

# Dynamique Des Structures 2 (DDS2)

*Année universitaire 2019/2020,*

Dr BENMANSOUR-MEDDANE Nassima

# Dynamique des structures 2

## 1. Vibrations forcées des SPPDDL Méthode de superposition modale

# **1.1. Vibrations forcées non amorties**

# Introduction

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t)$$

- L'équation de mouvement est un système d'équations différentielles **couplées**.
- Pour les résoudre, on peut utiliser la méthode pas à pas, **méthode complexe**.
- Ou **découpler** les équations de mouvement.

# Découplage des équations de mouvement différentielles

On sait que :

$$M\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + K\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \quad \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \phi_{(i)} \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \Phi \mathbf{q}(\mathbf{t})$$

Remplaçons  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  dans l'équation de mouvement:

$$M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{t}) + K \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})$$

Pré-multiplions par  $\phi_i^T$ :

$$\phi_i^T M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{t}) + \phi_i^T K \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \phi_i^T \mathbf{P}(\mathbf{t}) \quad \phi_i^T \quad i = 1, \dots, N$$

On utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres:

$$\phi_i^T M \phi_i \ddot{q}_i(t) + \phi_i^T K \phi_i q_i(t) = \phi_i^T P(t) \quad i = 1, \dots, N$$

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + K_i^* q_i(t) = P_i^*(t) \quad i = 1, \dots, N$$

Ou bien:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{P_i^*(t)}{M_i^*} \quad \omega_i^2 = \frac{M_i^*}{K_i^*}$$

$M_i^* = \phi_i^T M \phi_i$  Masse généralisée

$K_i^* = \phi_i^T K \phi_i$  Rigidité généralisée

$P_i^*(t) = \phi_i^T P(t)$  Force généralisée

- L'utilisation de la base modale a permis de transformer le système d'équations différentiels couplées exprimés en fonction des coordonnées géométriques  $u(t)$  en système de N équations différentielles **découplée exprimées en coordonnées modales  $q(t)$** .
- L'équation de mouvement pour chaque mode  $i$  n'est autre que **l'équation de mouvement non amorti d'un SDDL** de masse  $M_i^*$  de rigidité  $K_i^*$  soumis à un chargement  $P_i^*(t)$
- La solution  $q_i(t)$  peut être obtenue par les techniques exposées précédemment pour la résolution des SDDL (Méthodes Analytiques, Intégrale de Duhamel, Transformée de Fourier et Méthode Temporelle pas à pas)

# Calcul des efforts élastiques dynamiques

- On peut les calculer directement:

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{t})$$

- Par superposition modale:  $\mathbf{F}_s(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_s^{(i)}(\mathbf{t})$

avec:

$$\mathbf{F}_s^{(i)}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\phi_i q_i(\mathbf{t})$$

Ou bien plus simplement en fonction de la matrice masse:

$$\mathbf{F}_s^{(i)}(\mathbf{t}) = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i q_i(\mathbf{t})$$

# Calcul des efforts élastiques dynamiques

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s(\mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i q_i(\mathbf{t}) \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i q_i(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

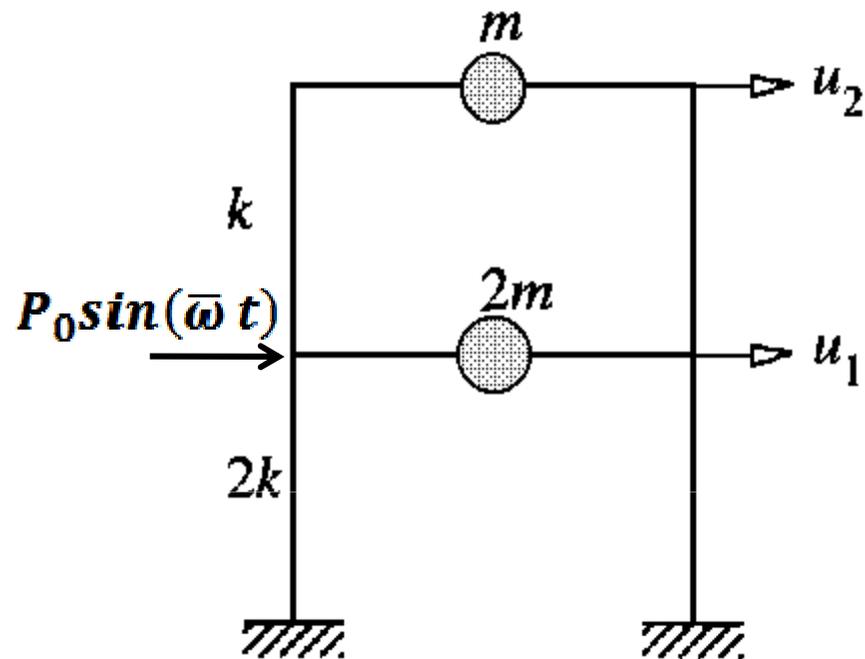
La force élastique du DDL j:

$$F_{s_j}^{(i)}(\mathbf{t}) = \omega_i^2 m_{ji} \phi_{ji} q_i(\mathbf{t})$$

La résultante est:

$$\mathbf{F}_{s_j}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 m_{ji} \phi_{ji} q_i(\mathbf{t})$$

# Exemple1 :



$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_0 \sin(\bar{\omega} t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analyse en vibrations libres:

Analyse modale

Pulsations propres:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Modes propres:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

## **1.2. Vibrations forcées amorties**

# Vibration forcée amortie

L'équation de mouvement est:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}(\mathbf{t})$$

Par superposition modale on a:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \phi_{(i)} \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})$$

Remplaçons  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  dans l'équation de mouvement:

$$\mathbf{M} \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{C} \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{K} \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})$$

Pré-multiplions par  $\phi_i^T \quad i = 1, \dots, N$

$$\phi_i^T M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{q}_i(t) + \phi_i^T C \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{q}_i(t) + \phi_i^T K \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) = \phi_i^T P(t) \quad i = 1, \dots, N$$

Utilisons la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices K et M on a :

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + \phi_i^T C \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{q}_i(t) + K_i^* q_i(t) = P_i^*(t) \quad i = 1, \dots, N$$



**Systèmes d'équations couplées**

Sauf si les modes propres sont orthogonaux par rapport à la matrice C, le cas d'un système à amortissement classique.

Dans ce cas on a les mêmes modes propre qu'un système non amortie.

$$\phi_i^T C \phi_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

L'équation de mouvement est un système de N équations différentielles découplées:

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + C_i^* \dot{q}_i(t) + K_i^* q_i(t) = P_i^*(t) \quad i = 1, \dots, N$$

Avec:

$$C_i^* = \phi_i^T C \phi_i \quad \text{Amortissement généralisé.}$$

Remarque:

Si le système a un amortissement non classique il n'a pas les mêmes modes propres que le système à amortissement classique, ce cas ne sera pas traité dans ce cours.

Par analogie avec les systèmes SDDL on obtient l'équation de mouvement réduite pour chaque mode  $i$ :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{P_i^*(t)}{M_i^*} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\xi_i = \frac{C_i^*}{2\omega_i M_i^*} \quad \text{Amortissement modale.}$$

La solution  $q_i(t)$  peut être obtenue par les techniques exposées précédemment pour la résolution des SSDDL (Méthodes Analytiques, Intégrale de Duhamel, Transformée de Fourier et Méthode Temporelle pas à pas)

# Caractéristiques d'amortissement (Classiques)

les modes propres sont, pour un même système, les mêmes que sans amortissement. Ce cas se produit lorsque  $C$  est une combinaison linéaire de  $K$  et  $M$ . Donc il est évident dans ce cas que la condition d'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice  $C$  sera vérifiée

## Amortissement de Rayleigh

$$C = \alpha M + \beta K$$

On a donc:

$$C_i^* = \alpha M_i^* + \beta K_i^* \quad \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

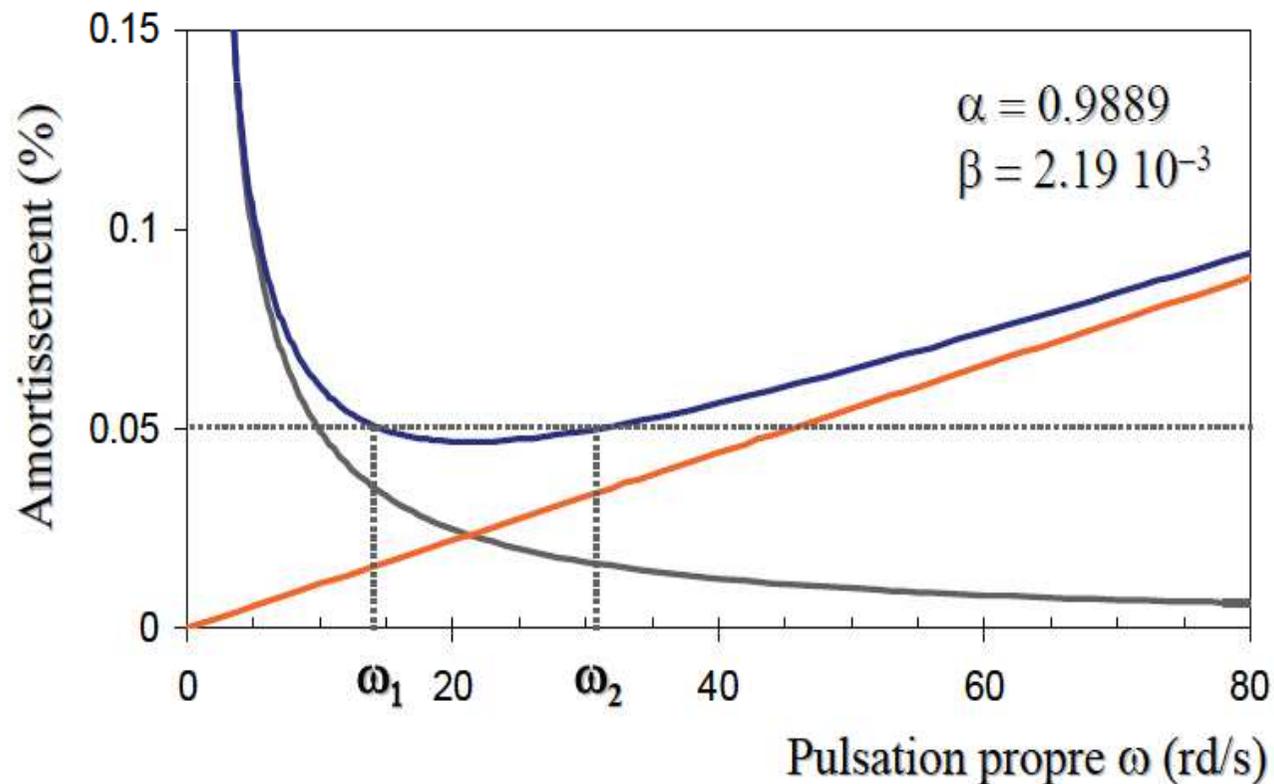
L'amortissement modale est constitué de deux termes le premier est inversement proportionnel à la pulsation et le deuxième est proportionnel à la pulsation: 16

- Pour construire la matrice C il suffit de connaître  *$\alpha$  et  $\beta$*
- *$\alpha$  et  $\beta$*  Peuvent être déterminées connaissant deux valeurs d'amortissement modales.
- Par la suite on peut calculer l'amortissement correspondant aux autres modes.

