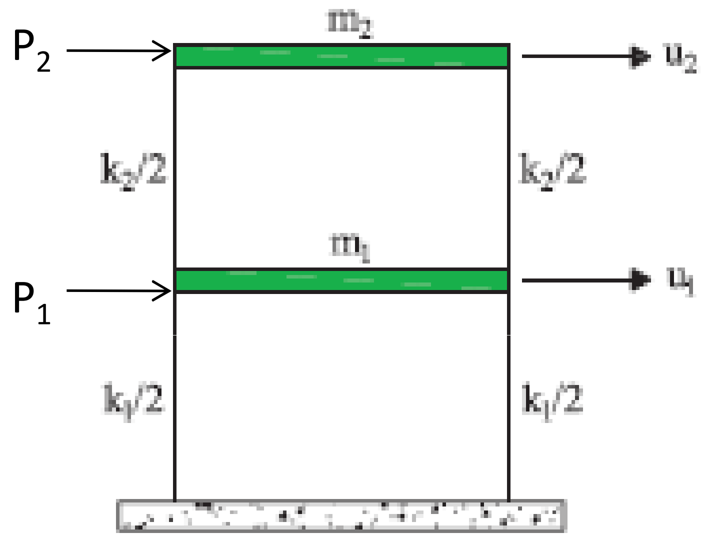
Le bon choix des nœuds et du nombre de composantes de déplacement donne de bon résultats avec peu de degré de liberté.

1. SPDDL – Equation de mouvement

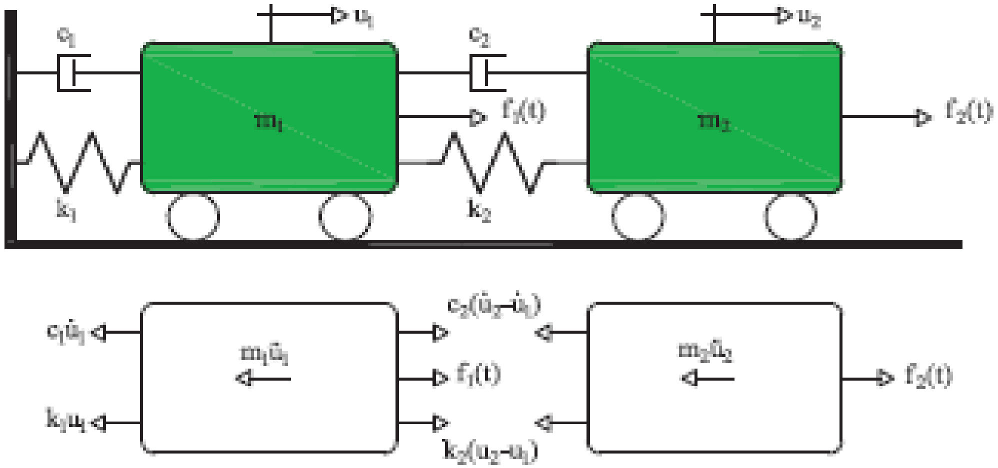
Cas d’un système simple.

Systèmes à deux DDL cas d'un portique

- Les planchers sont infiniment rigides.
- Les déformations axiales des poteaux et des poutres sont négligées dans la rigidité des poteaux.
- Les masses sont concentrées aux planchers.
- Les DDL sont les déplacements (u_1 et u_2) des masses m_1 et m_2



Equation de mouvement



$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 = f_1(t) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) = f_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = f_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + c_2\dot{u}_2 - k_2u_1 + k_2u_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Equation de mouvement

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$$

L'équation de mouvement est un système d'équations différentielles couplées.

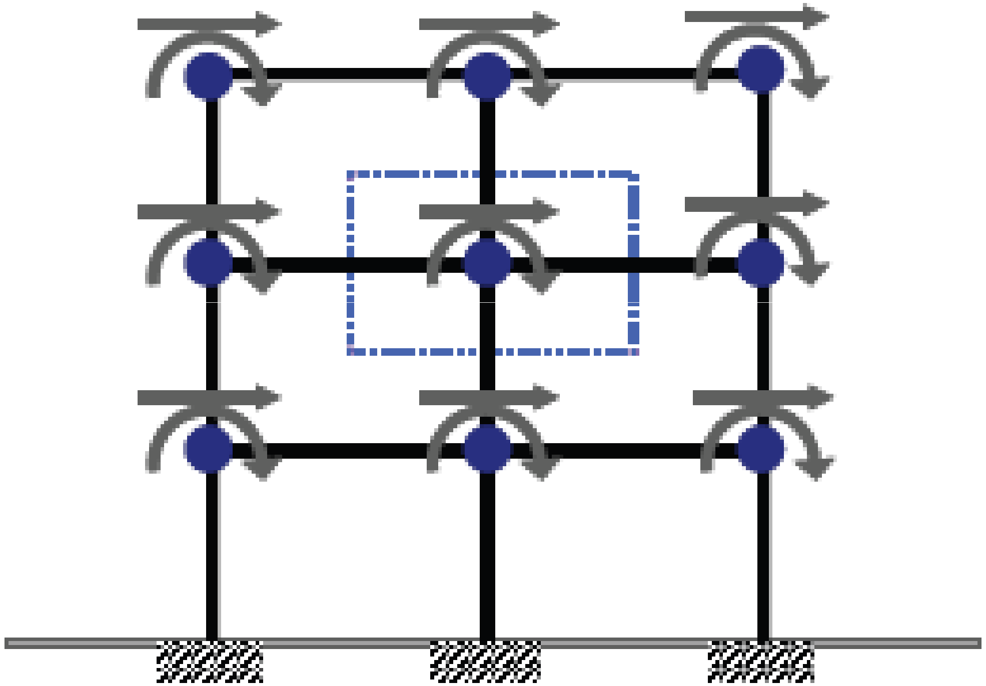
2. SPDDL – Equation de mouvement

Approche générale.

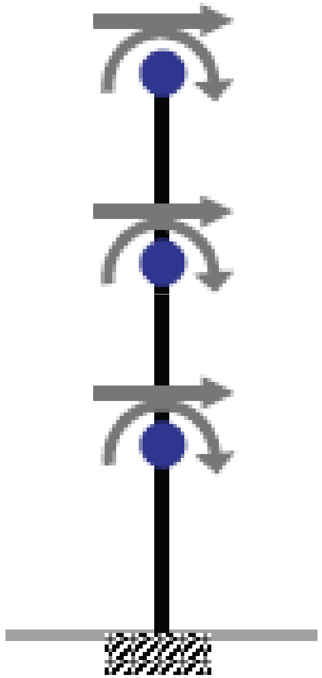
Modèles en masses concentrées

- le nombre de degrés de liberté d'un système (NDDL) est le nombre de composantes du déplacement requises pour exprimer les forces d'inertie.
- Ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés nœuds où sont concentrées les masses.
- Dans le cas le plus général, un nœud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté du système est égal à N=NDDL=6NN.

Exemples



(a)



(b)

Modèle (a)

- les DDL sont constitués par les déplacements des nœuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres, les masses de la structure sont concentrées en ces nœuds. A chaque nœud est affectée la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage.

- Si la raideur axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des nœuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à 2NN=18.

Modèle (b)

- Si les planchers sont infiniment rigides, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points; on aboutit au modèle « brochette »,
- la masse d'un niveau est concentrée en un point.
- la raideur est égale à la somme des raideurs des poteaux d'un niveau.
- Le nombre de degrés de liberté a été réduit dans le cas présent à 2NN=6.

Equation d'équilibre dynamique

L'équation d'équilibre dynamique peut être obtenue par la méthode directe en considérant pour chaque degré de liberté (i) que la résultante des forces est nulle.

Ces forces se composent de :

- forces élastiques $\mathbf{f_{Si}}$
- forces d'amortissement $\mathbf{f_{Di}}$
- forces d'inertie $\mathbf{f_{Ii}}$
- forces appliquées extérieures $\mathbf{p_i(t)}$

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté i par:

$$f_{Si} + f_{Di} + f_{Ii} = p_i$$

Forces élastiques ou de rigidité f_{Si}

Par le principe de superposition **la force élastique f_{Si}** développée suivant le degré de liberté (i) est:

$$f_{Si} = k_{i1}\, u_1 + k_{i2}\, u_2 + \dots \; = \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\, u_j \qquad i=1,2,\dots,N$$

Les coefficients de rigidité k_{ij} représentent la force élastique engendrée suivant le DDL i par <u>un déplacement</u> unitaire imposé au DDL j.

