

# Résistance Des Matériaux 2

(Cours de L2 Architecture )

---

PAR DR NAOUAL DJAFOUR NÉE BENKELFAT

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL - FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID DE TLEMCCEN



# Sollicitations axiales

---

COURS I



# Définition

---

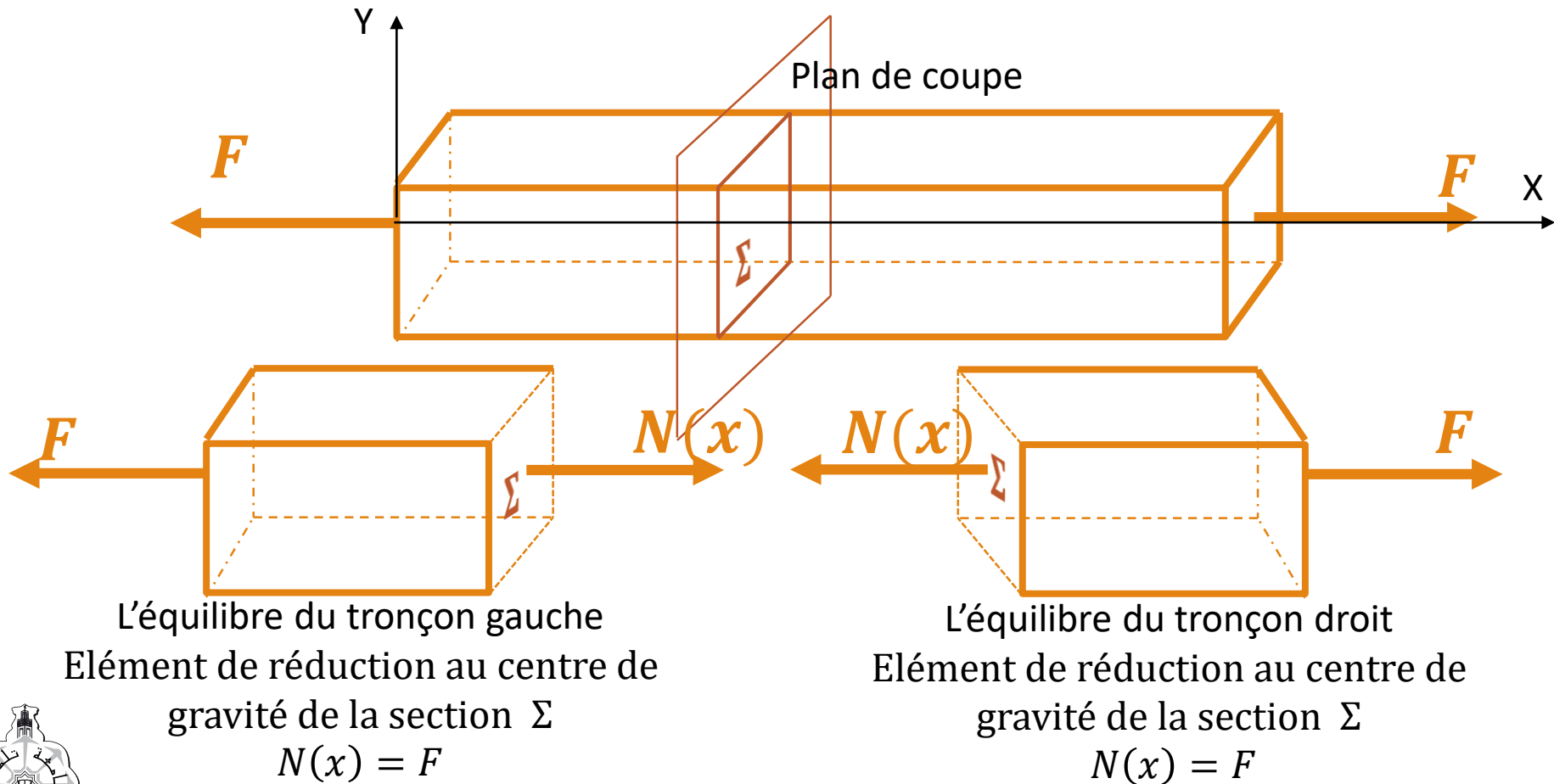
Une poutre est soumise à une sollicitation axiale (traction ou compression) lorsque le tenseur de cohésion au centre de gravité d'une section a la forme