## Exemple:

Il est souhaitable de considérer un amortissement constant indépendant de la fréquence, un choix approprié de  $\alpha$  et  $\beta$  satisfait de façon approximative cette condition.

$\omega_1$  Pulsation fondamentale---  $\omega_2$  la plus grande pulsation d'intérêt pour l'ouvrage



# Valeurs caractéristiques d'amortissement

Dans la majorité des structures rencontrées dans la pratique, les valeurs d'amortissement modales sont quasi indépendants des pulsations propres. Ainsi, on est en présence d'amortissement structurel donné par la réglementation .

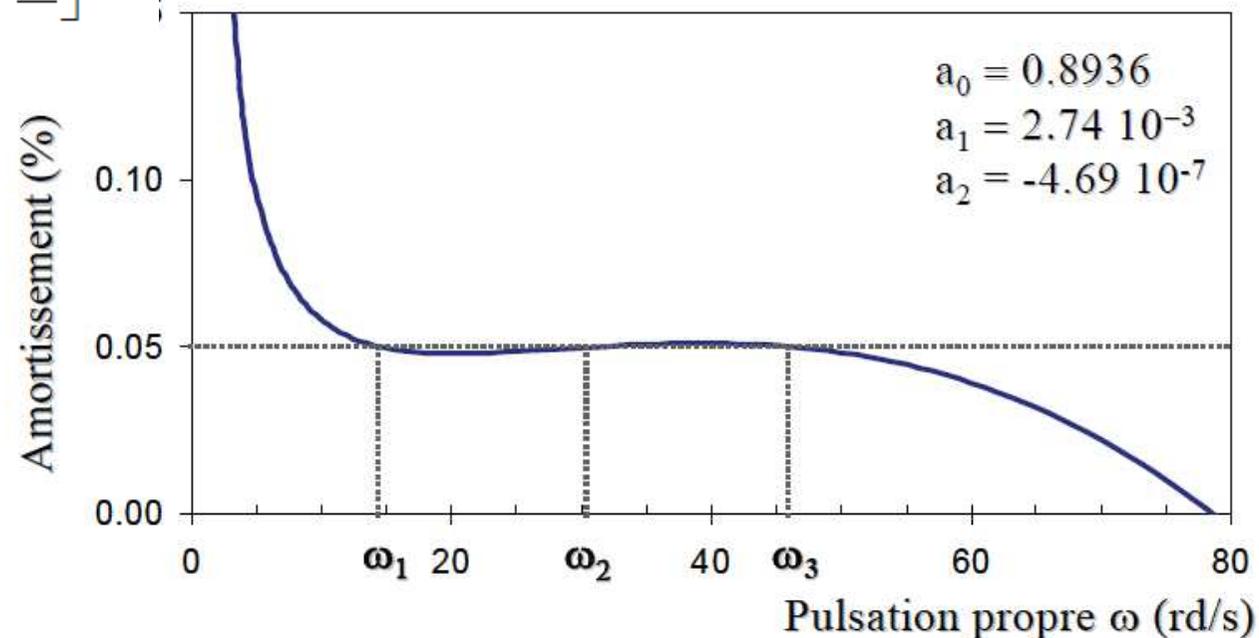
# Valeurs caractéristiques d'amortissement

Matériau \ Déformation	< 0.5 limite élastique	Voisinage limite élastique
Béton armé	3 - 5	7 - 10
Béton précontraint	2 - 3	7 - 10
Acier soudé	2 - 3	5 - 7
Acier boulonné	5 - 7	10 - 15
Bois cloué	5 - 7	15 - 20

# AMORTISSEMENT DE CAUGHEY

Il s'agit d'une généralisation de l'amortissement de Rayleigh dans laquelle la matrice d'amortissement s'exprime comme une combinaison linéaire de  $p$  termes constitués du produit de la matrice de masse et de la matrice de raideur.

$$\underline{C} = \underline{M} \sum_{b=0}^p a_b \left[ \underline{M}^{-1} \underline{K} \right]^b$$



# Résumé de la méthode de superposition modale

1. Modélisation.
2. Détermination des matrices M et K – estimation de l'amortissement modal.
3. Calcul des pulsations et modes propres.
4. Calcul de la réponse pour chaque mode.
  - 4.1. Détermination des caractéristiques généralisées  $M_i^* = \phi_i^T M \phi_i$   $P(t)_i^* = \phi_i^T P(t)$

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

## 4.2. résolution des équations différentielles

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \frac{P_i^*(t)}{M_i^*}$$

On détermine les conditions initiales:

$$q_i(0) = \frac{\phi_i^T M u(0)}{\phi_i^T M \phi_i} \quad \dot{q}_i(0) = \frac{\phi_i^T M \dot{u}(0)}{\phi_i^T M \phi_i}$$

4.3 Calcul des déplacements modaux, et des efforts internes:

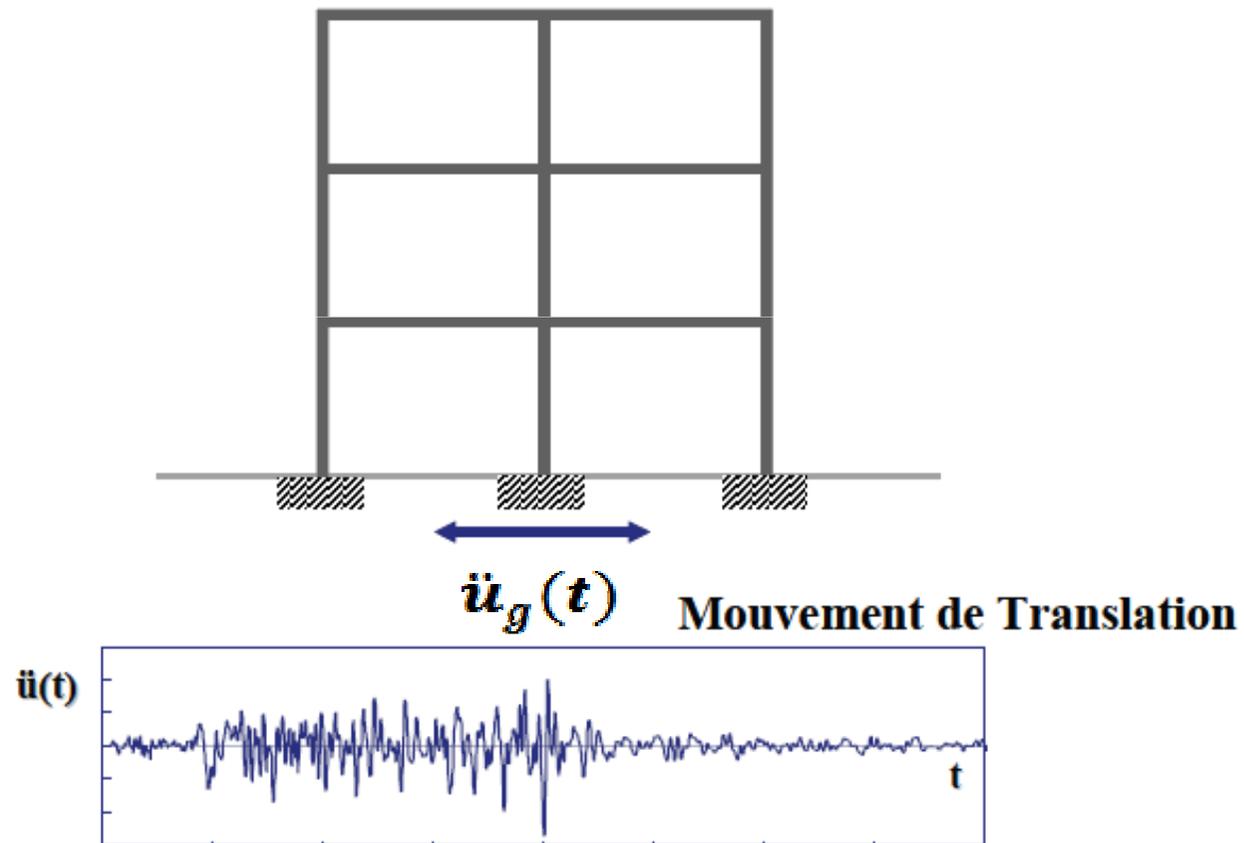
$$u^{(i)}(t) = \phi_i q_i(t)$$

5. Superposition des modes propres

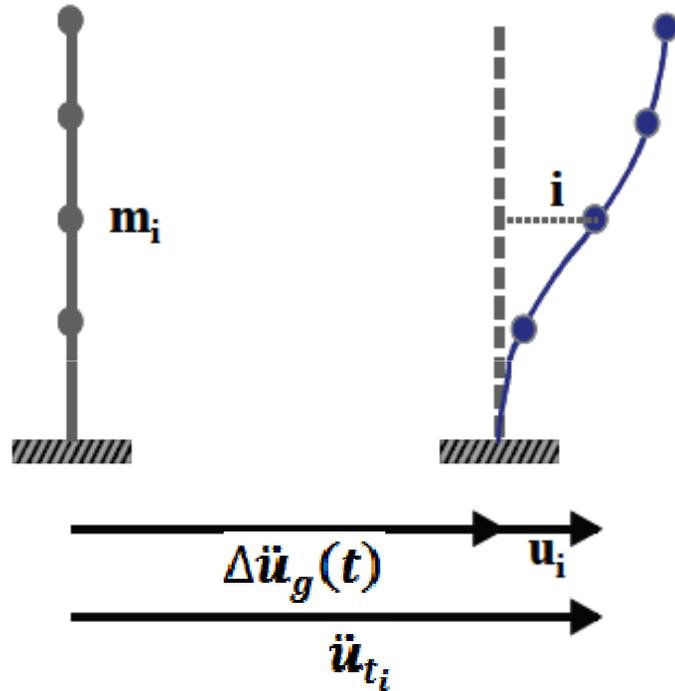
$$u(t) = \sum_{i=1}^N \phi_{(i)} q_i(t) = \Phi q(t)$$

## **1.3. Vibrations du support**

# Calcul de la réponse sismique



# Equation de mouvement: Rappel



$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = -M\Delta\ddot{u}_g(t)$$

$$P_{eff}(t) = -M\Delta\ddot{u}_g(t)$$

$\Delta$ : est le vecteur donnant la direction de la sollicitation.

Le vecteur  $\Delta$  a pour composantes 1 dans la direction du mouvement de translation, 0 pour les autres degrés de liberté.