Sous forme matricielle: $$\boxed{\underline{\mathbf{F}}_S = \underline{\mathbf{K}}\, \underline{\mathbf{U}}}$$

<u>K</u> **est la *matrice de rigidité du système.***

<u>U</u> ***est le vecteur des déplacements.***

$\underline{F}_{\underline{S}}$ ***est le vecteur des forces élastiques ou de rigidité.***

Forces d'amortissement f_{Di}

Par le principe de superposition **la force d'amortissement f_{Di}** développée suivant le degré de liberté (i) est:

$$f_{Di} = c_{i1}\,\dot{u}_1 + c_{i2}\,\dot{u}_2 + \dots \; = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\,\dot{u}_j \qquad i=1,2,\dots,N$$

Les coefficients d'amortissement c_{ij} représentent la force d'amortissement engendrée suivant le DDL i par <u>une vitesse</u> unitaire imposée au DDL j.

Sous forme matricielle:

$$\boxed{\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{C}}\,\underline{\dot{\mathbf{U}}}}$$

$\underline{\mathbf{C}}$ est la *matrice d'amortissement du système.*

$\underline{\dot{U}}$ ***est le vecteur des vitesses.***

$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}}$ ***est le vecteur des forces d'amortissement.***

Forces d'inertie f_{Ii}

Par le principe de superposition **la force d'inertie f_{Ii}** développée suivant le degré de liberté (i) est:

$$f_{Ii} = m_{i1}\,\ddot{u}_1 + m_{i2}\,\ddot{u}_2 + \ldots = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\,\ddot{u}_j \qquad i=1,2,\ldots,N$$

Les coefficients de masse m_{ij} représentent la force d'inertie engendrée suivant le DDL i par <u>une accélération</u> unitaire imposée au DDL j.

Sous forme matricielle: $$\underline{F_I} = \underline{M}\,\underline{\ddot{U}}$$

<u>M</u> **est la** ***matrice masse du système.***

$\underline{\ddot{U}}$ est le vecteur des accélérations.

$\underline{F_I}$ ***est le vecteur des forces d'inertie.***

Equation d’équilibre dynamique

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s’exprime, à l'aide des coefficients d'influence (de rigidité k_{ij} , d’amortissement c_{ij} ou d’inertie m_{ij}) traduisant la dépendance de la force en un point à la valeur du mouvement de tous les autres points.

L'équilibre dynamique

$$\boxed{\underline{\mathbf{M}}\,\underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{C}}\,\underline{\dot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{t})}$$

Les matrices $\underline{M}$, $\underline{C}$ et $\underline{K}$ ont pour dimensions NxN.

Les vecteurs $\underline{U}$, $\underline{\dot{U}}$, $\underline{\ddot{U}}$ et P(t) ont pour dimensions N.

- **Caractéristiques élastiques**
  MATRICE DE RIGIDITE $\underline{K}$

Développement de la Matrice de rigidité

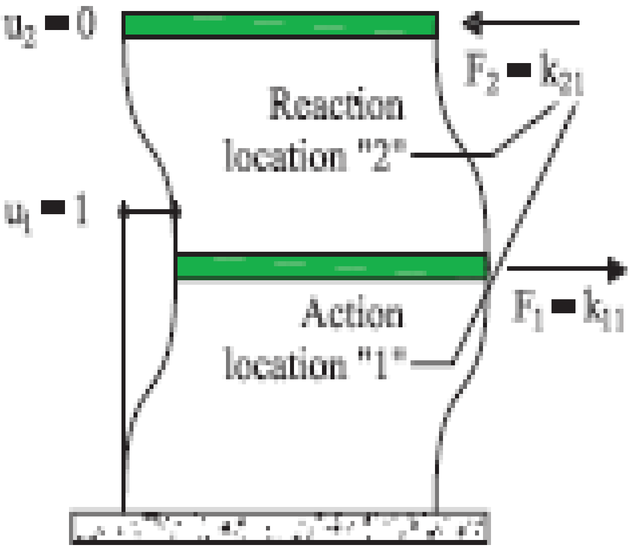
- Méthode directe ou de rigidité
- Méthode de flexibilité.
- Méthode des éléments finis

Développement de la Matrice de rigidité

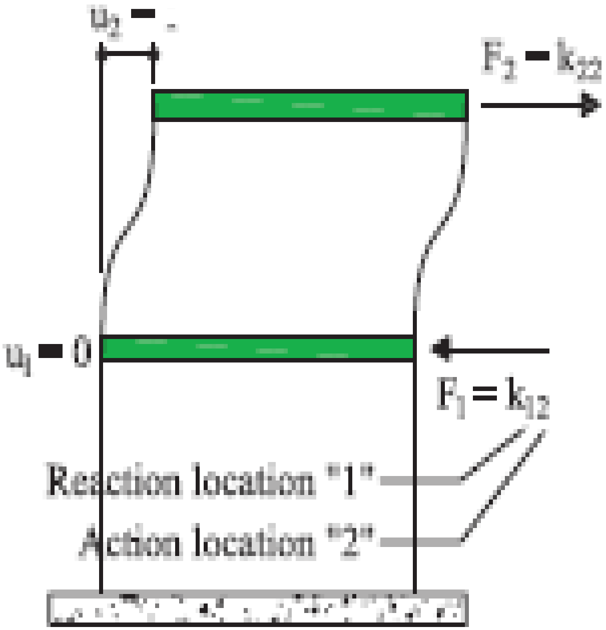
- <u>Méthode directe:</u> Par la définition des K_{ij}

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

<u>Exemple:</u>



Déplacement u_1=1



Déplacement u_2=1

Développement de la Matrice de rigidité

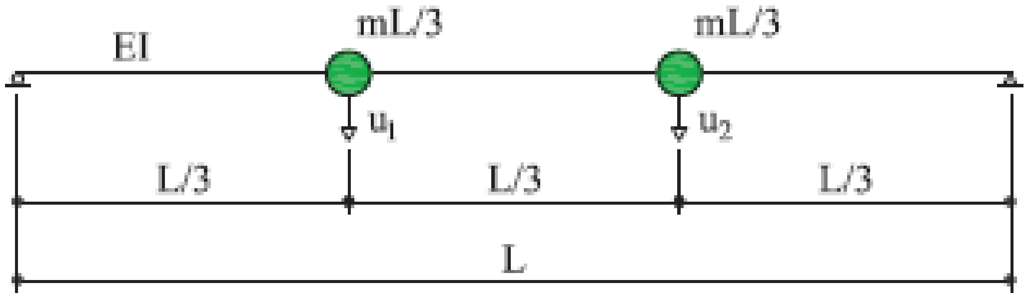
- Méthode de flexibilité:

En statique $\underline{P}_{st}=\underline{K}\,.\,\underline{U} \Longrightarrow \underline{U} = \underline{K}^{-1}\,.\,\underline{P}_{st}$

$\underline{f}=\underline{K}^{-1}$ Matrice de flexibilité

f_{ij} : Coefficients de flexibilité définit par le déplacement produit au DDL i par une force unitaire appliquée au DDL j lorsque les autres DDL sont bloqués.

Méthode de flexibilité: Exemple



$$f_{11} = \frac{4}{243} \cdot \frac{L^3}{EI}$$

$$f_{12} = \frac{7}{486} \cdot \frac{L^3}{EI}$$

$$f_{21} = \frac{7}{486} \cdot \frac{L^3}{EI}$$

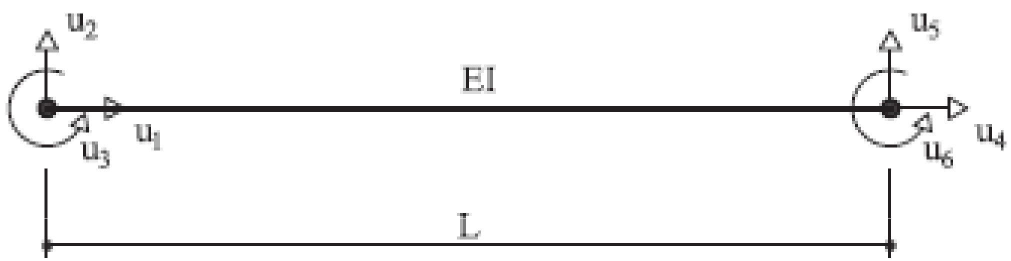
$$f_{22} = \frac{4}{243} \cdot \frac{L^3}{EI}$$

$$f = \frac{L^3}{486EI} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{162}{5} \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Méthode des éléments finis

La matrice de rigidité d'un élément poutre est:



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

Propriétés de la matrice $\underline{K}$

$\underline{K}$ définie positive

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure sous l'action d'un champ de forces P appliqué aux degrés de liberté du système est:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i\, u_i = \frac{1}{2}\underline{U}^T\,\underline{P}$$

$$\underline{P} = \underline{K}.\underline{U} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}\underline{U}^T\,\underline{K}\,\underline{U}$$

Cette quantité étant positive (V>0), **K est *définie positive.***

Elle possède donc toujours une inverse, c'est la matrice de flexibilité.