$$\tau_{coh} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

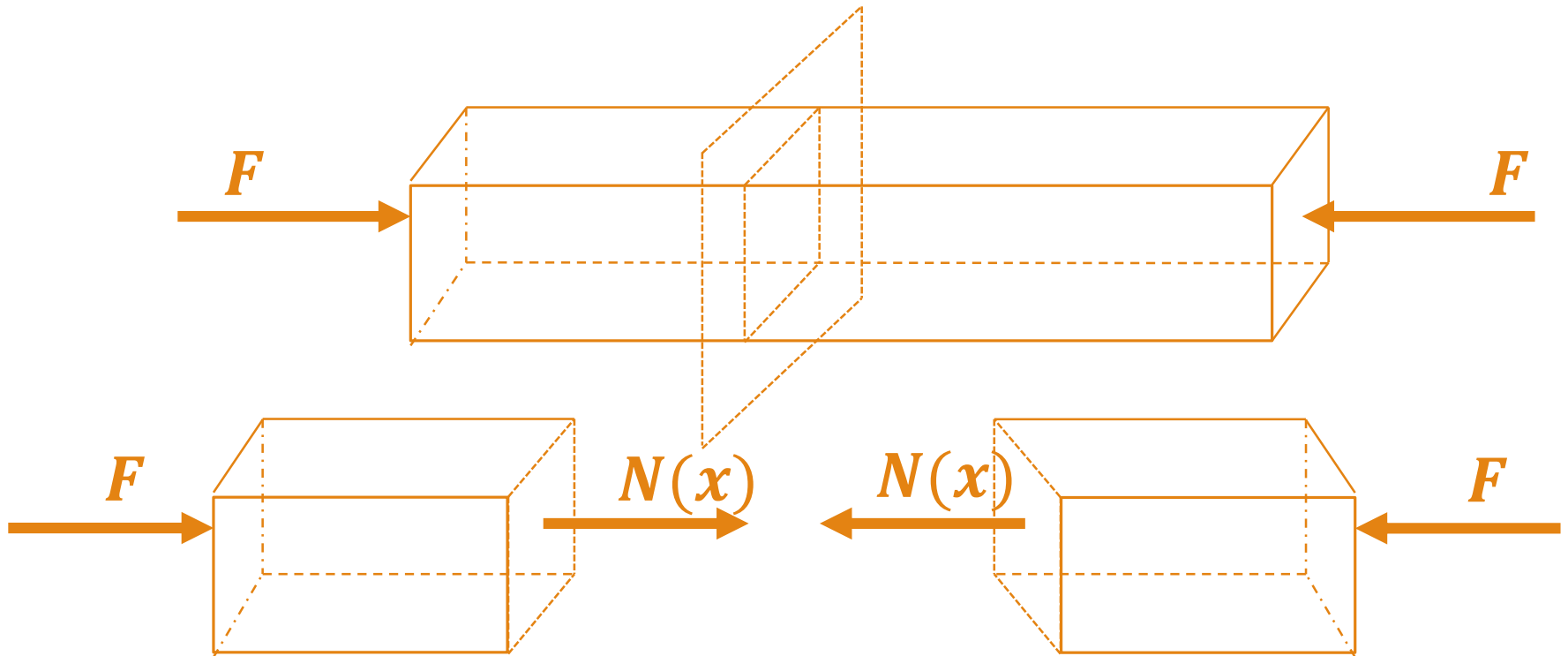
- Si  $N > 0$  c'est une **traction**
- Si  $N < 0$  c'est une **compression**



# Traction



# Compression



L'équilibre du tronçon gauche

$$N(x) = -F$$

L'équilibre du tronçon droit

$$N(x) = -F$$



# Essai de traction

---

Un essai de traction normalisé consiste à exercer un effort de traction sur une éprouvette en acier.

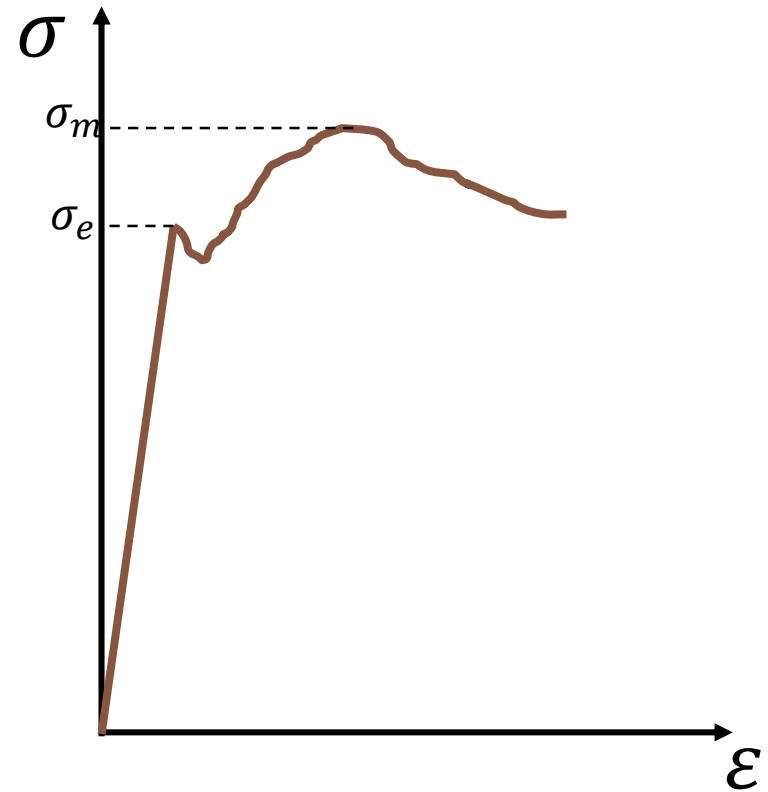
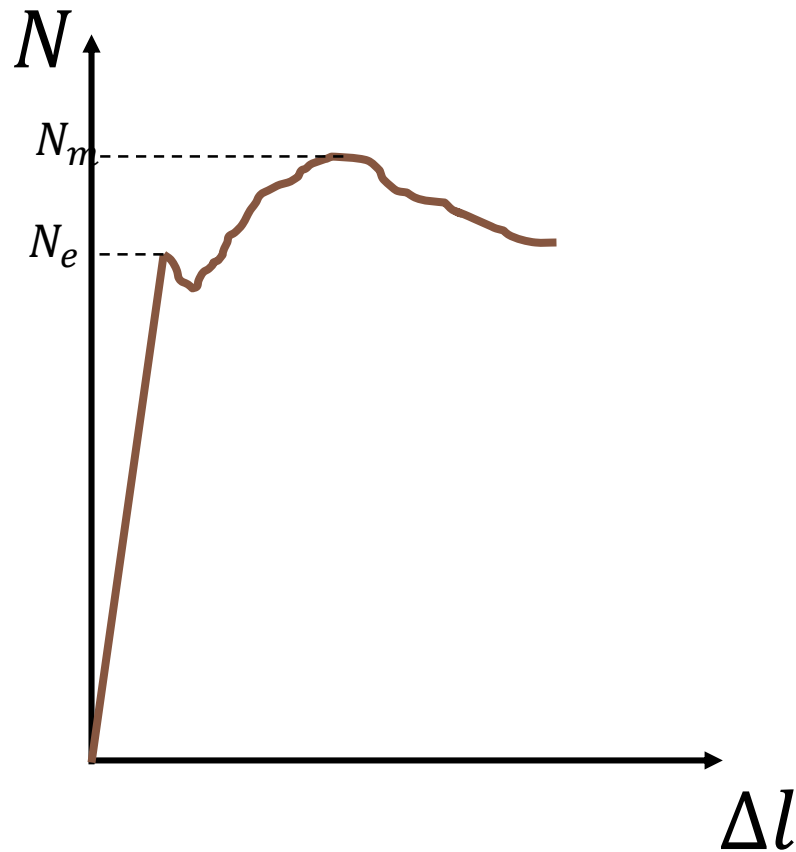
Lors de l'essai de traction, l'effort normal  $N$  est enregistré en fonction de l'allongement  $\Delta l$