# Calcul de de la réponse sismique temporelle (Méthode de superposition modale)

On utilise la même démarche présentée précédemment:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N \phi_{(i)} q_i(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$$

$$q_i(t) \quad \longrightarrow \quad \ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{P_i^*(t)}{M_i^*}$$

$$P(t)_i^* = \phi_i^T P_{eff}(t) = -\phi_i^T \Delta M \ddot{u}_g(t)$$

$$\text{On pose :} \quad L_i = \phi_i^T \Delta M$$

$$P(t)_i^* = -L_i \ddot{u}_g(t)$$

En utilisant l'intégrale de Duhamel pour le calcul de la réponse sismique en régime permanent:

$$q_i(t) = \frac{-L_i}{M_i^* \omega_{di}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin[\omega_{di}(t-\tau)] d\tau$$

On pose:

$$a_i = \frac{L_i}{M_i^*} = \frac{\phi_i^T \Delta M}{\phi_i^T M \phi_i} \longrightarrow \text{Facteur de participation modale}$$

$$d_i(t) = \frac{-1}{\omega_{di}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin[\omega_{di}(t-\tau)] d\tau$$

$d_i(t)$  Est la solution de l'équation différentielle:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = -\ddot{u}_g$$

Donc c'est le déplacement d'un SSDDL de pulsation  $\omega_i$  et d'amortissement  $\xi_i$  du à un mouvement de sol d'accélération  $\ddot{u}_g$

Le déplacement modal est:

$$\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\phi}_i q_i(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_i \boldsymbol{\phi}_i d_i(\mathbf{t})$$

Le déplacement total est:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\phi}_i q_i(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \boldsymbol{\phi}_i d_i(\mathbf{t})$$

La force élastique modale est:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s^{(i)}(\mathbf{t}) &= \mathbf{K} \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{t}) = \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i q_i(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_i \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i d_i(\mathbf{t}) \\ &= \mathbf{a}_i \omega_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i d_i(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

La force élastique totale est:

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \omega_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i d_i(\mathbf{t})$$

# Propriété du facteur de participation modal

$$\mathbf{a}_i = \frac{L_i}{M_i^*} = \frac{\Phi_i^T \Delta M}{\Phi_i^T M \Phi_i}$$

1. De la relation de  $\mathbf{a}_i$  on remarque qu'il dépend de la norme adoptée pour le mode propre  $\Phi_i$ .
2. C'est  $\mathbf{a}_i$  qui modifie l'amplitude de l'accélération du sol de chaque mode.

$$3. \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \Phi_i = \Delta \quad \Phi_j^T M \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \Phi_i = \Phi_j^T M \mathbf{a}_j \Phi_j = \Phi_j^T M \Phi_j \frac{\Phi_j^T \Delta M}{\Phi_j^T M \Phi_j}$$

Démonstration:

$$= \Phi_j^T \Delta M$$

# Dynamique des structures 2

2. Vibrations forcées des SPPDDL  
Calcul de la réponse maximale ou  
Analyse modale spectrale

## **2.1. Calcul de la réponse modale spectrale**

Pour le dimensionnement d'un système, la connaissance de la variation temporelle de la réponse n'est pas obligatoirement nécessaire et seule la **valeur maximale** est requise.

L'**analyse spectrale** nous permet d'avoir directement cette grandeur.

# Calcul de la valeur maximale de la réponse par mode

$$\mathbf{u}^{(i)}_{max} = \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{q}_{imax} = \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i d_{imax}$$

Pour avoir  $\mathbf{u}^{(i)}_{max}$  directement il suffit d'avoir  $d_{imax}$

$$d_{imax} = \text{Max} \left( \frac{-1}{\omega_{di}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin[\omega_{di} (t-\tau)] d\tau \right)$$

Le déplacement maximum d'un SSDDL de pulsation  $\omega_i$  et d'amortissement  $\xi_i$  dû à un mouvement de sol d'accélération  $\ddot{u}_g$ .

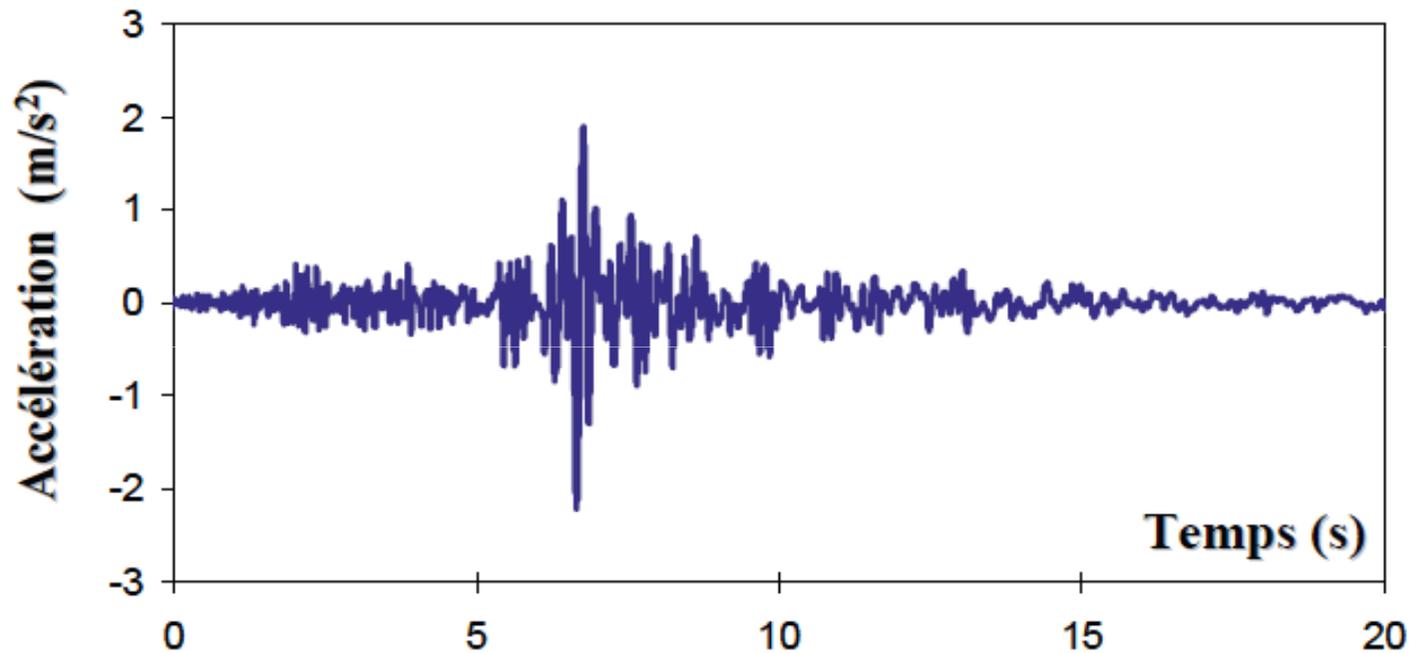
La courbe qui donne directement ce déplacement maximal à partir d'un mouvement sismique est appelée **spectre de réponse**.

$$d_{imax} = S_D(\omega_i, \xi_i)$$

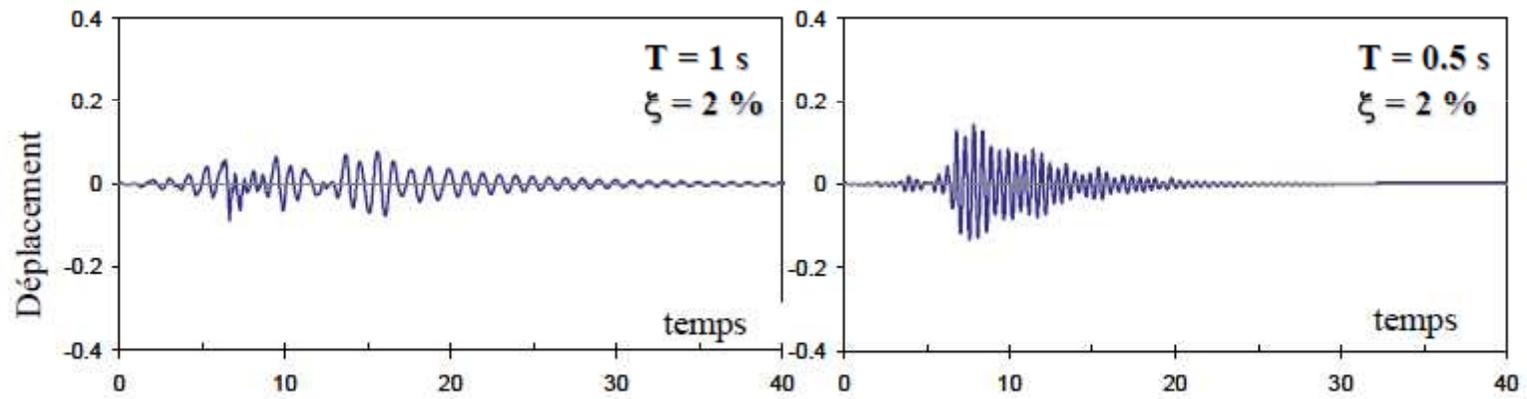
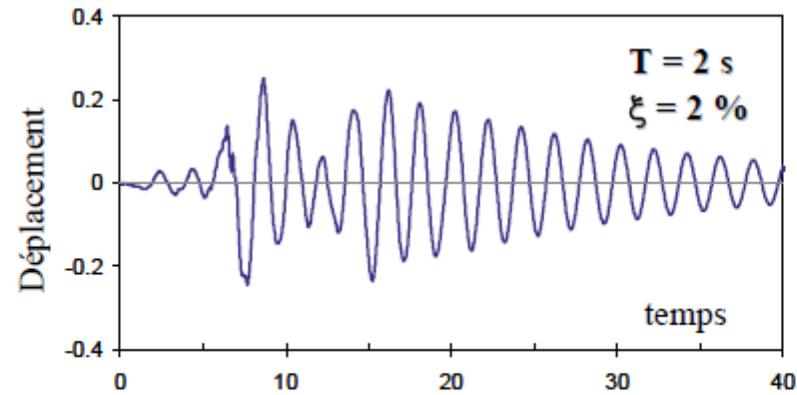
# Spectre de réponse

La variation de la réponse dynamique maximale d'un SSDDL sous un mouvement de sol  $U_g$  en fonction de sa période propre et son amortissement.