Propriétés de la matrice $\underline{K}$

$\underline{K}$ **Symétrique**

Théorème de Bétti:

Soit deux champs de forces **P_1 et P_2 induisant des champs de déplacements U_1 et U_2, alors le travail de P_1 dans le champ U_2 est égal au travail de P_2 dans le champ U_1.**

$$\underline{P}_1^T \underline{U}_2 = \underline{P}_2^T \underline{U}_1$$

$$\underline{P}_i = \underline{K}\,\underline{U}_i$$

$\Rightarrow$

$$\underline{P}_2^T \underline{U}_1 = [\underline{K}\,\underline{U}_2]^T \underline{U}_1 = \underline{U}_2^T \underline{K}^T \underline{U}_1$$

$$\underline{P}_1^T \underline{U}_2 = \left[\underline{P}_1^T \underline{U}_2\right]^T = \underline{U}_2^T \underline{P}_1 = \underline{U}_2^T \underline{K}\,\underline{U}_1$$

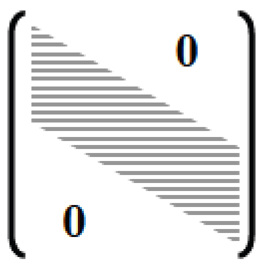
$$\boxed{\underline{K}^T = \underline{K}}$$

Propriétés de la matrice <u>K</u>

Structure de <u>K</u>

- <u>K</u> **n’est pas une matrice pleine dans laquelle tous les coefficients sont non nuls. Car le couplage entre nœuds n'existe que pour les nœuds adjacents. Il en résulte qu'un grand nombre de termes sont nuls :**

<u>K</u> a une structure bande

$\underline{\mathbf{K}} =$ 

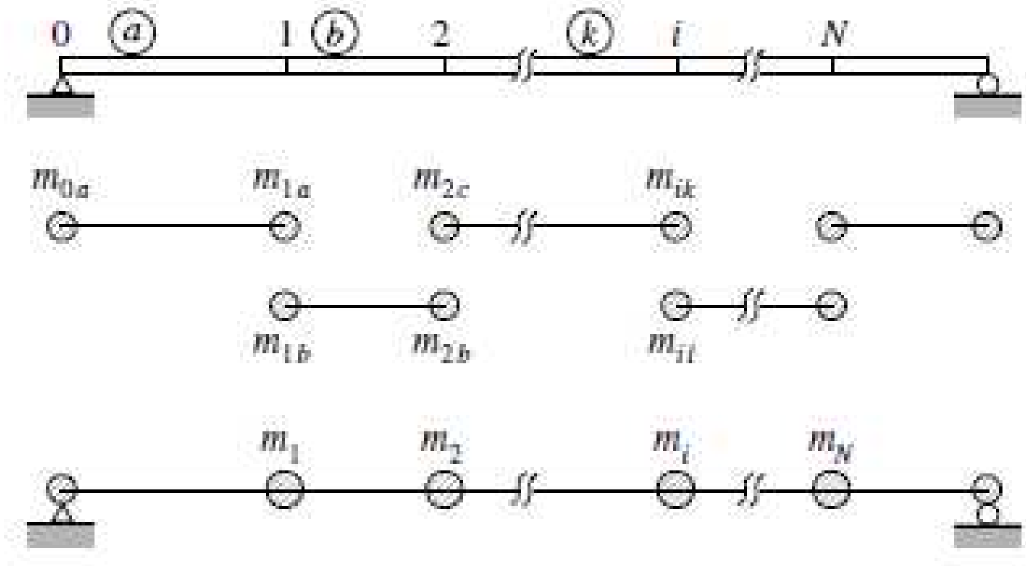
- **Caractéristiques massiques**
  MATRICE MASSE M

Masses concentrées

- La modélisation par concentration des masses suppose que la masse répartie le long de l'élément est **concentrée en nœuds.**

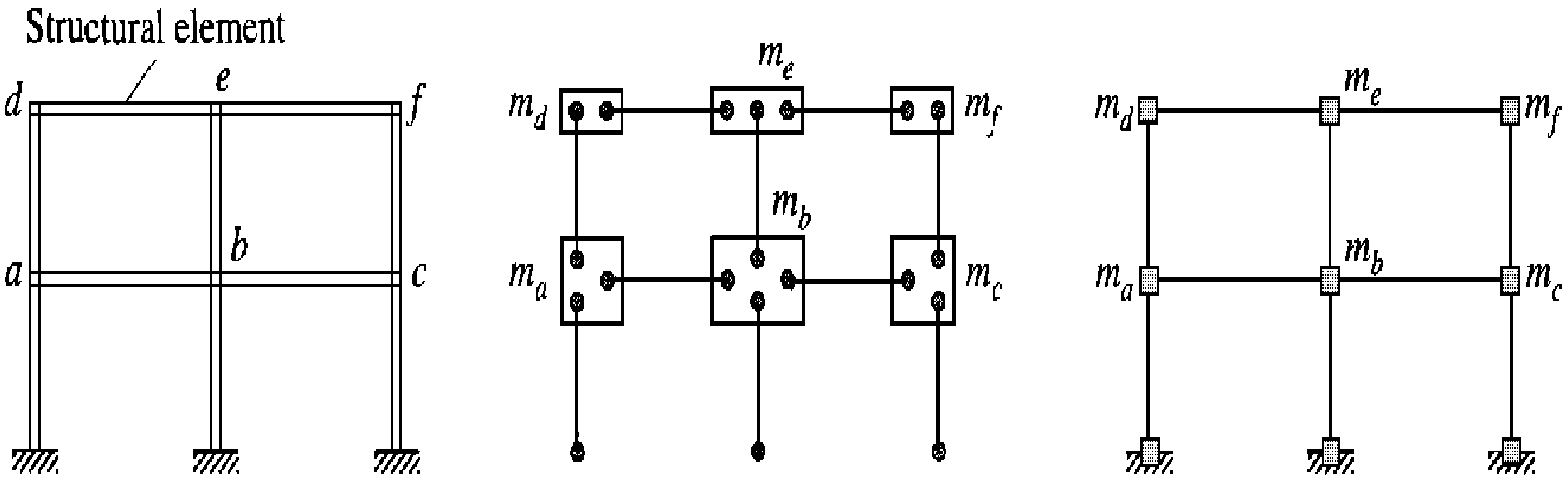
- Cette modélisation n'introduit aucun couplage entre les degrés de liberté , la matrice masse a donc une **structure diagonale** qui présente beaucoup d'avantages pour le traitement numérique.
- L'évaluation des masses concentrées obéit aux règles de la statique.

Masses concentrées
1.les DDLs de déplacements



La masse est une grandeur scalaire donc elle est la même dans les trois directions : x, y et z

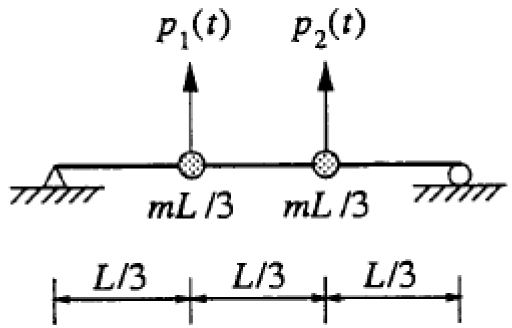
Masses concentrées
1.les DDLs de déplacements

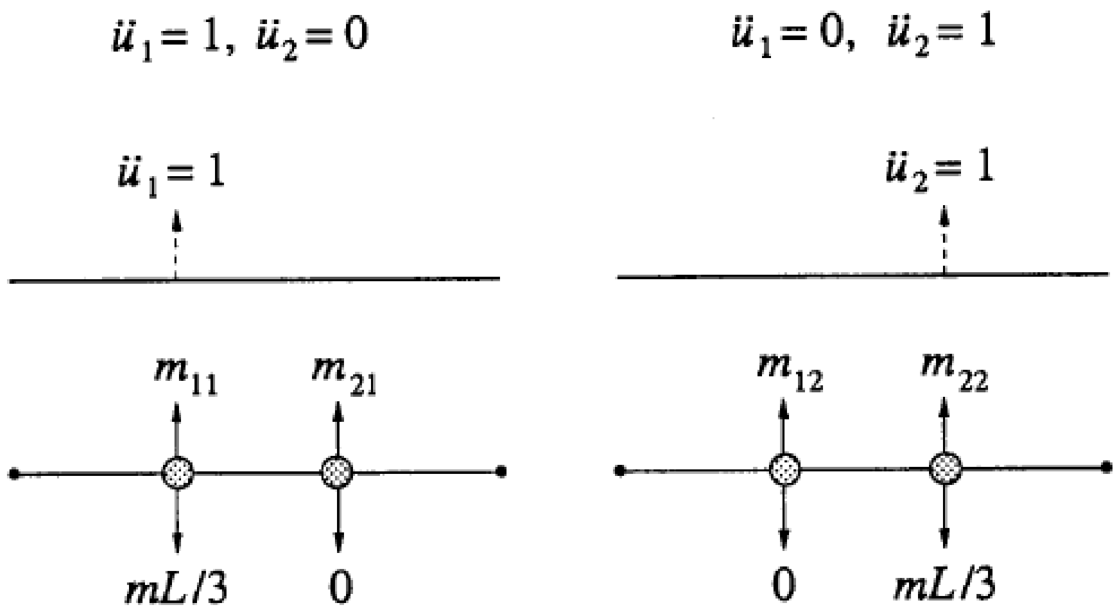


(a) (b) (c)