On représente cependant la contrainte  $\sigma$  en fonction de la déformation  $\varepsilon = \Delta l/l$ . On obtient un diagramme contrainte-déformations.

Sur ce diagramme on peut observer plusieurs domaines de déformations



# Résultat de l'essai de traction



# Interprétation

Dans la zone linéaire, la déformation est élastique et il y a proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation, le phénomène de déformation reste réversible, et si la contrainte est relâchée l'éprouvette retrouve sa longueur initiale .

Le coefficient de proportionnalité  $E$  s'exprime sous la forme de la loi de **Hooke**

$$\text{MPa} \longleftarrow \sigma = \frac{N}{S} \begin{array}{l} \longrightarrow N \\ \longrightarrow \text{mm}^2 \end{array}$$
$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Leftrightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{Loi de Hooke}$$

$E$ : module d'élasticité longitudinal ou module de Young ( $\frac{N}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$ )

L'allongement est alors donné par l'expression

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot S}$$





# Interprétation

---

La valeur maximale du domaine élastique  $\sigma_e$  s'appelle limite élastique, au-delà de laquelle le matériau se déformera plastiquement de façon irréversible.

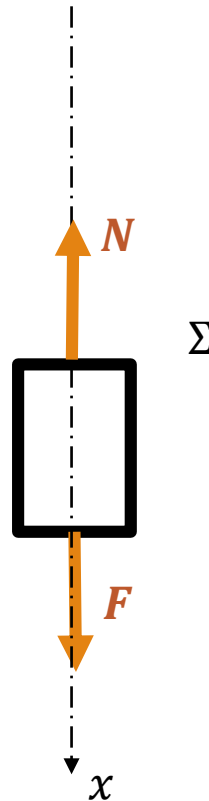
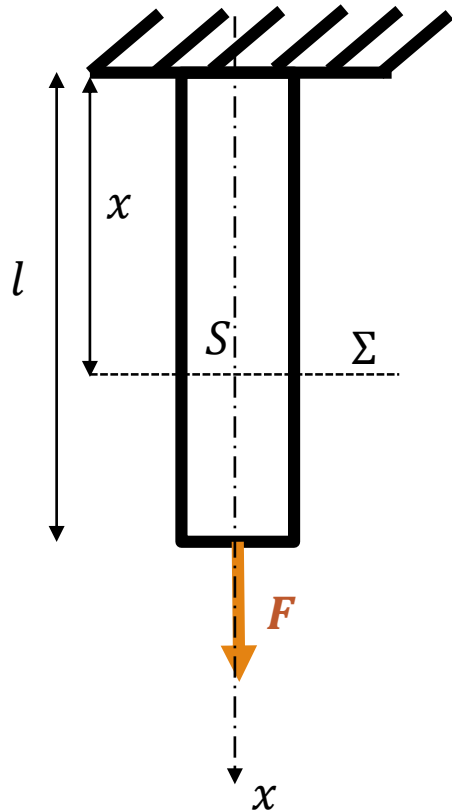
Une diminution du diamètre  $e$  de l'éprouvette. Cette diminution est caractérisée par la relation de proportionnalité  $\frac{\Delta e}{e} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$

Le coefficient de proportionnalité  $\nu$  est appelé **coefficient de Poisson** et est sans dimension. Le signe est dû à la diminution du diamètre lorsque la contrainte augmente.



# Etat de contrainte

Considérons une poutre sollicitée en traction



$$N(x) = \iint_S \sigma \cdot dS$$

$$N(x) = \sigma \iint_S dS$$

$$N(x) = F$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$



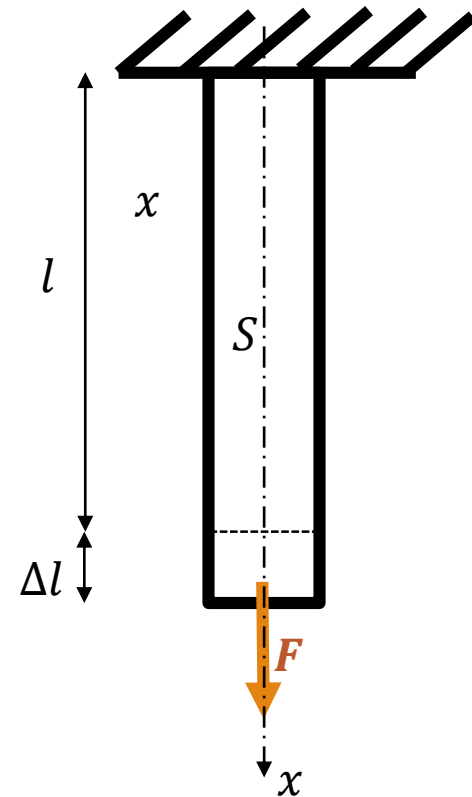
# Etat de déformation

La poutre sollicitée à la traction va subir un allongement  $\Delta l$  donc une déformation  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S}$$



# Condition de résistance

---

La barre doit pouvoir résister en toute sécurité à la sollicitation .