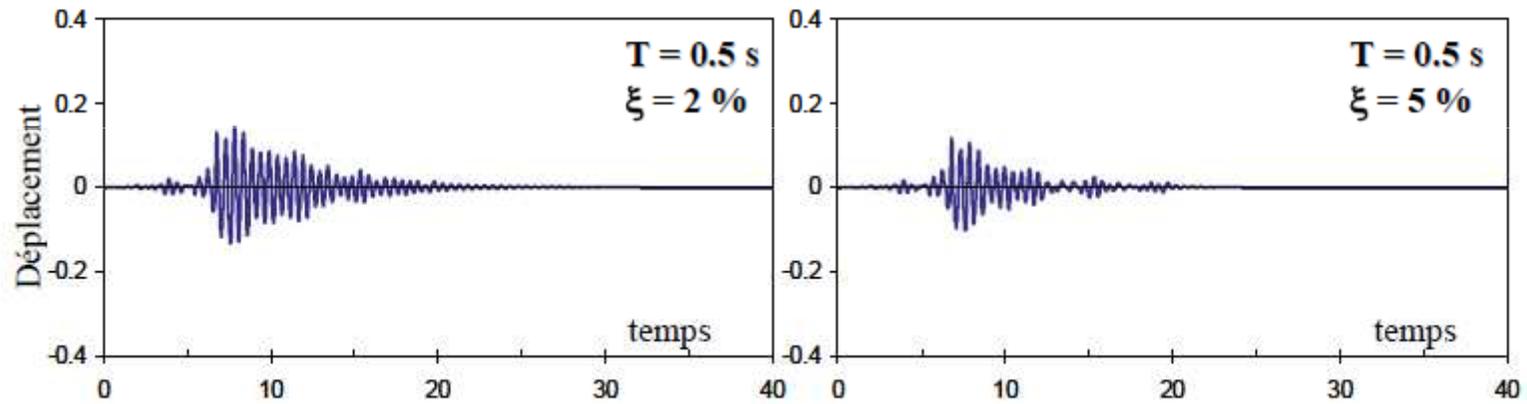
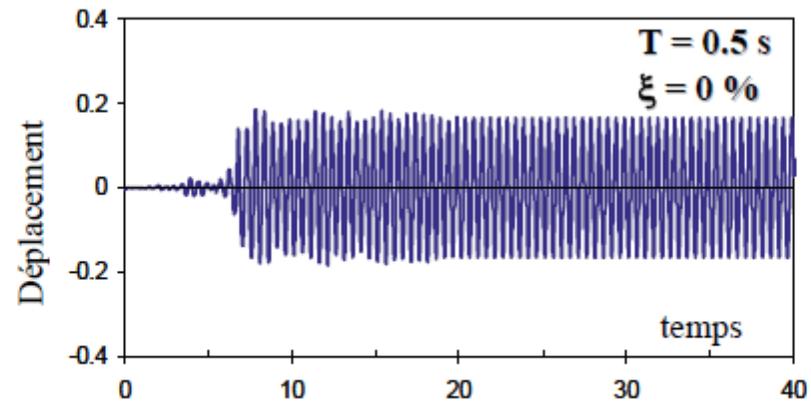
# Exemple



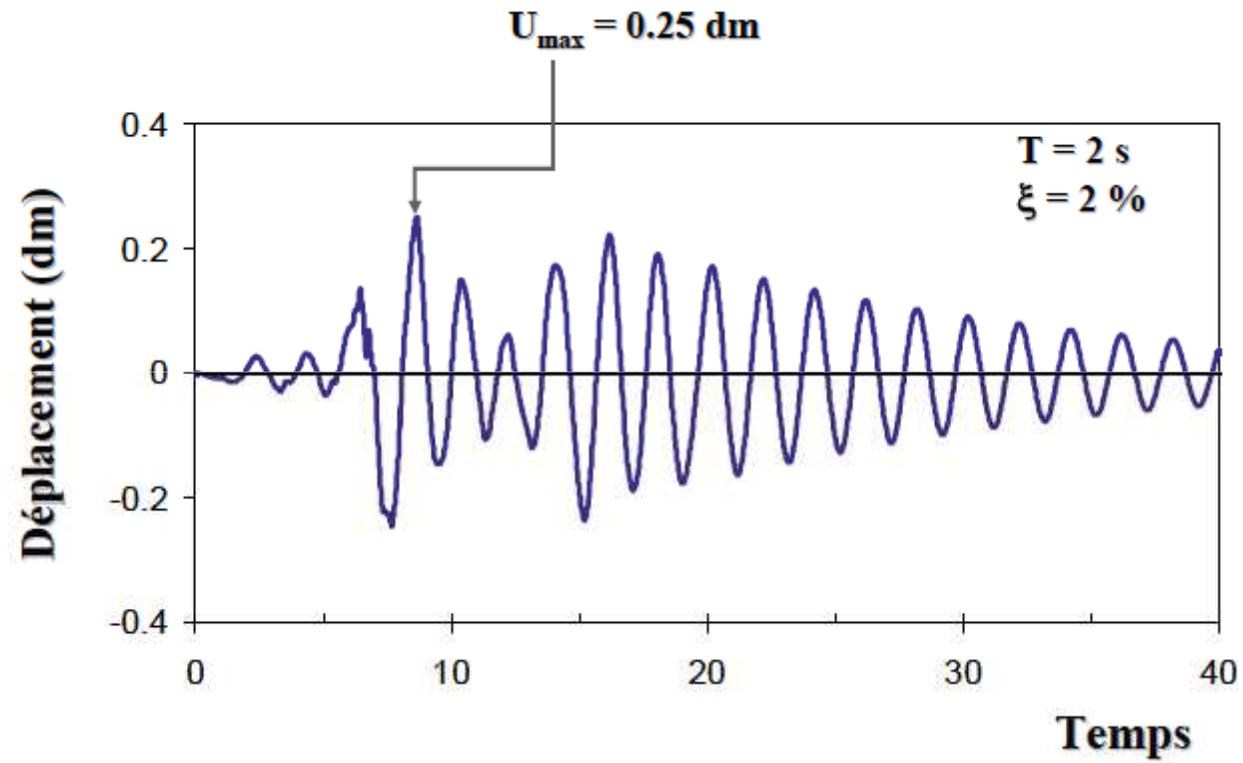
Accélérogramme de Lake Hughes (Northridge 1994)



Influence de la période propre sur la réponse de l'oscillateur

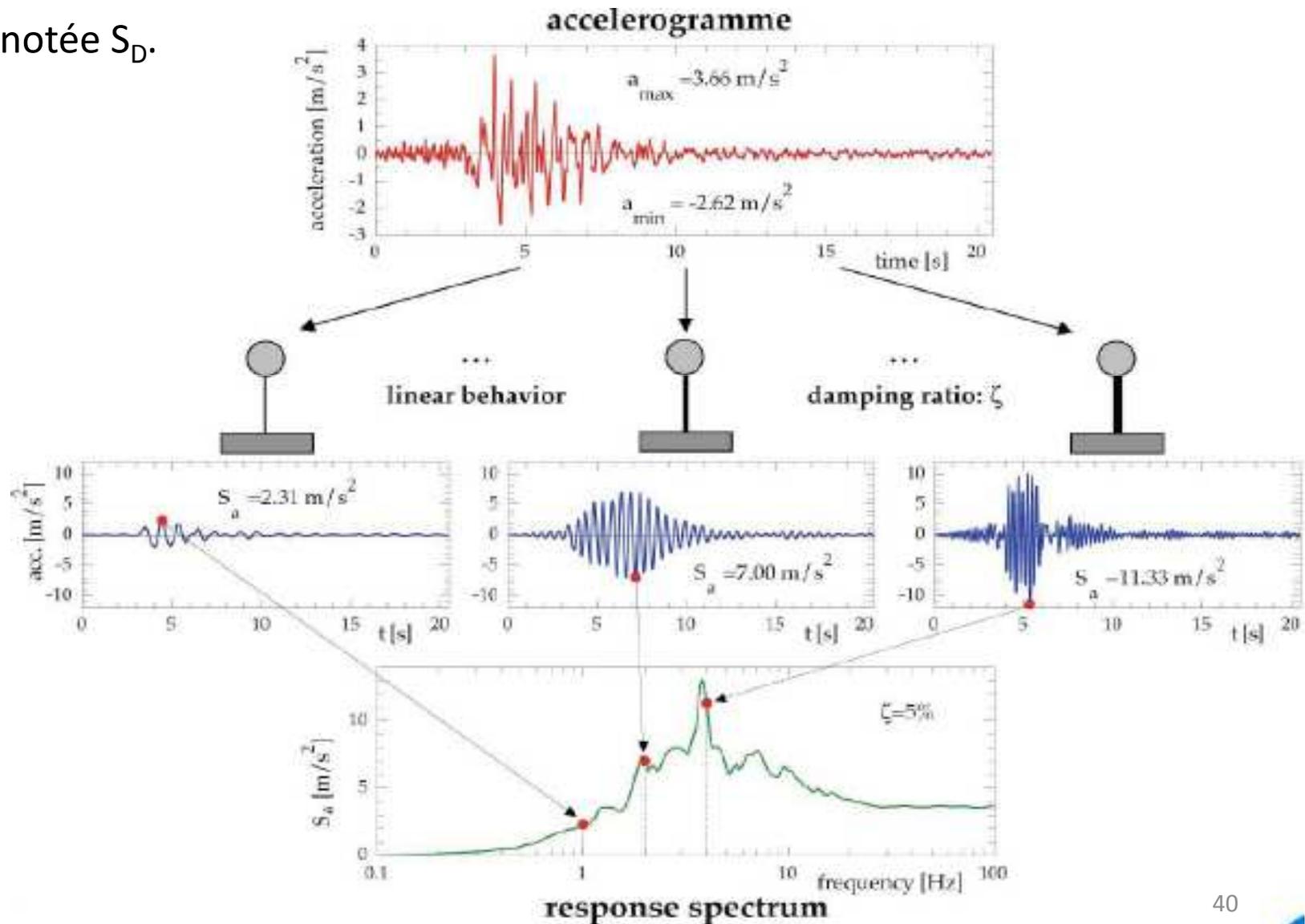


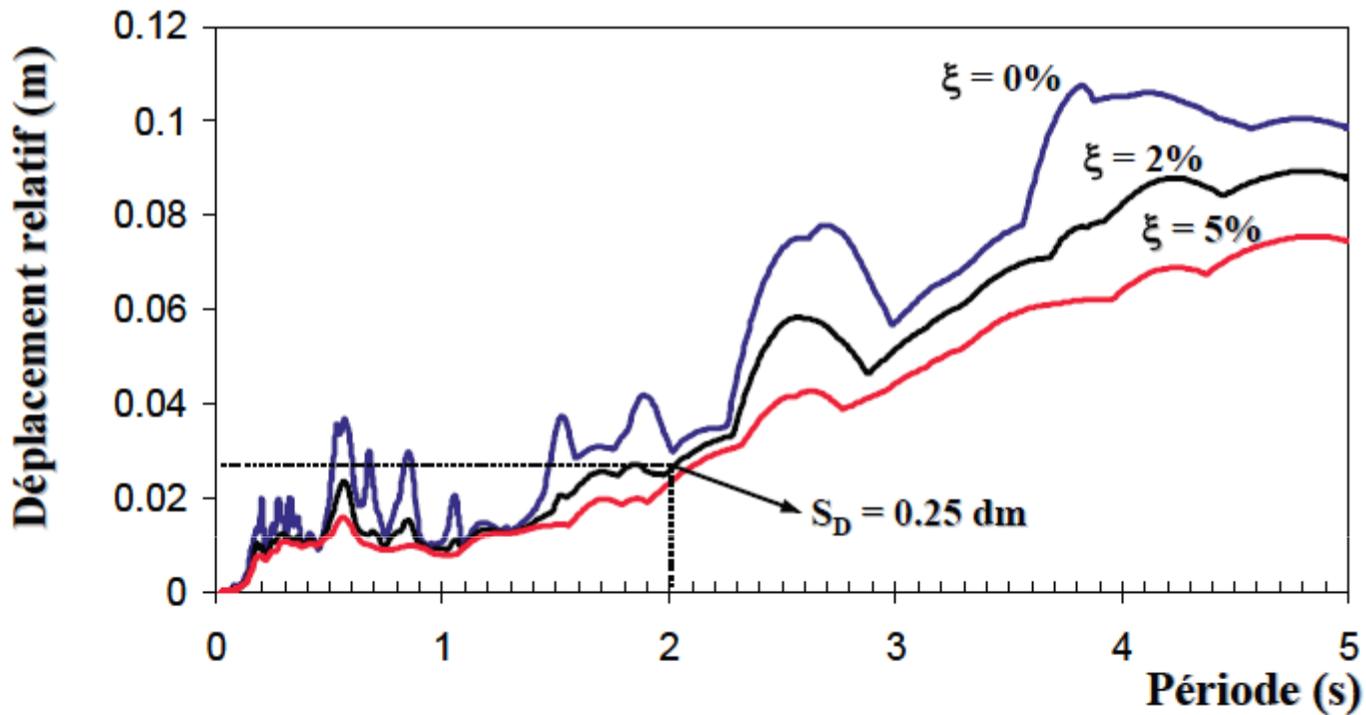
Influence de l'amortissement sur la réponse de l'oscillateur



Réponse de l'oscillateur  $T = 2\text{s}$ ,  $\xi = 2\%$

Il est possible de répéter l'opération précédente pour une collection d'oscillateurs de périodes propres  $T$  et de pourcentages d'amortissement critique variables. Pour chaque réponse, on ne retient que la valeur maximale de déplacement relatif notée  $S_D$ .