La masse est une grandeur scalaire donc elle est la même dans les trois directions : x, y et z

Matrice Masse
Exemple 1





$$\mathbf{m} = \frac{mL}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

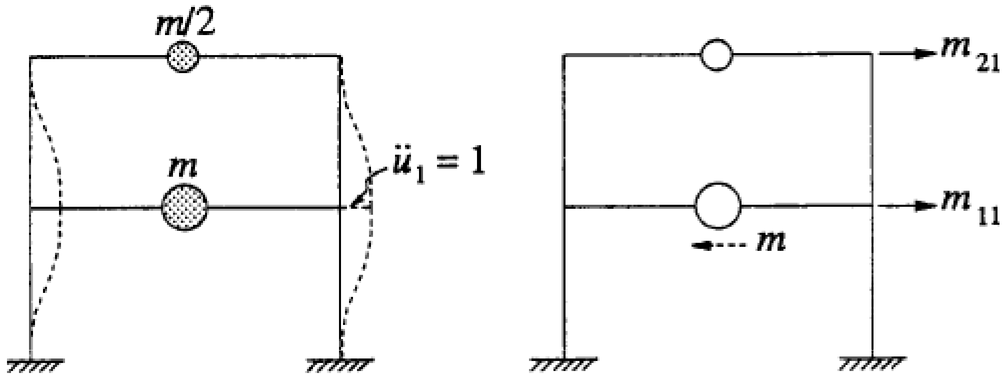
$$m_{11} = \frac{mL}{3} \qquad m_{12} = 0 \qquad m_{22} = \frac{mL}{3} \qquad m_{21} = 0$$

Matrice Masse

Exemple 2

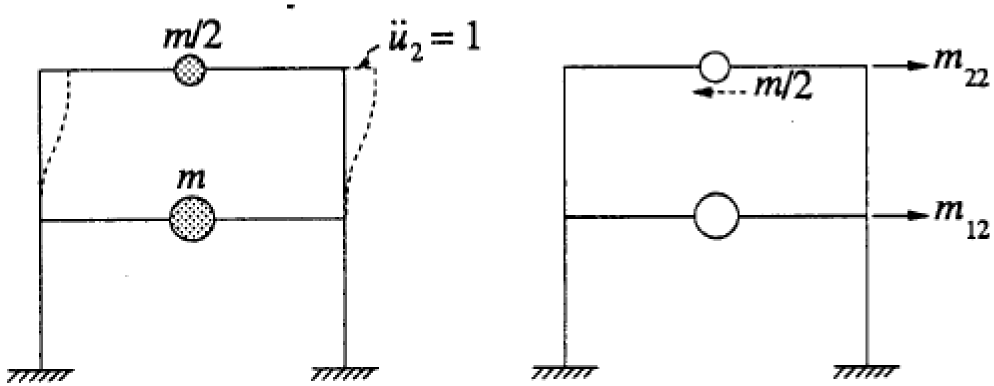
$$\ddot{u}_1 = 1,\ \ddot{u}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$m_{11} = m \qquad m_{21} = 0$$



$$\ddot{u}_2 = 1,\ \ddot{u}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$m_{12} = 0 \qquad m_{22} = \frac{m}{2}$$

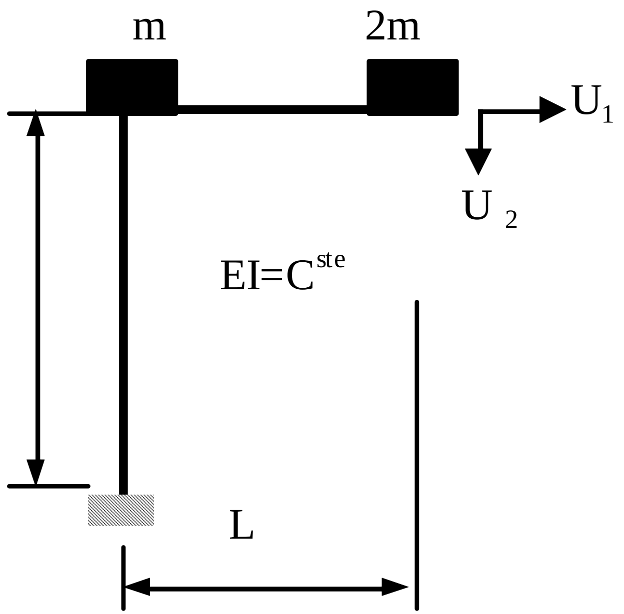


$$\boxed{\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}}$$

Matrice Masse

Exemple 3

$$M = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

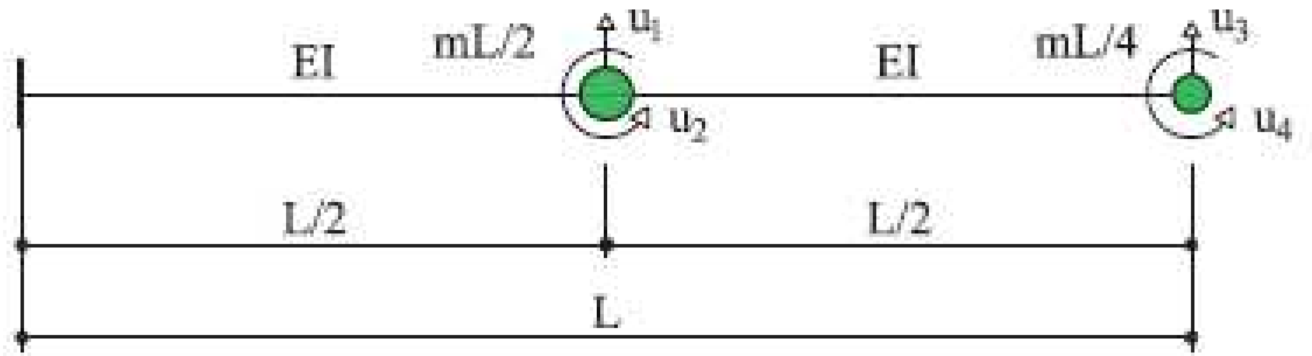


Masses concentrées

2.les DDLs de rotation

- La première modélisation suppose une inertie rotationnelle nulle en partant de l'idée que la masse est concentrée en un point.

Exemple
Console de masse repartie m

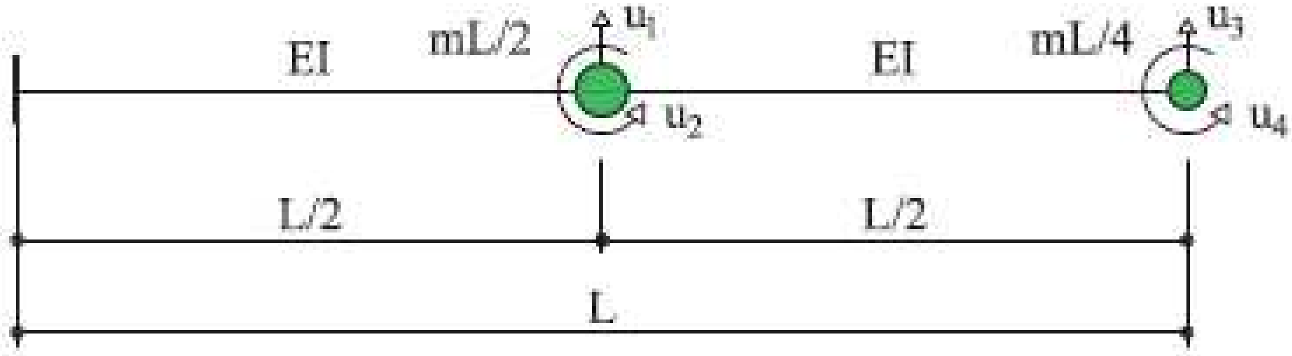


$$M = \begin{bmatrix} mL/2 & & & \\ & 0 & & \\ & & mL/4 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Masses concentrées
les DDLs de rotation

- La deuxième modélisation part de l'idée qu'en réalité la masse est répartie donc l'inertie rotationnelle I_0 n'est pas nulle.
- Pour l'évaluer on divise les tronçons entre deux nœuds comme dans le cas des masses concentrées.