Les déformations  $\varepsilon$  doivent rester dans le domaine élastique

La contrainte normale  $\sigma$  doit être au plus égale à une contrainte limite appelée résistance ou contrainte admissible et notée  $\sigma_{adm}$

Pour tenir compte des hypothèses sur le matériau et sur le mode d'application des forces, on utilise un coefficient de sécurité noté  $s$  tel que  $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{s}$   $s$  varie de 2 à 5.

La condition de résistance est donc

$$\sigma \leq \sigma_{adm}$$



# Flexion simple

---

COURS II



# Flexion plane simple

## Définition

---

On dit qu'une poutre est sollicitée à **la flexion plane simple** si:

- ❑ Le système des forces extérieures se réduit à un système plan.
- ❑ Les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

Une poutre est soumise donc à la flexion simple si son torseur de cohésion s'écrit

$$\tau_{coh} = \begin{cases} N = 0 \\ T \neq 0 \\ M_f \neq 0 \end{cases}$$

La flexion simple est un état de charge tel que dans toute section droite d'une poutre, il n'existe qu'un **moment fléchissant  $M_f$**  et un **effort tranchant  $T$** .



# Flexion plane simple

## Hypothèses supplémentaires spécifiques à la flexion

---

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne
  
- La poutre admet un plan de symétrie
  
- Toutes les forces appliquées à la poutre sont :
  - Perpendiculaires à la ligne moyenne
  - Situées dans le plan de symétrie longitudinal ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci
  - Soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.



# Flexion plane simple

## Détermination des efforts internes.

---

L'objectif étant de **dimensionner** une poutre, il faut donc déterminer les **sollicitations maximales**

Pour cela il faut tracer les **diagrammes** des **efforts internes** appelés également **diagrammes** des **efforts de cohésion**

**Comment déterminer les efforts de cohésion ?**

## Méthode des sections

il faut donc .....





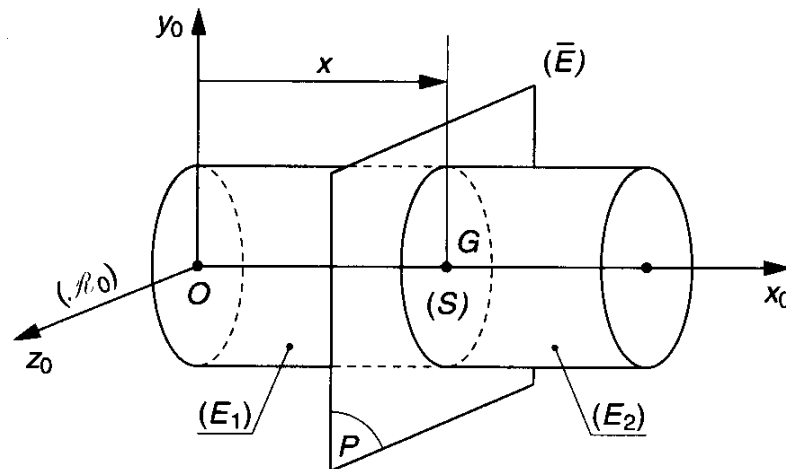
# Flexion plane simple

## Détermination des efforts internes.

Isoler la totalité de la structure et déterminer les inconnues de liaisons

Connaitre toutes les actions extérieures

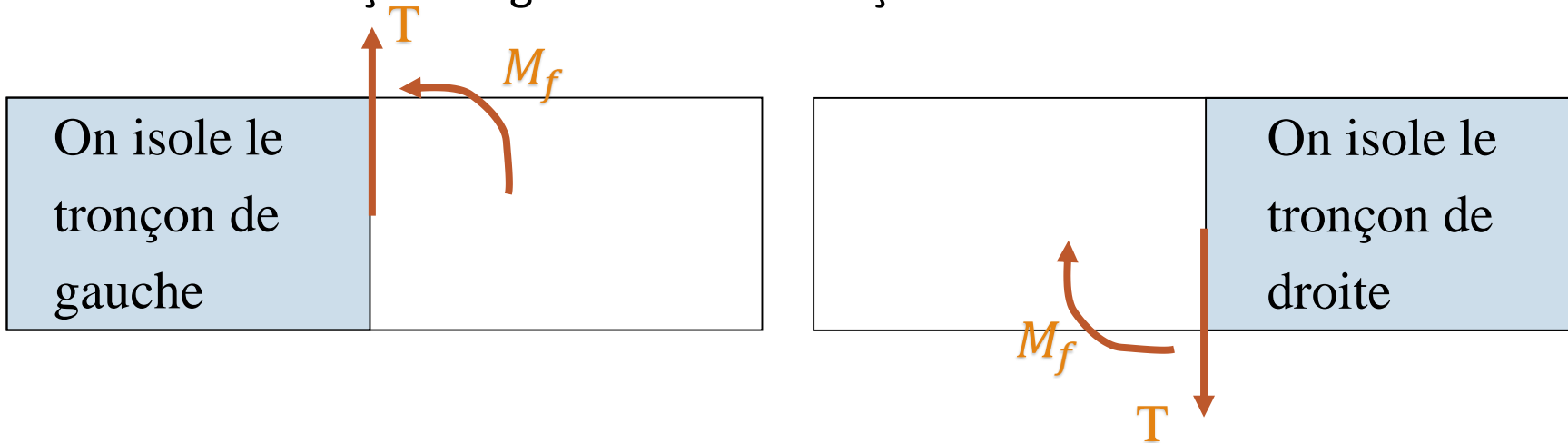
Réaliser une coupure au niveau d'une section



# Flexion plane simple

## Détermination des efforts internes.

Isoler le tronçon de gauche ou le tronçon de droite



Faire sur la partie isolée le bilan des forces.