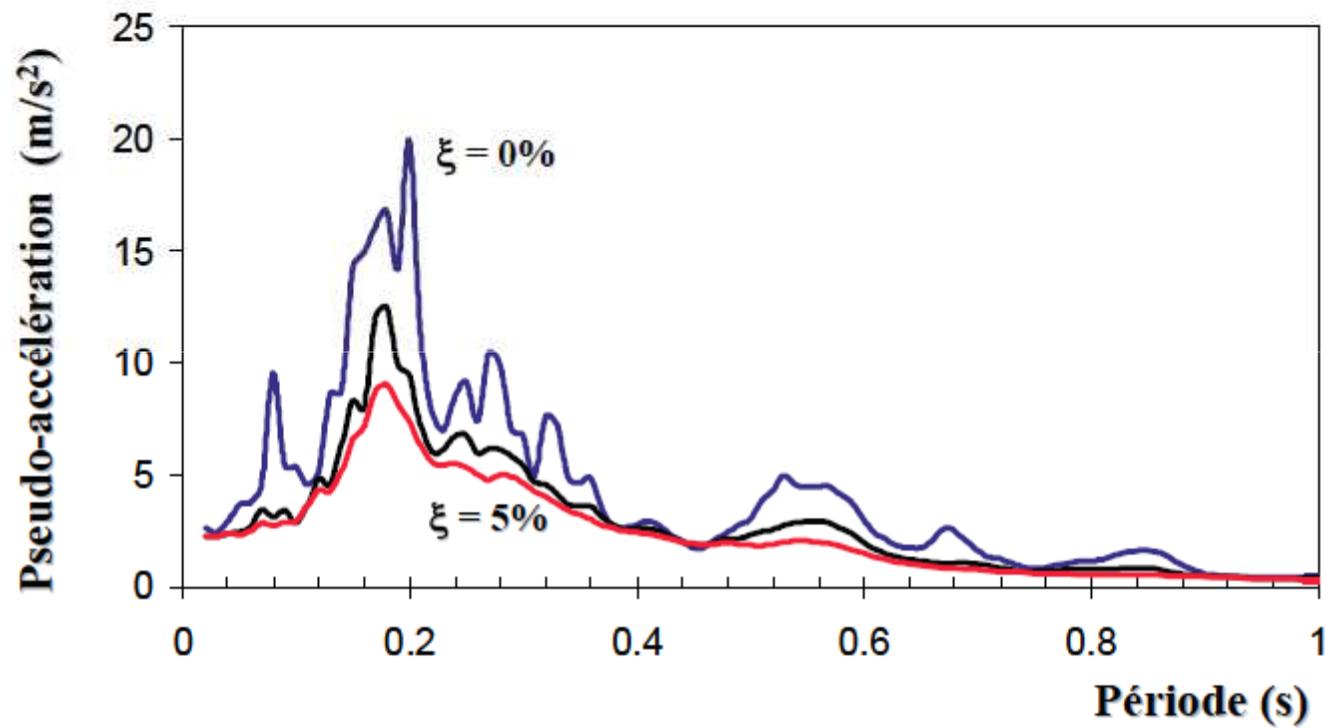




**Spectre de réponse en déplacement obtenu à partir :**  
 Accélérogramme de Lake Hughes (Northridge 1994)

# Spectres de réponse

- Spectre en déplacement relatif  $\Rightarrow S_D(\omega, \xi)$
- Spectre en vitesse relative  $\Rightarrow \dot{d}_{max}$   
Spectre en pseudo  $\Rightarrow S_V(\omega, \xi) = \omega S_D(\omega, \xi) \approx \dot{d}_{max}$   
vitesse
- Spectre en accélération  $\Rightarrow \ddot{d}_{max}$   
Spectre en pseudo  $\Rightarrow S_A(\omega, \xi) = \omega^2 S_D(\omega, \xi) \approx \ddot{d}_{max}$   
accélération



Spectres de réponse en pseudo-accélération

# Valeur maximale de la réponse modale

- Le déplacement maximal pour un mode  $i$ :

$$\mathbf{u}^{(i)}_{max} = \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{q}_{imax} = \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{d}_{imax} = \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{S}_D(\omega_i, \xi_i)$$

$$\mathbf{u}^{(i)}_{max} = \frac{\alpha_i}{\omega_i^2} \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{S}_A(\omega_i, \xi_i)$$

- La force élastique maximale:

$$\mathbf{F}_s^{(i)}_{max} = \alpha_i \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{S}_D(\omega_i, \xi_i)$$

$$\mathbf{F}_s^{(i)}_{max} = \alpha_i \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{S}_A(\omega_i, \xi_i)$$

## **2.2. Calcul de la réponse totale spectrale**

# Valeur maximale de la réponse totale

- L'utilisation des spectres de réponse ne permet pas d'accéder qu'à la valeur maximale de la réponse de chaque mode.
- Ces maximums ne se produisent pas tous en même instant et pose alors le problème du cumul de la réponse modales.

La réponse totale R (déplacement en un point, Effort interne, contrainte dans un élément....).

- **Cumul en valeur absolu:**

Peut conduire à une surestimation importante de la réponse.

$$R_{max} \leq \sum_{i=1}^N |R_{max}^{(i)}|$$

- **La règle SRSS (Square root of sum of squares) combinaison quadratique:**

$$R_{max} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_{max}^{(i)})^2}$$

Cette approximation est excellente si les modes propres ont des fréquences propres sont écartées

$$0.9 \leq \frac{\omega_i}{\omega_j} \leq 1.1$$

# Choix du nombre de mode

- Un SPDDL à N DDL procède N modes propres.
- Généralement les modes supérieures contribuent faiblement à la réponse

Combien de modes retenir pour le calcul de la réponse totale?

# La masse modale

$$m_i^* = \frac{L_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T \Delta M)^2}{\Phi_i^T M \Phi_i}$$

Indépendante de la normalisation des modes propres.  
La masse totale de la structure dans la direction  $\Delta$  est égale à la somme des masses modales:

$$M_T = \Delta^T M \Delta = \sum_{i=1}^N m_i^*$$

Donc chaque mode a une contribution massique dans par rapport à la masse totale.

# Superposition modale

En pratique le nombre de mode  $K$  suffisant pour une analyse dynamique par superposition modale doit vérifier la relation suivante:

$$\sum_{i=1}^K m_i^* \geq 90\%M_T$$

Généralement

$$K \ll N$$

# Résumé de la méthode spectrale

1. Discrétisation

2. Calcul des matrices de masse  $M$  et de rigidité  $K$ .

Estimation du facteur d'amortissement modale  $\xi_i$   
(au moins pour deux modes)

3. Calcul des pulsations propres  $\omega_i$  et modes propres  $\phi_i$ :

$$\det(K - \omega_i^2 M) = 0 \Rightarrow \omega_i^2 \quad (i = 1 \dots N)$$

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i \quad (i = 1 \dots N)$$

4. Déterminer le nombre de modes K nécessaire:

$$\sum_{i=1}^K m_i^* \geq 90\% M_T$$

$$m_i^* = \frac{L_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T \Delta M)^2}{\Phi_i^T M \Phi_i} \quad \text{La masse modale}$$

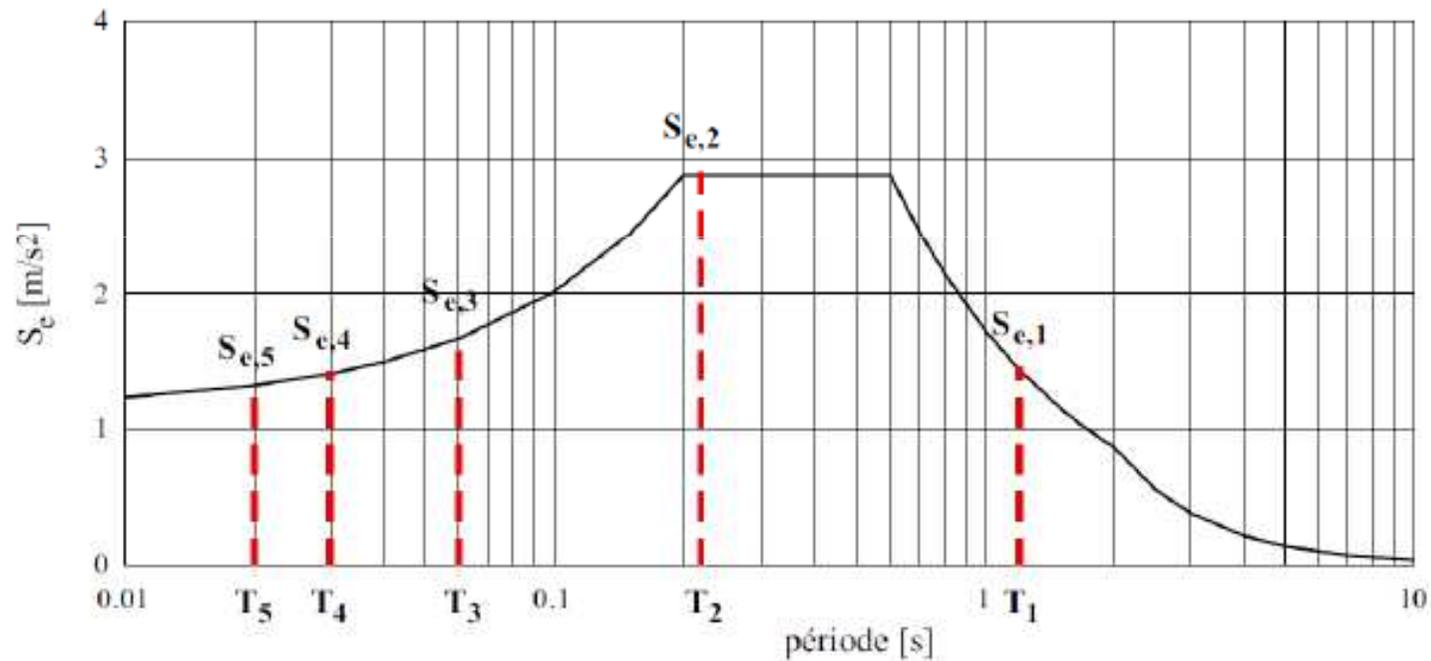
$$M_T = \Delta^T M \Delta \quad \text{La masse totale}$$