Exemple
Console de masse repartie m.



$$M = \begin{bmatrix} mL/2 & & & \\ & I_{01} & & \\ & & mL/4 & \\ & & & I_{02} \end{bmatrix}$$

$$I_{01} = \frac{mL^3}{96} \qquad I_{02} = \frac{mL^3}{192}$$

Modélisation des planchers par diphragms

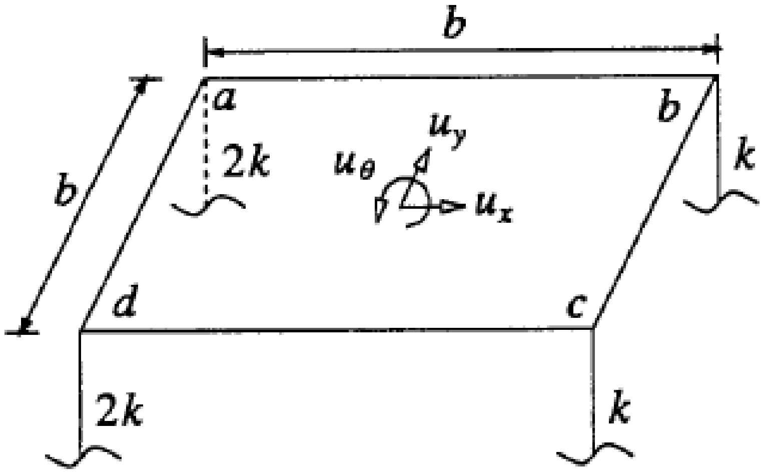
Diaphragm:

- On l’utilise dans le cas des planchers infiniment rigides.
- Rigide en plan et flexible suivant la direction verticale.
- On a 3DDL :les deux déplacements en plan et la rotation autour de l’axe vertical.

Exemple

La masse surfacique: $\bar{m}$

La masse concentrée est donc : $m = \bar{m} b^2$



$$m_{xx} = m$$

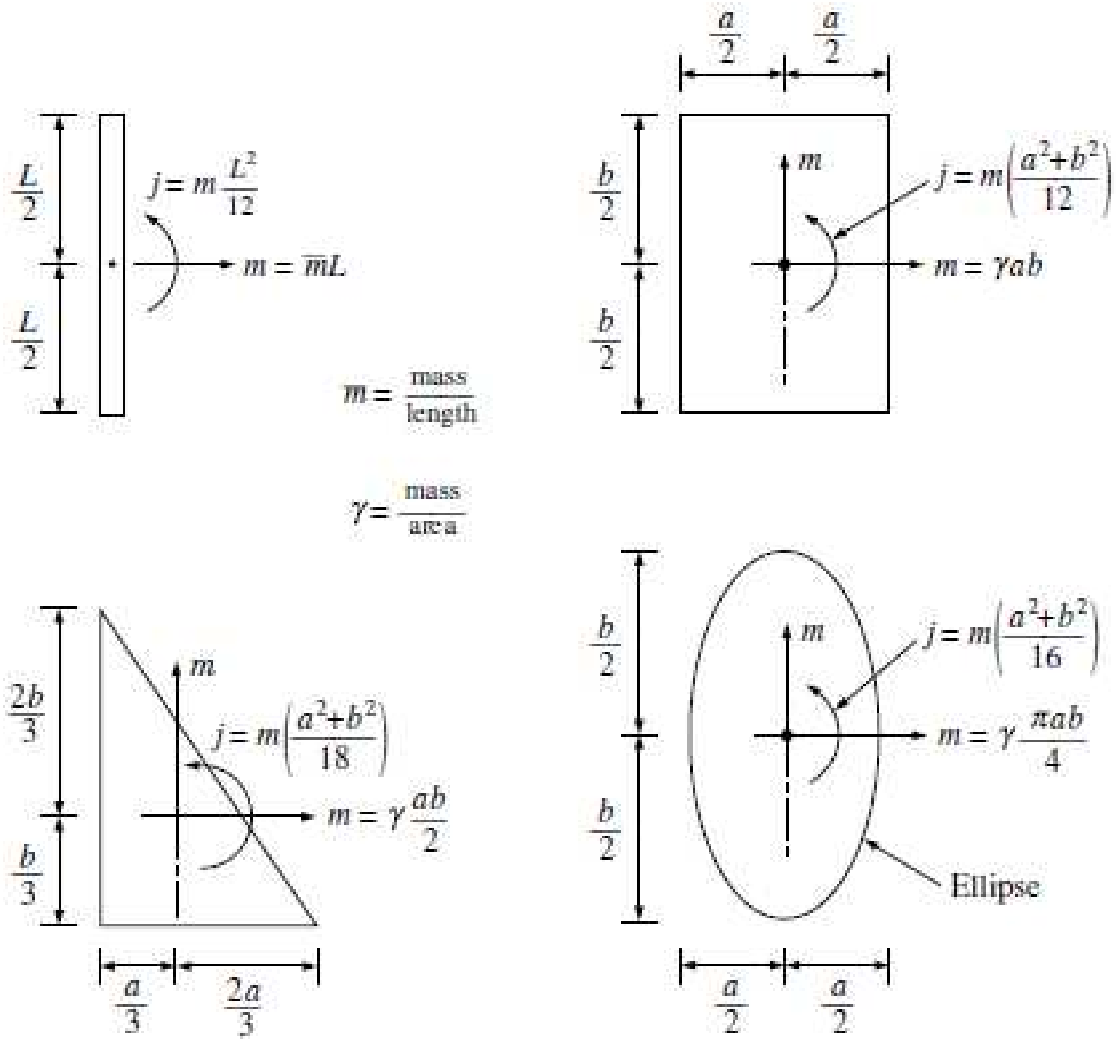
$$m_{yy} = m$$

$$m_{\theta\theta} = I_O$$

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & r^2 \end{bmatrix}$$

$$r^2 = \frac{I_O}{m} = \frac{1}{m} m \frac{b^2 + b^2}{12} = \frac{b^2}{6}$$

Rappel : L’inertie massique de quelques sections.

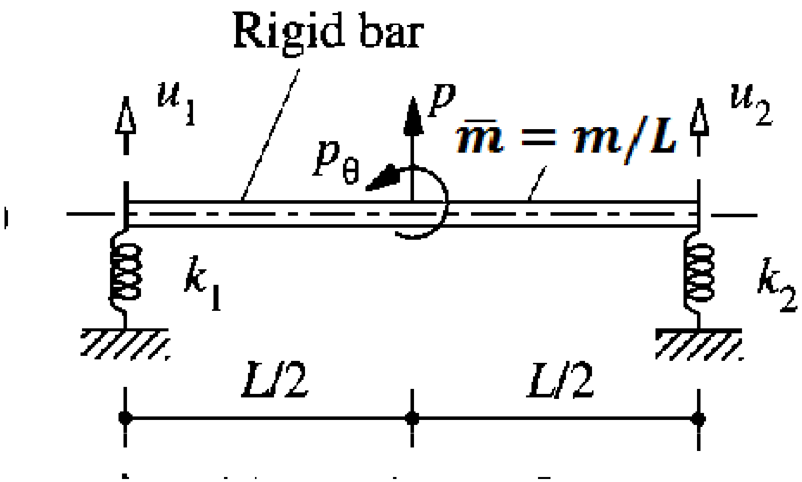


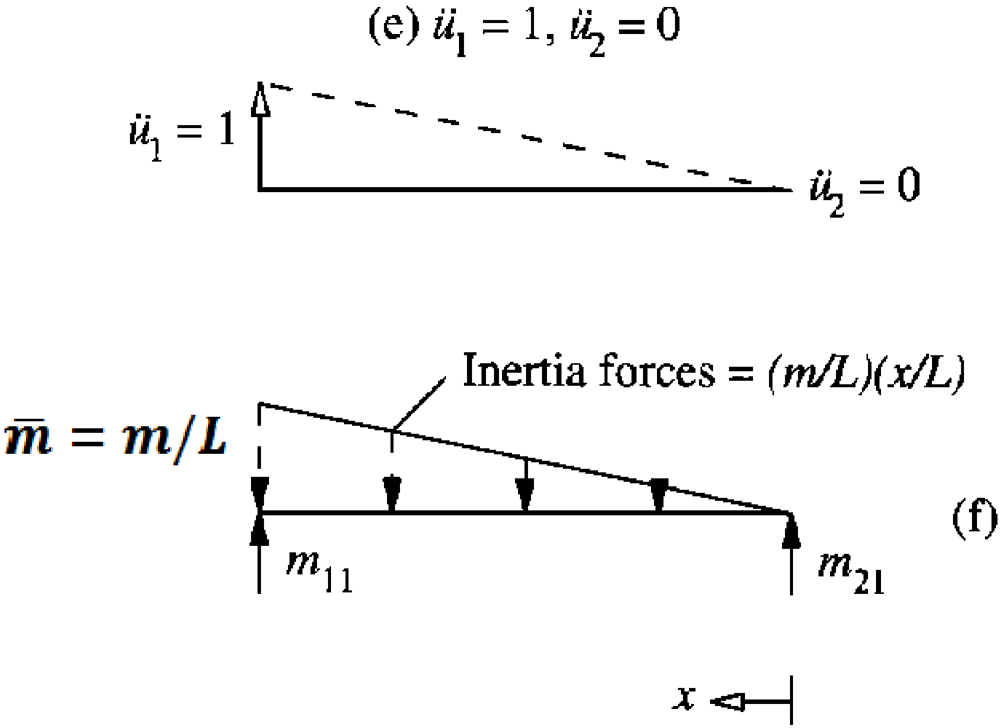
Masses cohérentes

- La matrice masse peut être définie à partir de la définition des **coefficients m_{ij}.**