Entre le tronçon de gauche et le tronçon de droite une liaison d'encastrement transmet trois composantes d'action:

$T(x)$  : Effort Tranchant

$M_f(x)$ : Moment Fléchissant



# Flexion plane simple

## Détermination des efforts internes.

---

Appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) sur le tronçon isolé

$$T(x) = - \sum F_{exty} \text{ du tronçon de gauche} = \sum F_{exty} \text{ du tronçon de droite}$$

$$M_f(x) = - \sum M_{F/p} \text{ du tronçon de gauche} = \sum M_{F/p} \text{ du tronçon de droite}$$

Répéter les coupures autant que nécessaire pour parcourir toute la poutre et finir par tracer les diagrammes des efforts internes T et M en fonction de x (abscisse du centre de gravité de la section où on coupe)



# Flexion plane simple

## Contrôle des diagrammes $T$ et $M$ .

---

Là où  $T$  est nul,  $M$  a une valeur maximale.

Là où  $T$  passe par la valeur zéro de façon discontinue, le diagramme de  $M$  perd son allure monotone .

Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées  $T$  subit un saut, le diagramme de  $M$  présente un point anguleux ( $M$  change de pente).

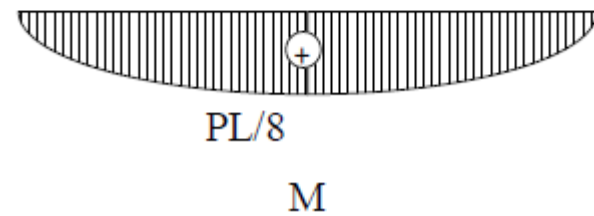
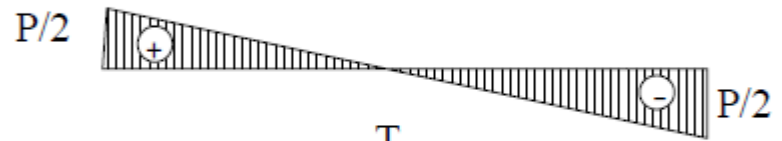
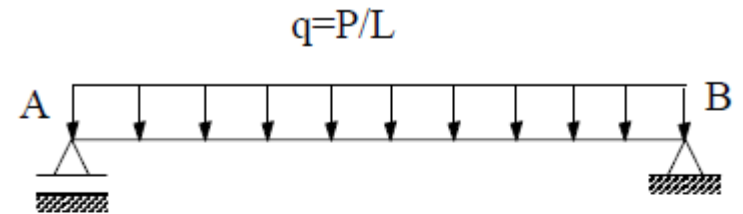
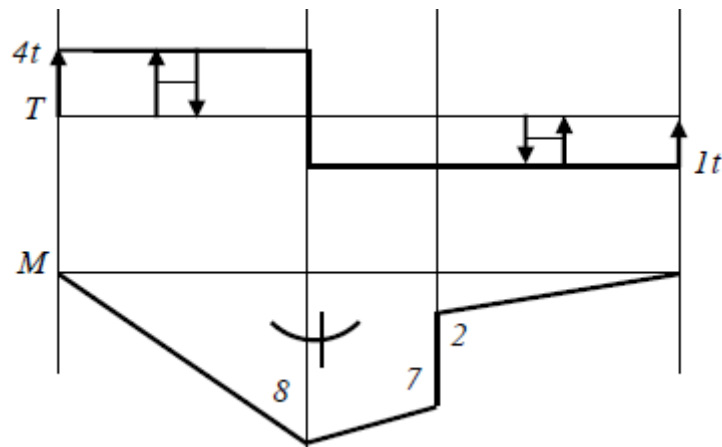
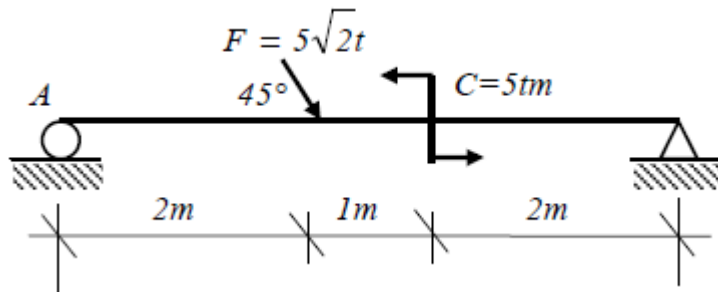
Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués  $M$  subit un saut proportionnel à ces moments tandis que sur  $T$  il n'aura aucune modification.

Le diagramme de  $M$  d'un système symétrique (géométrie et chargement) est symétrique tandis que celui de  $T$  est antisymétrique.