5. Estimation des coefficients de **Rayleigh  $\alpha$  et  $\beta$**   
à partir des deux amortissements modaux connus.  
Calcul des autres valeurs d'amortissement modal :

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

6. Déterminer le spectre de calcul.

7. Calcul de la réponse spectrale  $S_A(T_i, \xi_i)$  ( $i = 1 \dots K$ )



8. Calcul de la valeur maximale du déplacement modal:

$$\mathbf{u}^{(i)}_{max} = \frac{a_i}{\omega_i^2} \Phi_i \mathcal{S}_A(\omega_i, \xi_i) \quad (i = 1 \dots K)$$

$$a_i = \frac{L_i}{M_i^*} = \frac{\Phi_i^T \Delta M}{\Phi_i^T M \Phi_i} \quad \text{Facteur de participation modale.}$$

Calcul de la valeur maximale de la force élastique si c'est nécessaire:

$$F_s^{(i)}_{max} = a_i M \Phi_i \mathcal{S}_A(\omega_i, \xi_i)$$

## 9. Superposition des réponses modales $R_{max}^{(i)}$

- **Cumul en valeur absolu:**

Peut conduire à une surestimation importante de la réponse.

$$R_{max} \leq \sum_{i=1}^N |R_{max}^{(i)}|$$

- **La règle SRSS (Square root of sum of squares) combinaison quadratique:**

$$R_{max} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_{max}^{(i)})^2}$$

Cette approximation est excellente si les modes propres ont des fréquences propres sont écartées

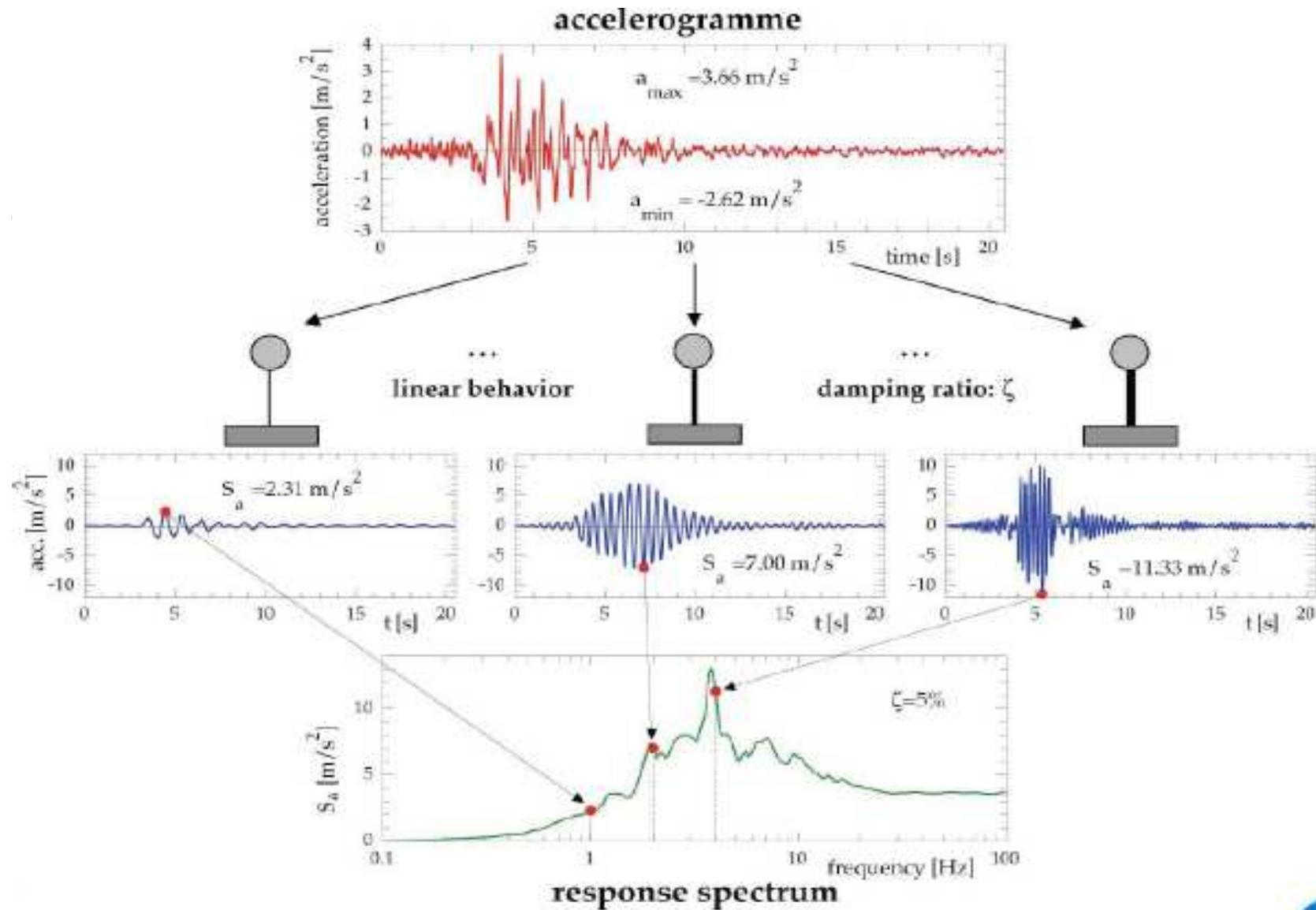
$$0.9 \leq \frac{\omega_i}{\omega_j} \leq 1.1$$

## **2.3. Spectre de réponse élastique**

# Détermination du spectre de réponse

1. Le spectre de réponse peut être obtenu à partir d'un enregistrement sismique.

# Détermination du spectre de réponse

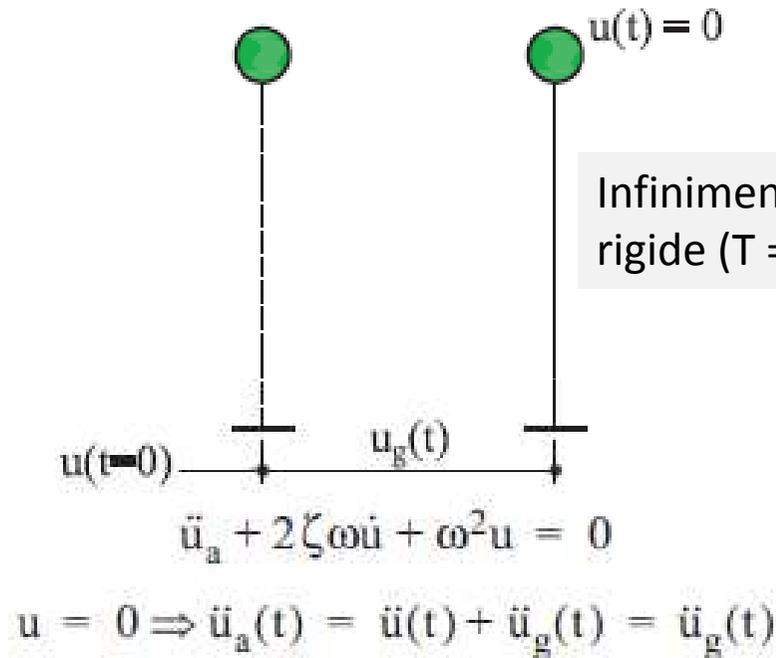


# Détermination du spectre de réponse

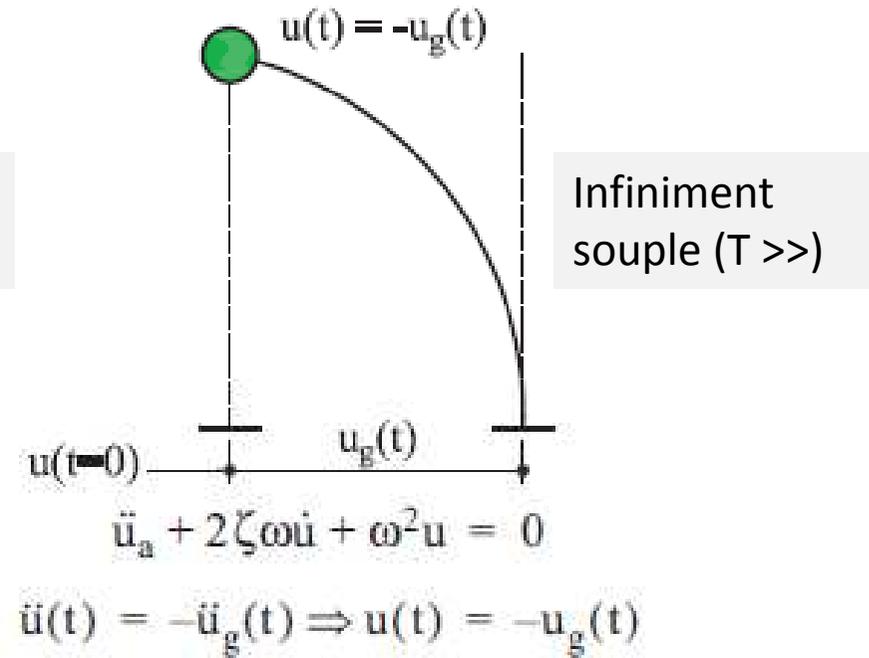
## 2. Spectres réglementaires:

- Le mouvement sismique dû à un séisme en un point donné de la surface du sol est représenté par un spectre de réponse, dénommé , *spectre de réponse élastique*.
- Le comportement *ductile ou non linéaire* de la structure est pris en compte en réalisant une analyse élastique basée sur un spectre de réponse réduit par rapport au spectre de réponse élastique par l'introduction d'un coefficient de comportement R. Le spectre utilisé dans ce cas est dénommé *spectre de calcul ou de dimensionnement*.

# Limites du spectre de réponse



Les hautes fréquences (>25 Hz) l'accélération maximale de la masse est égale à l'accélération maximale du sol (PGA).



Les basses fréquences le déplacement relatif maximal est égal au déplacement maximal du sol (PGD).