Exemple:

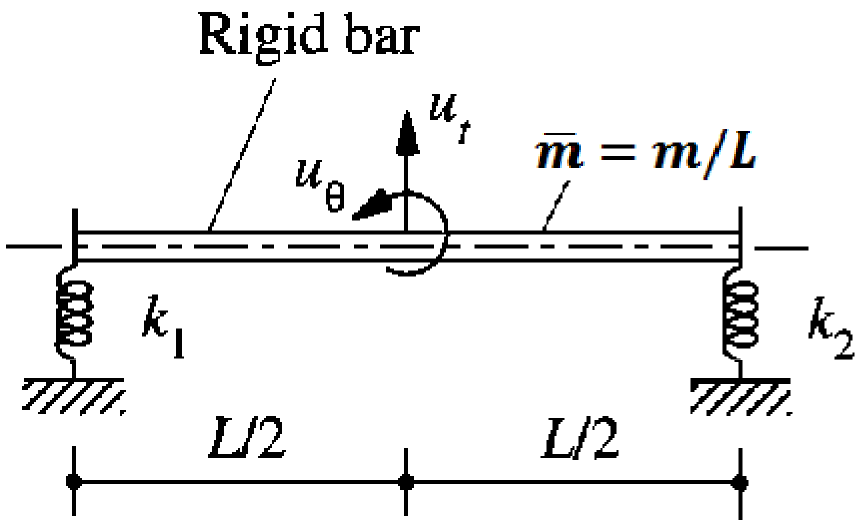
Barre rigide de masse m

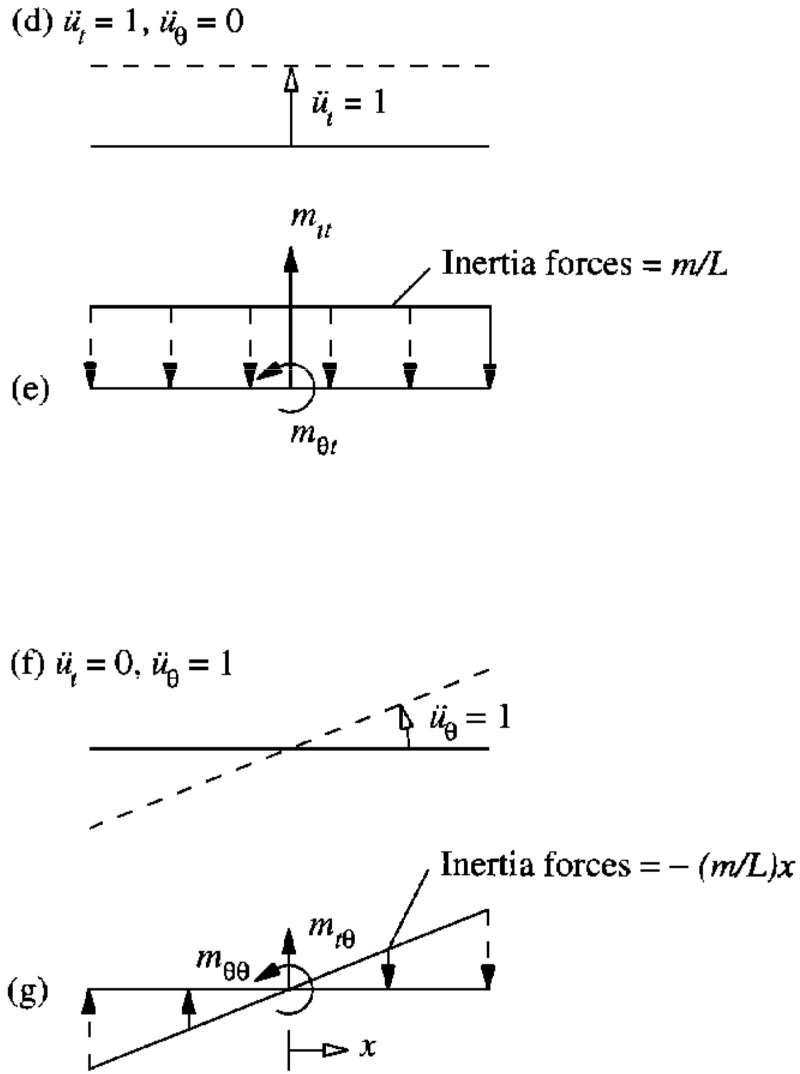




$$M = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple





$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\dfrac{L^2}{12} \end{bmatrix}$$

Caractéristiques d'amortissement

Matrice d'amortissement $\underline{C}$

- Les caractéristiques d’amortissement sont difficiles à évaluer.

- En pratique l’amortissement est traité autrement on va le voir par la suite.

Forces extérieures:

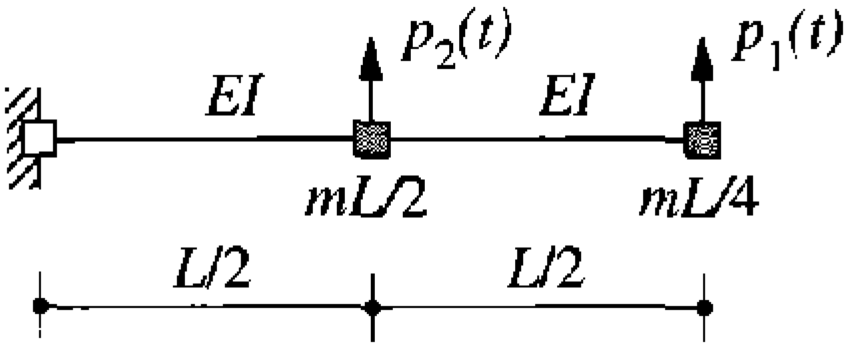
Vecteur <u>P(t)</u>

Forces extérieures

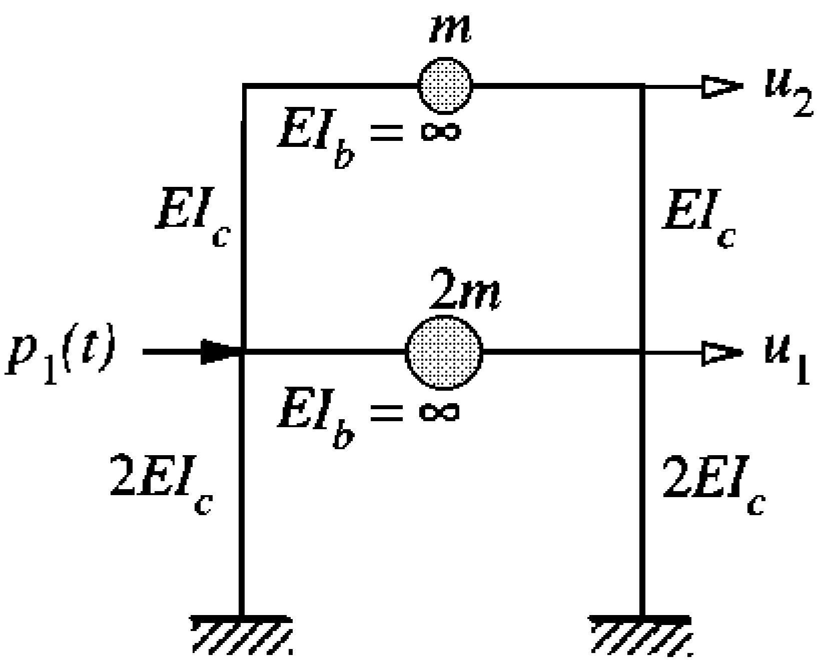
1. Appliquées aux DDL

Le vecteur force extérieure est constitué des efforts appliqués aux DDL.