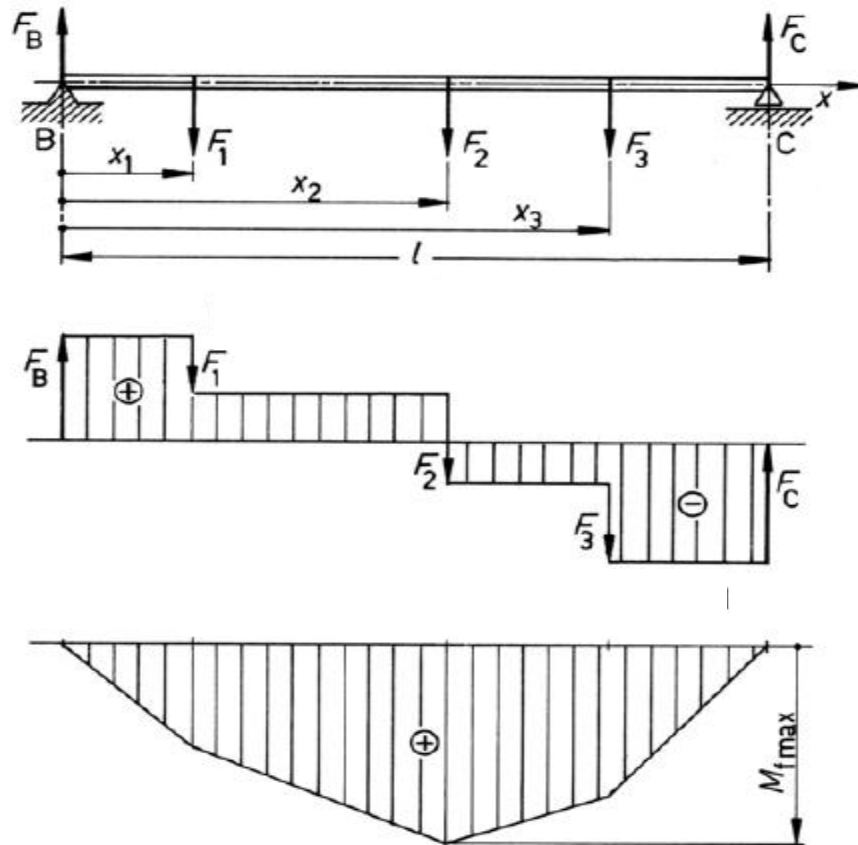
# Flexion plane simple

## Contrôle des diagrammes T et M.



# Flexion plane simple

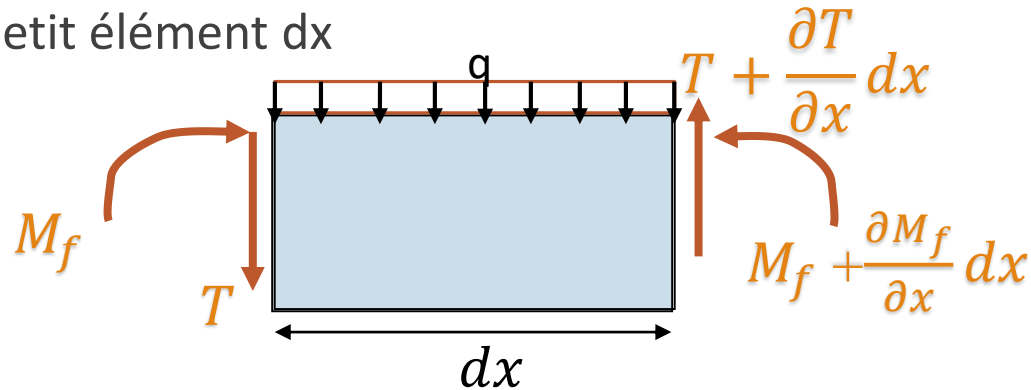
## Contrôle des diagrammes T et M.



# Flexion plane simple

## Relation Moment fléchissant-Effort tranchant

Considérons un petit élément  $dx$



L'équilibre des forces verticales de l'élément  $dx$  permet d'écrire

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - q dx = 0 \Rightarrow q = \frac{\partial T}{\partial x}$$

L'équilibre des moments de l'élément  $dx$  permet d'écrire

$$M_f + \frac{\partial M_f}{\partial x} dx + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dx - q dx^2 - M_f = 0$$

On néglige les termes d'ordre 2

$$T = - \frac{\partial M_f}{\partial x}$$



# Flexion plane simple

## Relation Moment fléchissant- Charge

---

L'équilibre des forces verticales de l'élément  $dx$  permet d'écrire

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - q dx = 0 \Rightarrow q = \frac{\partial T}{\partial x}$$

L'équilibre des moments de l'élément  $dx$  permet d'écrire

$$M_f + \frac{\partial M_f}{\partial x} dx + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dx - q dx^2 - M_f = 0$$

On néglige les termes d'ordre 2

$$T = - \frac{\partial M_f}{\partial x}$$

En substituant la 2ème équation dans la 1ère, on obtient

$$q = - \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2}$$





# Flexion plane simple

## Dimensionnement et vérification

---

la résistance des matériaux est caractérisée  
par des **contraintes admissibles**.

**Il faut donc calculer les contraintes maximales  
dus à la flexion simple!!!!**



# Flexion plane simple

## Dimensionnement et vérification. Notion de contrainte

Dans une poutre sollicitée en flexion apparaissent des contraintes  $\sigma$  normales à la surface  $S$  engendrées par le moment fléchissant, et des contraintes  $\tau$  tangentiels à la surface  $S$  engendrées par l'effort tranchant.

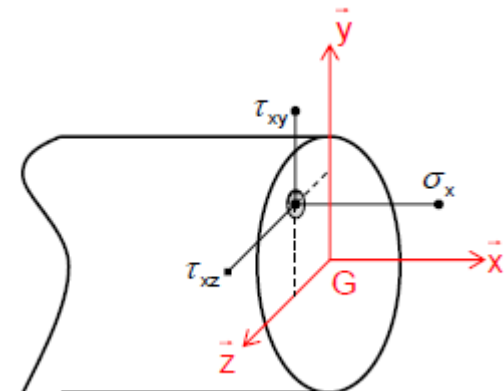
Les contraintes normales sont prépondérantes pour le dimensionnement d'une poutre soumise à la flexion.