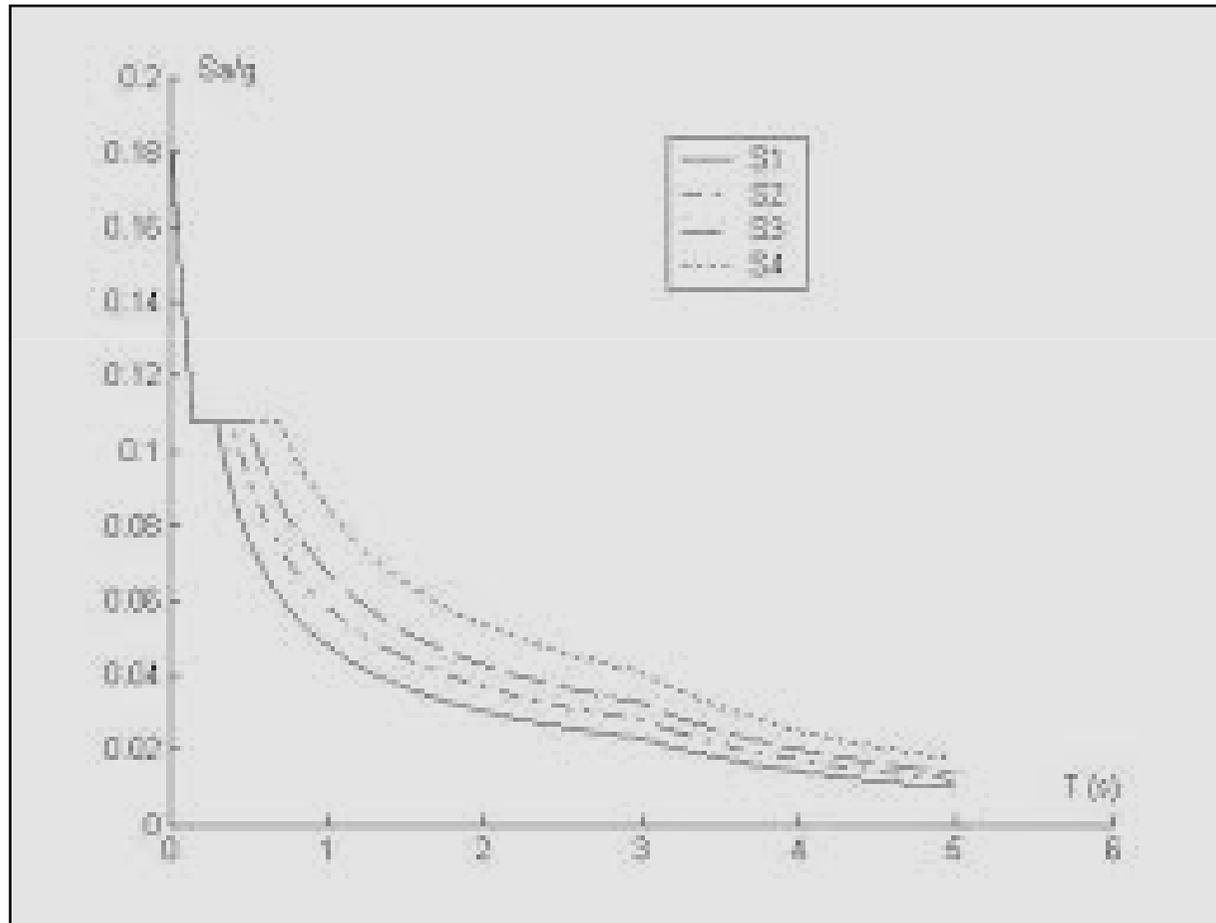
# Spectre réglementaire

RPA99, version (Règlement Parasismiques Algériens, 99 modifiée en 2003)

- Dans le RPA, l'action sismique est définie par le Spectre de réponse de calcul:

$$\frac{S_a}{\sigma_g} = \begin{cases} 1.25A \left( 1 + \frac{T}{T_1} \left( 2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) \left( \frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{3}{T} \right)^{5/3} \left( \frac{Q}{R} \right) & T > 3.0s \end{cases}$$

# Spectre de calcul (RPA,99) version 2003





# A : coefficient d'accélération de zone

		ZONE		
	I	II a	II b	III
1A	0.15	0.25	0.30	0.40
1B	0.12	0.20	0.25	0.30
2	0.10	0.15	0.20	0.25
3	0.07	0.10	0.14	0.18

## R : coefficient de comportement global de la structure

Cat	Description du système de contreventement (voir chapitre III § 3.4)	Valeur de R
<b><u>A</u></b>	<b><u>Béton armé</u></b>	
1a	Portiques autostables sans remplissages en maçonnerie rigide	5
1b	Portiques autostables avec remplissages en maçonnerie rigide	3,5
2	Voiles porteurs	3,5
3	Noyau	3,5
4a	Mixte portiques/voiles avec interaction	5
4b	Portiques contreventés par des voiles	4
5	Console verticale à masses réparties	2
6	Pendule inverse	2
<b><u>B</u></b>	<b><u>Acier</u></b>	
7	Portiques autostables ductiles	6
8	Portiques autostables ordinaires	4
9a	Ossature contreventée par palées triangulées en X	4
9b	Ossature contreventée par palées triangulées en V	3
10a	Mixte portiques/palées triangulées en X	5
10b	Mixte portiques/palées triangulées en V	4
11	Portiques en console verticale	2
<b><u>C</u></b>	<b><u>Maçonnerie</u></b>	
12	Maçonnerie porteuse chaînée	2,5

## R : coefficient de comportement global de la structure

<u>D</u>	<u>Autres systèmes</u>	
13	Ossature métallique contreventée par diaphragme	2
14	Ossature métallique contreventée par noyau en béton armé	3
15	Ossature métallique contreventée par voiles en béton armé	3,5
16	Ossature métallique avec contreventement mixte comportant un noyau en béton armé et palées ou portiques métalliques en façades	4
17	Systèmes comportant des transparences (étages souples)	2

En cas d'utilisation de systèmes de contreventement différents dans les deux directions considérées il y a lieu d'adopter pour le coefficient R la valeur la plus petite.

## Q : facteur de qualité

- la redondance et de la géométrie des éléments qui la constituent
- la régularité en plan et en élévation
- la qualité du contrôle de la construction

$$Q = 1 + \sum_1^5 P_q$$

Critère q »	P <sub>q</sub>	
	Observé	N/observé
1. Conditions minimales sur les files de contreventement	0	0,05
2. Redondance en plan	0	0,05
3. Régularité en plan	0	0,05
4. Régularité en élévation	0	0,05
5. Contrôle de la qualité des matériaux	0	0,05
6. Contrôle de la qualité de l'exécution	0	0,10

**$T_1$  et  $T_2$  périodes caractéristiques,  
associées à la catégorie du site.**

<b>Site</b>	<b>S<sub>1</sub></b>	<b>S<sub>2</sub></b>	<b>S<sub>3</sub></b>	<b>S<sub>4</sub></b>
<b>T<sub>1(sec)</sub></b>	0,15	0,15	0,15	0,15
<b>T<sub>2(sec)</sub></b>	0,30	0,40	0,50	0,70

# CLASSIFICATION DES SITES

## Catégorie S1 (site rocheux) :

Roche ou autre formation géologique caractérisée par une vitesse moyenne d'onde de cisaillement ( $V_S$ ) <sup>3</sup> à 800m/s.

## Catégorie S2 (site ferme) :

Dépôts de sables et de graviers très denses et/ou d'argile surconsolidée sur 10 à 20 m d'épaisseur avec  $V_S$  <sup>3</sup> 400 m/s à partir de 10 m profondeur.

## Catégorie S3 (site meuble) :

Dépôts épais de sables et graviers moyennement denses ou d'argile moyennement raide avec  $V_S$  <sup>3</sup> 200 m/s à partir de 10 m de profondeur.

## Catégorie S4 (site très meuble)

- Dépôts de sables lâches avec ou sans présence de couches d'argile molle avec  $V_S$  < 200 m/s dans les 20 premiers mètres.
- Dépôts d'argile molle à moyennement raide avec  $V_S$  < 200 m/s dans les 20 premiers mètres.

# Facteur de correction d'amortissement

$$\eta = \sqrt{7/(2 + \xi)} \geq 0.7$$

Remplissage	Portiques		Voiles ou murs
	Béton armé	Acier	Béton armé/maçonnerie
Léger	6	4	10
Dense	7	5	

Coefficient d'amortissement  $\xi$

## **2.4.Méthode modale spectrale suivant le règlement parasismique:**

# **Méthode spectrale**

## **RPA99 version 2003**

# Modélisation

## ❑ Structures régulières en plan comportant des planchers rigides:

l'analyse est faite séparément dans chacune des deux directions principales du bâtiment.

Le bâtiment est représenté par un modèle plan, encastré à la base et où les masses sont concentrées au niveau des centres de gravité des planchers avec un seul DDL en translation horizontale.

## ❑ Structures irrégulières en plan, sujettes à la torsion et comportant des planchers rigides:

elles sont représentées par un modèle tridimensionnel, encastré à la base et où les masses sont concentrées au niveau des centres de gravité des planchers avec trois (03) DDL (2 translations horizontales et une rotation d'axe vertical).

# Modélisation

## ❑ Pour les structures régulières ou non comportant des planchers flexibles:

elles sont représentées par des modèles tridimensionnels encastrés à la base et à plusieurs DDL par plancher.

❑ La déformabilité du sol de fondation doit être prise en compte dans le modèle toutes les fois où la réponse de la structure en dépend de façon significative.

# Modélisation

- ❑ Le modèle de bâtiment à utiliser doit représenter au mieux les distributions des rigidités et des masses. (ex : contribution des zones nodales et des éléments non structuraux à la rigidité du bâtiment).
- ❑ Dans le cas des bâtiments en béton armé ou en maçonnerie la rigidité des éléments porteurs doit être calculée en considérant les sections non fissurées.
- ❑ Si les déplacements sont critiques particulièrement dans le cas de structures associées à des valeurs élevées du coefficient de comportement, une estimation plus précise de la rigidité devient nécessaire par la prise en compte de sections fissurées.

# Modélisation

- ❑ L'action sismique doit être appliquée dans toutes les directions jugées déterminantes pour le calcul des forces sismiques ainsi que les directions qui leur sont perpendiculaires, compte tenu de la configuration en plan de la structure.
- ❑ Pour les structures ayant leurs éléments de contreventement distribués le long de deux directions orthogonales, ces deux directions sont à retenir comme directions d'excitation.

# Nombre de modes à considérer

Pour les structures représentées par des modèles plans dans deux directions orthogonales:

- ❑ la somme des masses modales effectives pour les modes retenus soit égale à 90 % au moins de la masse totale de la structure.
- ❑ ou que tous les modes ayant une masse modale effective supérieure à 5% de la masse totale de la structure soient Retenus.

# Nombre de modes à considérer

□ Le minimum de modes à retenir est de trois (03) dans chaque direction considérée.

□ Dans le cas où ces conditions ne peuvent pas être satisfaites à cause de l'influence importante des modes de torsion, le nombre minimal de modes (K) à retenir :

$$K \geq 3 \sqrt{N} \quad \text{et} \quad T_K \leq 0.20 \text{ sec}$$

N est le nombre de niveaux au dessus du sol et  $T_k$  la période du mode K.