Exemples



$$p(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$



$$p(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

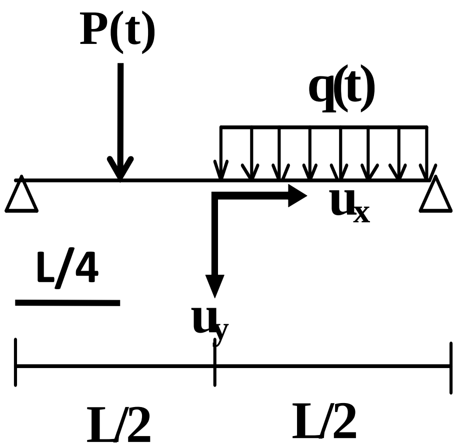
Forces extérieures

2. Non appliquées aux DDL

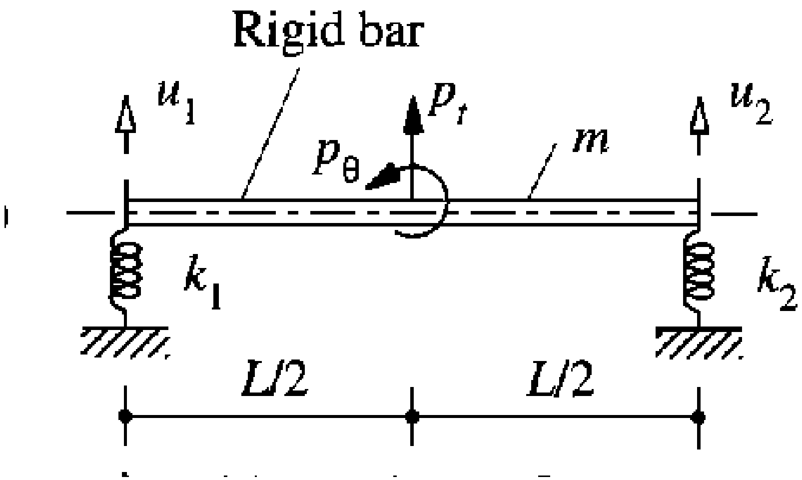
On utilise les règles de la statique pour évaluer les forces nodales équivalentes.

On suppose que le chargement qui se trouve entre deux nœuds est appliqué à la structure au moyen d'une poutre simplement appuyée.

Exemple



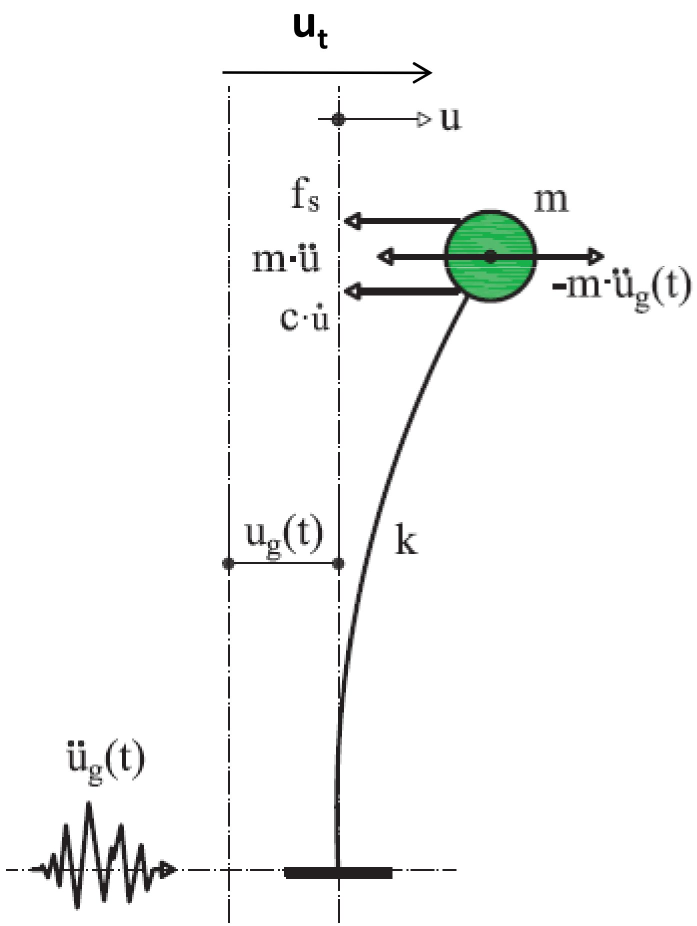
$$p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{P(t)}{2} + \dfrac{q(t)L}{4} \end{bmatrix}$$



$$p(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{P_t}{2} - \dfrac{P_\theta}{L} \\ \dfrac{P_t}{2} + \dfrac{P_\theta}{L} \end{bmatrix}$$

Excitation du support

Rappel: **Cas D'1SSDDL**

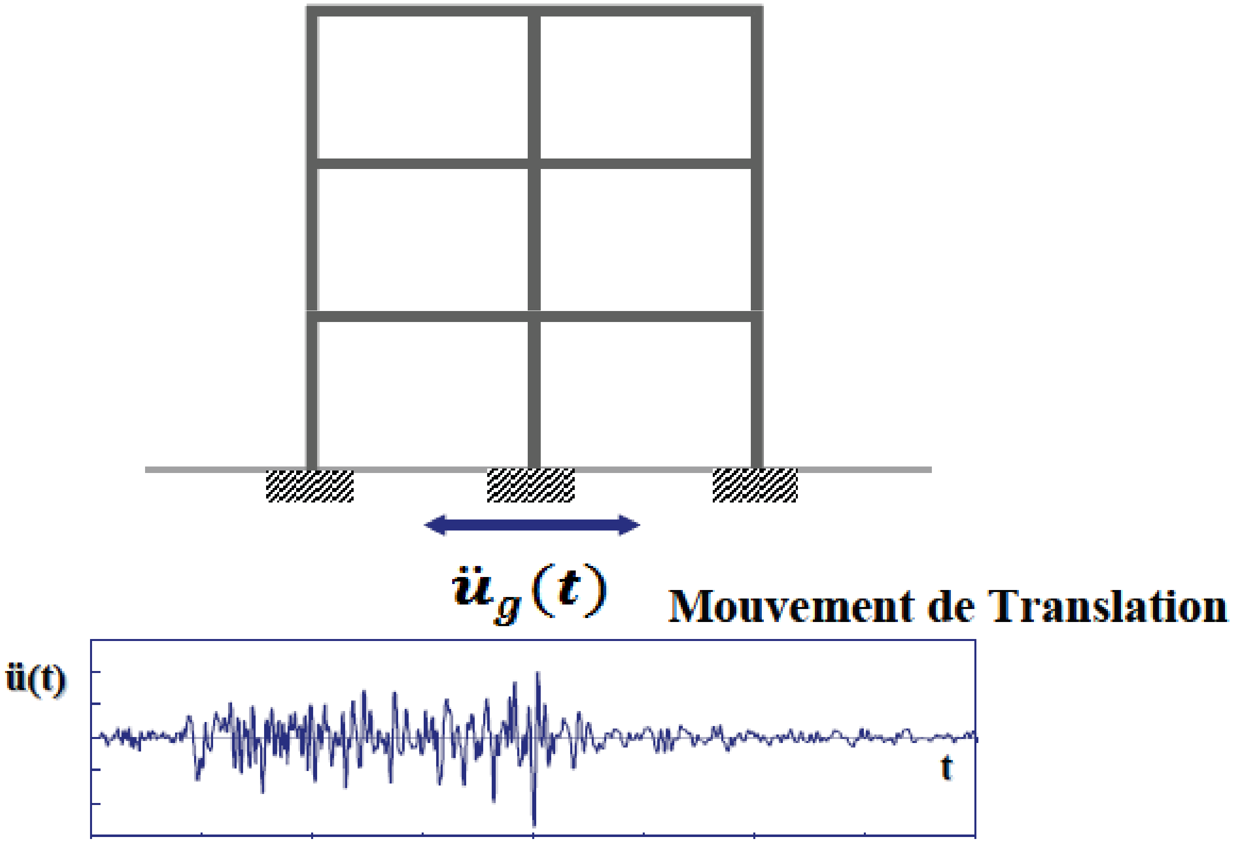


$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g$$

Le déplacement du support est équivalent à un chargement effectif

$$\boldsymbol{Peff(t) = -m\ddot{u}_g(t)}$$

Excitation du support: SPDDL

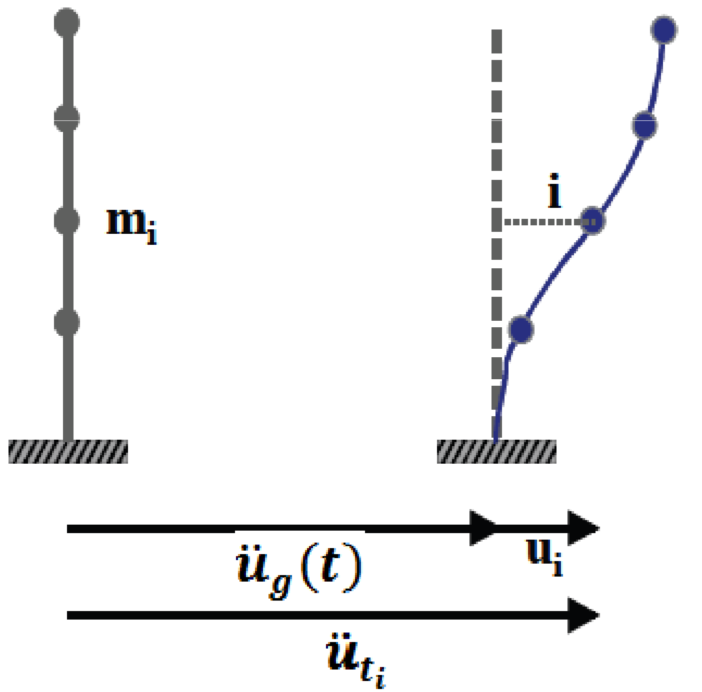


Excitation du support: SPDDL

$$M\ddot{u}_t(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0$$

u(t): vecteur déplacements
<u>Cas particulier:</u>
1DDL par nœud : déplacement horizontal