Effet des contraintes sur un cube élémentaire entourant un point de la poutre



les contraintes normales provoquent un allongement ou un raccourcissement du cube

les contraintes tangentiels créent une distorsion du cube



# Flexion plane simple

## Dimensionnement et vérification. Contraintes Normales

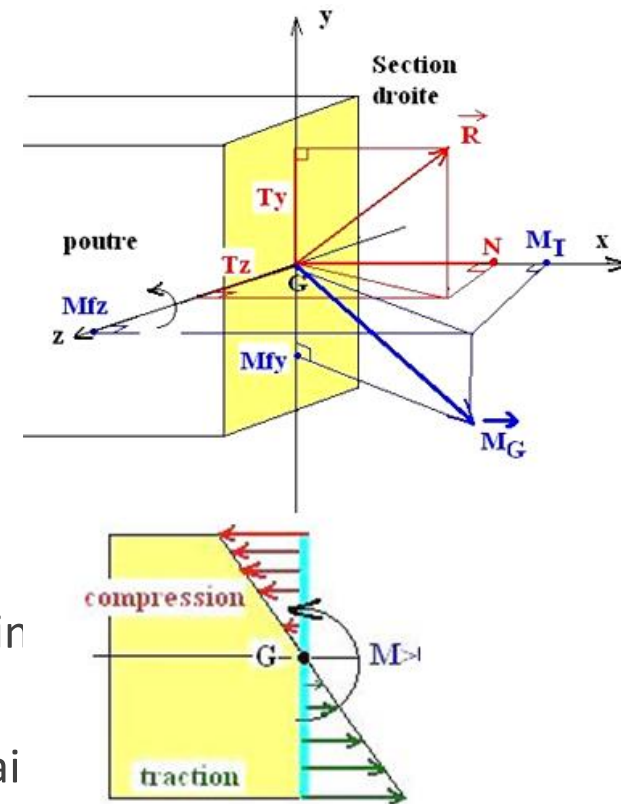
Le moment fléchissant  $M_{fz}$  tend à faire tourner la section droite autour de  $Gz$  dans le plan  $(xy)$ .

Il engendre une compression et une traction de part et d'autre de la fibre moyenne.

Les fibres positives (supérieures) sont comprimées (contraintes normales négatives  $\sigma_x < 0$ )

Les fibres négatives (inférieures) sont tendues (contraintes normales positives  $\sigma_x > 0$ )

La fibre de la ligne moyenne garde sa longueur (contrainte normale nulle  $\sigma_x = 0$ ). Elle est appelée **fibre neutre**



# Flexion plane simple

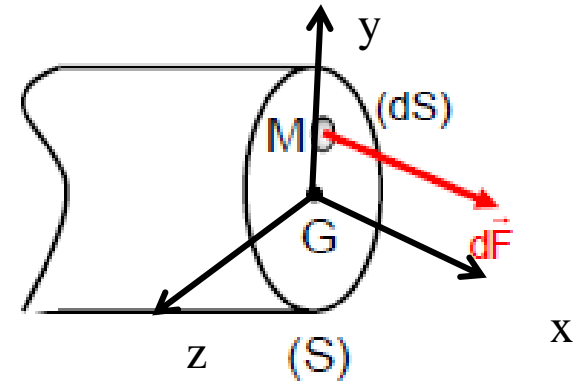
## Dimensionnement et vérification. Relation Contraintes-Moment fléchissant

La fibre de section  $dS$  à distance  $y$  subit une force élémentaire:

$$dF = \sigma_x dS$$

La force s'exerçant à une distance  $y$  de la fibre neutre engendre un moment élémentaire autour de l'axe  $Gz$ :

$$dM_z = -\sigma_x y dS$$



Le moment résultant de toutes les forces agissant sur la section:

$$M_z = \iint_S -\sigma_x y dS$$



# Flexion plane simple

## Dimensionnement et vérification. Relation Contraintes-Moment fléchissant

La relation moment-contrainte s'écrit  $M_z = - \int y \sigma_x ds$

$\sigma_x$  est la contrainte normale à la section, elle est dans la direction de l'axe longitudinal  $x$

Pour  $M > 0$

- $y > 0$   $\sigma_x < 0$  (*Compression*);
- $y < 0$   $\sigma_x > 0$  (*traction*);
- $y = 0$   $\sigma_x = 0$  (*Axe Neutre (A.N)*)

L'hypothèse de la Conservation de la planéité des sections droites implique que les déformations sont linéaires.

Loi de Hooke (relation contraintes-déformations) est linéaire donc les Contraintes sont linéaires et leur équation s'écrit

$$\sigma_x = f(y) = ay + b$$



# Flexion plane simple

## Dimensionnement et vérification. Relation Contraintes-Moment fléchissant

---

Fibre moyenne neutre  $\sigma = 0$  à  $y = 0$  Donc  $\sigma_x = f(y) = ay$

$$M_z = - \int y \sigma_x ds = - \int y^2 a ds = -a \int y^2 ds$$

$$a = - \frac{M_z}{\int y^2 ds} \text{ or } I_z = \int y^2 ds$$

$$\sigma_x = - \frac{M_z}{I_z} y$$

C'est la relation contrainte normale-moment fléchissant où

$M_z$  : Moment fléchissant

$I_z$  : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $z$

$y$  : Distance de la fibre sur laquelle agit la contrainte à l'axe neutre.



# Flexion plane simple

## Condition de résistance. Dimensionnement

---

La contrainte normale maximale agit sur la fibre la plus éloignée de l'axe neutre  $y_{max}$

$$\sigma_{xmax} = -\frac{M_z}{I_z} y_{max}$$

Condition de résistance en flexion est donnée par

$$|\sigma_{xmax}| = \frac{|M_{zmax}|}{I_z} y_{max} < \sigma_{adm}$$

Les dimensions de la section droite de la poutre sont déterminées à partir du moment d'inertie selon la condition de résistance

On définit également le **Module de résistance** à la flexion

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$



# Flexion plane simple

## Déformations des poutres fléchies

---

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements.

Généralement, on fixe, pour les déplacements des sections, des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes.

Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

Dans une section d'une poutre soumise à la flexion simple du plan ( $xy$ ) on a :

Un déplacement parallèle à l'axe  $y$  noté  $v(x)$ .

Une rotation autour de l'axe  $z$  notée  $\theta(x)$ .