# Combinaison des réponses modales

- Les réponses de deux modes de vibration  $i$  et  $j$  sont considérées comme indépendantes si le rapport

$$r \leq \underline{10 / (10 + \sqrt{\xi_i \xi_j})}$$

$$E = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^k E_i^2}$$

$E_i$  : valeur modale de  $E$  selon le mode «  $i$  »

# Combinaison des réponses modales

Dans le cas où deux réponses modales ne sont pas indépendantes ;

$E_1$  et  $E_2$  par exemple, la réponse totale est donnée par :

$$\sqrt{(|E_1| + |E_2|) + \sum_{i=3}^K E_i^2}$$

# Résultante des forces sismiques de calcul

La résultante des forces sismiques à la base  $V_t$  obtenue par combinaison des valeurs modales ne doit pas être inférieure à 80 % de la résultante des forces sismiques déterminée par la méthode statique équivalente  $V$  pour une valeur de la période fondamentale donnée par la formule empirique appropriée.

Si  $V_t < 0.80 V$ , il faudra augmenter tous les paramètres de la réponse (forces, déplacements, moments,...) dans le rapport  $0.8 V/V_t$ .

# Effets de la torsion accidentelle

- Pour toutes les structures comportant des planchers ou diaphragmes horizontaux rigides dans leur plan, on supposera qu'à chaque niveau et dans chaque direction, la résultante des forces horizontales a une excentricité par rapport au centre de torsion égale à la plus grande des deux valeurs:
  - 5% de la plus grande dimension du bâtiment à ce niveau (cette excentricité doit être prise en considération de part et d'autre du centre de torsion)
  - excentricité théorique résultant des plans.

## **2.5.Méthode statique linéaire:**

# Méthode statique équivalente.

## **RPA99 version 2003**

## Principe de la méthode

Les forces réelles dynamiques qui se développent dans la construction sont remplacées par un système de forces statiques fictives dont les effets sont considérés équivalents à ceux de l'action sismique.

# Conditions d'application

Le bâtiment ou bloc étudié présente une configuration régulière en plan et en élévation citée dans le réglemente

On a aussi les conditions complémentaires suivantes :

- **Zone I : · tous groupes**

- **Zone II : ·**

groupe d'usage 3

groupe d'usage 2, si la hauteur est inférieure ou égale à 7 niveaux ou 23m.

groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.

groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.

- **Zone III : · groupes d'usage 3 et 2, si hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.**

groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.

groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 2 niveaux ou 08m.

# Modélisation

- Le modèle du bâtiment à utiliser dans chacune des deux directions de calcul est plan avec les masses concentrées au centre de gravité des planchers et un seul degré de liberté en translation horizontale par niveau.
- Seul le mode fondamental de vibration de la structure est à considérer dans le calcul de la force sismique totale

# La période fondamentale de la structure T

Peut être estimée à partir de formules empiriques ou calculée par des méthodes analytiques ou numériques.

Formule empirique 1  $T = C_T h_N^{3/4}$

· $h_N$  : hauteur mesurée en mètres à partir de la base de la structure jusqu'au dernier niveau (N).

Cas n°	Système de contreventement	$C_T$
1	Portiques autostables en béton armé sans remplissage en maçonnerie	0,075
2	Portiques autostables en acier sans remplissage en maçonnerie	0,085
3	Portiques autostables en béton armé ou en acier avec remplissage en maçonnerie	0,050
4	Contreventement assuré partiellement ou totalement par des voiles en béton armé, des palées triangulées et des murs en maçonnerie	0,050

## Formule empirique 2

$$T = 0.09 h_N / \sqrt{D}$$

D est la dimension du bâtiment mesurée à sa base dans la direction de calcul considérée.

**On retiens dans chaque direction considérée la plus petite des deux valeurs données.**

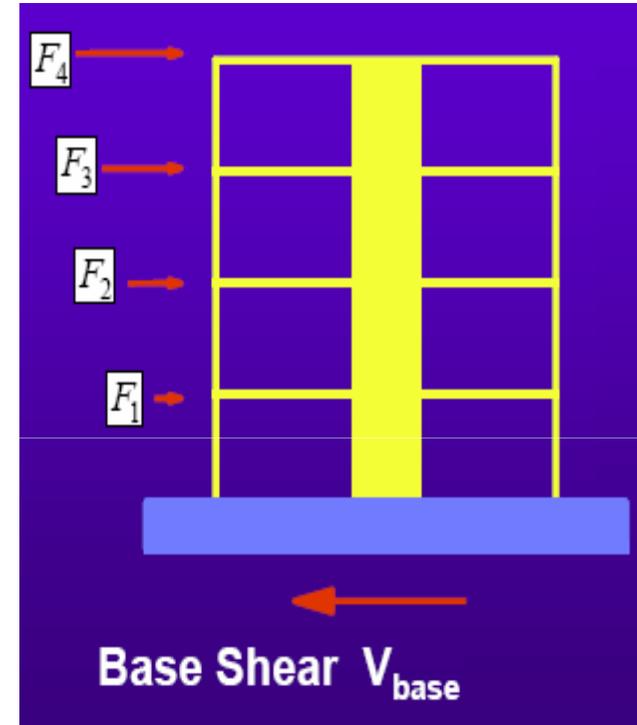
## La force sismique totale - L'effort tranchant à la base

$$V_{base} = \frac{A.D.Q}{R} W$$

$$F_i = \frac{(V_{base} - F_t) W h_i}{\sum_{j=1}^n W_j h_j}$$

$$F_t = 0,07 TV \quad T > 0.7 \text{ sec}$$

$$F_t = 0 \quad T < 0.7 \text{ sec}$$



$$V_{base} = \frac{A.D.Q}{R} W$$

- A : coefficient d'accélération de zone
- D : facteur d'amplification dynamique moyen, fonction de la catégorie de site, du facteur de correction d'amortissement et de la période fondamentale de la structure ( T ).
- R : coefficient de comportement global de la structure
- Q : facteur de qualité
- W : poids total de la structure

## Facteur d'amplification dynamique D.

$$D = \begin{cases} 2.5\eta & 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(T_2/T)^{\frac{2}{3}} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(T_2/3.0)^{\frac{2}{3}}(3.0/T)^{\frac{5}{3}} & T \geq 3.0s \end{cases}$$

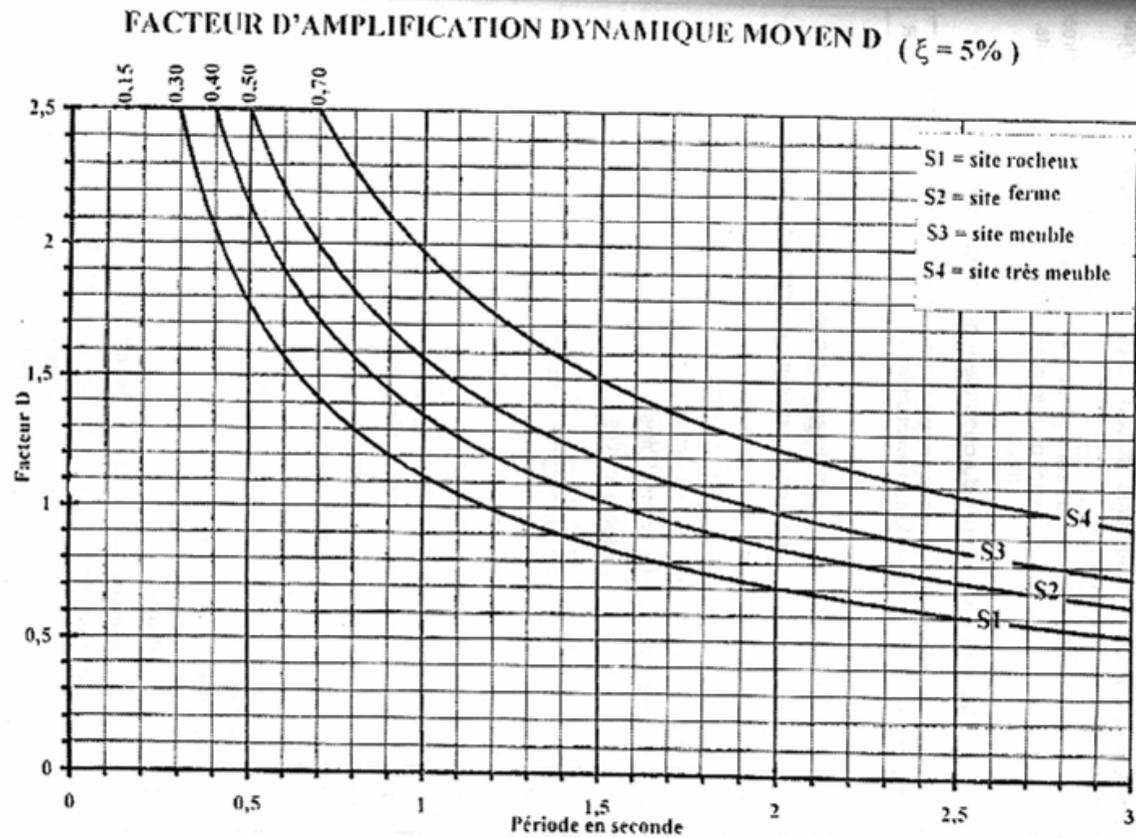


Figure 4.1

## Facteur d'amplification dynamique D.

$$D = \begin{cases} 2.5\eta & 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(T_2/T)^{\frac{2}{3}} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(T_2/3.0)^{\frac{2}{3}}(3.0/T)^{\frac{5}{3}} & T \geq 3.0s \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{7/(2 + \xi)} \geq 0.7$$

<b>Remplissage</b>	<b>Portiques</b>		<b>Voiles ou murs</b>
	<b>Béton armé</b>	<b>Acier</b>	<b>Béton armé/maçonnerie</b>
<b>Léger</b>	6	4	10
<b>Dense</b>	7	5	

## Facteur d'amplification dynamique D.

$$D = \begin{cases} 2.5\eta & 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(T_2/T)^{\frac{2}{3}} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(T_2/3.0)^{\frac{2}{3}}(3.0/T)^{\frac{5}{3}} & T \geq 3.0s \end{cases}$$

$T_2$  période caractéristique, associée à la catégorie du site.

Site	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>
T <sub>1(sec)</sub>	0,15	0,15	0,15	0,15
T <sub>2(sec)</sub>	0,30	0,40	0,50	0,70

# Poids de la structure

$W$  : poids total de la structure,  
 $W$  est égal à la somme des poids  $W_i$ ,  
calculés à chaque niveau ( $i$ ) :

$$(W = \sum W_i, \text{ avec } W_i = W_{Gi} + \beta W_{Qi})$$

$W_{Gi}$  : poids dû aux charges permanentes et à celles des équipements fixes éventuels, solidaires de la structure

$W_{Qi}$  : charges d'exploitation

$\beta$  : coefficient de pondération, fonction de la nature et de la durée de la charge

1	Bâtiments d'habitation, bureaux ou assimilés	0,20
2	Bâtiments recevant du public temporairement : - Salles d'exposition, de sport, lieux de culte, salles de réunions avec places debout. - salles de classes, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises	0,30
3	Entrepôts, hangars	0,40
4	Archives, bibliothèques, réservoirs et ouvrages assimilés	0,50
5	Autres locaux non visés ci-dessus	1,00
		0,60