$$\ddot{u}_{t_i}(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$$



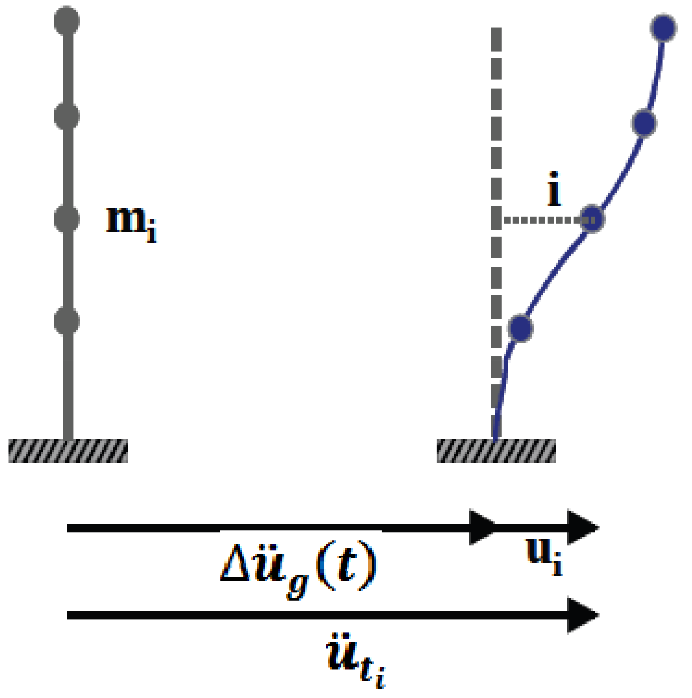
$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_{t_1}(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_{t_j}(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_{t_N}(t) \end{pmatrix} = \ddot{u}_g(t) + \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_j(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_N(t) \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = -M\ddot{u}_g(t)$$

$$Peff(t) = -M\ddot{u}_g(t)$$

Excitation du support: SPDDL

$$M\ddot{u}_t(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0$$



u(t): vecteur déplacements
Cas général:
6DDL par nœud i :
-Déplacements u_x, u_y et u_z
-Rotations θ_x, θ_y et θ_z

$$\ddot{u}_{t_i}(t) = \Delta\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$$

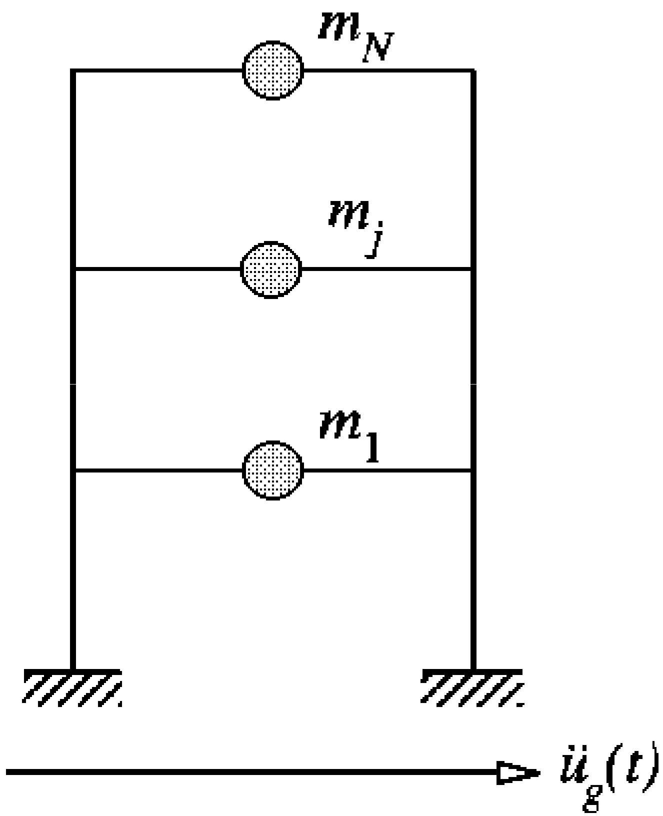
$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_{t_1}(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_{t_j}(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_{t_N}(t) \end{pmatrix} = \Delta\ddot{u}_g(t) + \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_j(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_N(t) \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = -M\Delta\ddot{u}_g(t)$$

$$Peff(t) = -M\Delta\ddot{u}_g(t)$$

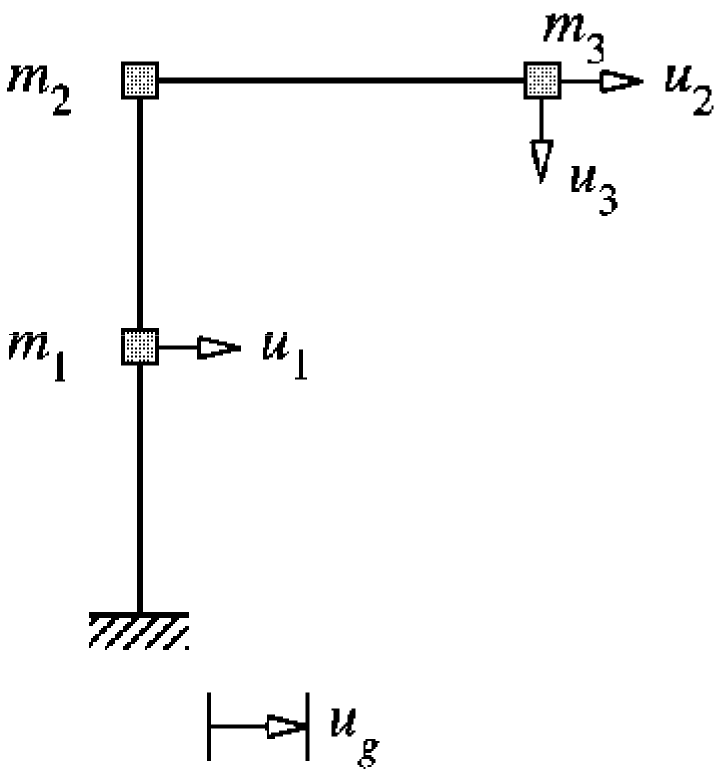
Δ: est le vecteur donnant la direction de la sollicitation.
Le vecteur Δ a pour composantes 1 dans la direction du mouvement de translation, 0 pour les autres degrés de liberté.

Exemple 1



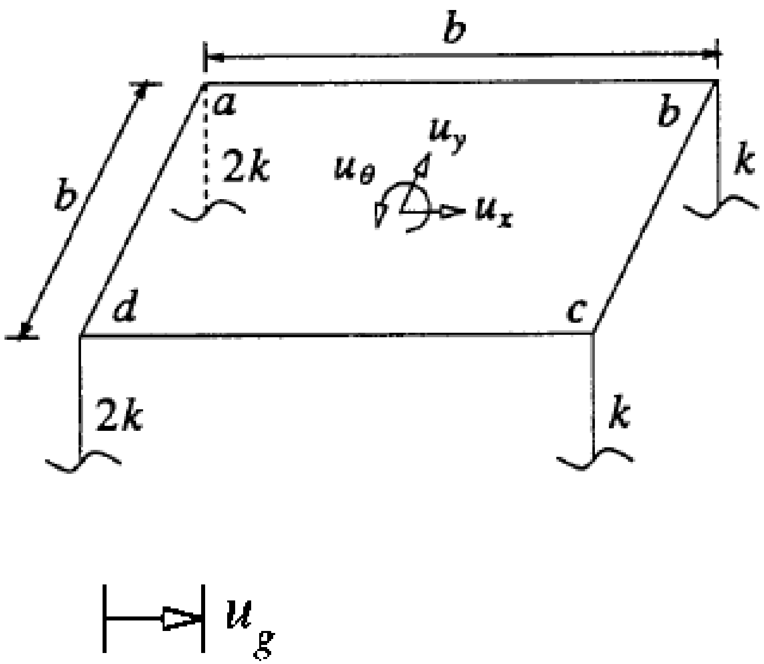
$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Exemple 2



$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple3



$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$