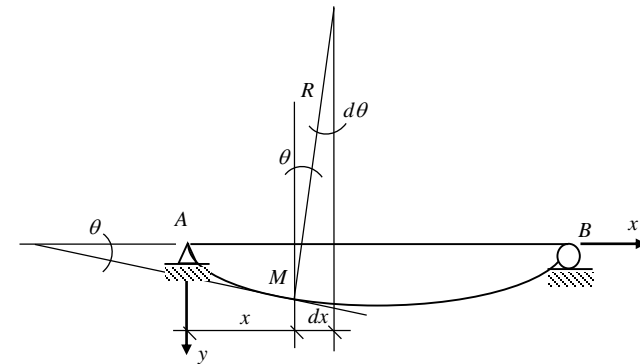
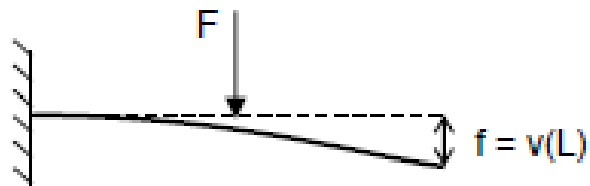
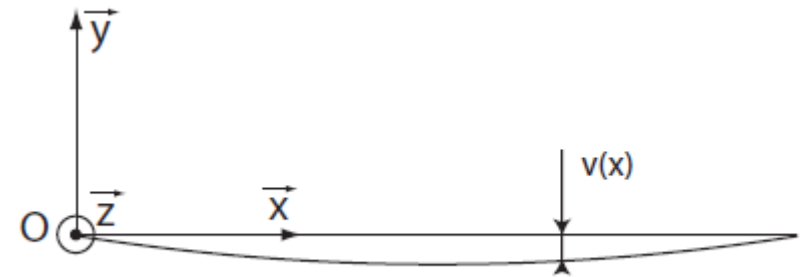


# Flexion plane simple

## Déformations des poutres fléchies

On appelle déformée( ou ligne élastique), l'équation  $v(x)$  de la courbe.

La valeur de la déformée en un point est appelée **flèche**.



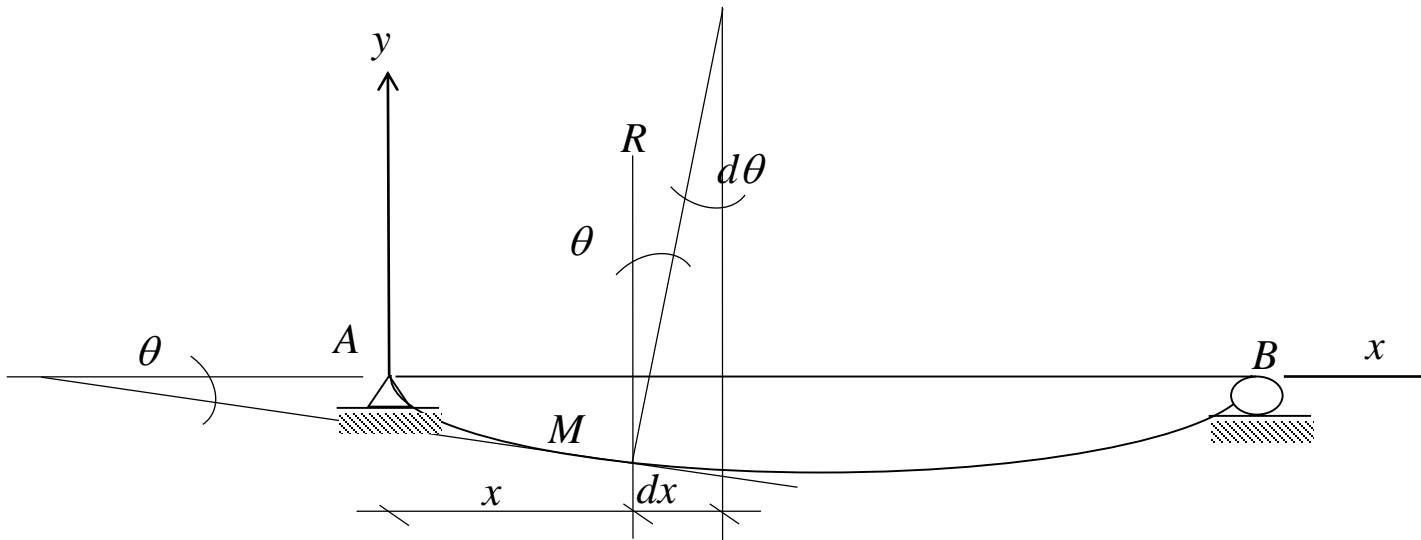
# Flexion plane simple

## Déformations des poutres fléchies

La dérivée première  $v' = \partial v / \partial x$  représente la pente de la tangente à la déformée  $v$  au point courant  $M$ .

Dans le cadre de l'hypothèse admise des petits déplacements, les angles sont très petits et, non seulement on peut confondre la tangente et l'angle

$$\partial v / \partial x = \text{tg} \theta \approx \theta$$



# Flexion plane simple

## Relation Courbure – Moment fléchissant

---

Sous l'effet des forces la poutre va se déformer verticalement

La déformation de la poutre reste faible devant sa portée, les sections droites restent perpendiculaires à l'axe  $x$  après déformation

L'axe neutre ne s'allonge pas  $\rightarrow$  Conservation de sa longueur  $dx$ ;

$cc' = dx$  (figure de la diapo suivante)

Les deux sections planes et normales font un angle  $d\theta$

En prolongeant les segments  $ab$  et  $a'b'$ , elles se coupent en un point  $O$

Comme ce sont des infiniment petits, on peut approcher le tronçon de courbe  $cc'$  par un arc de cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$ .

$R$  est appelé rayon de courbure et son inverse est appelée la courbure

$$\chi = \frac{1}{R}$$



# Flexion plane simple

## Relation Courbure – Moment fléchissant

La fibre moyenne ne s'allonge pas( **Fibre neutre**)

Les fibres au dessus de la fibre neutre sont **Comprimées**

Les fibres au dessous de la fibre neutre sont **Tendues**

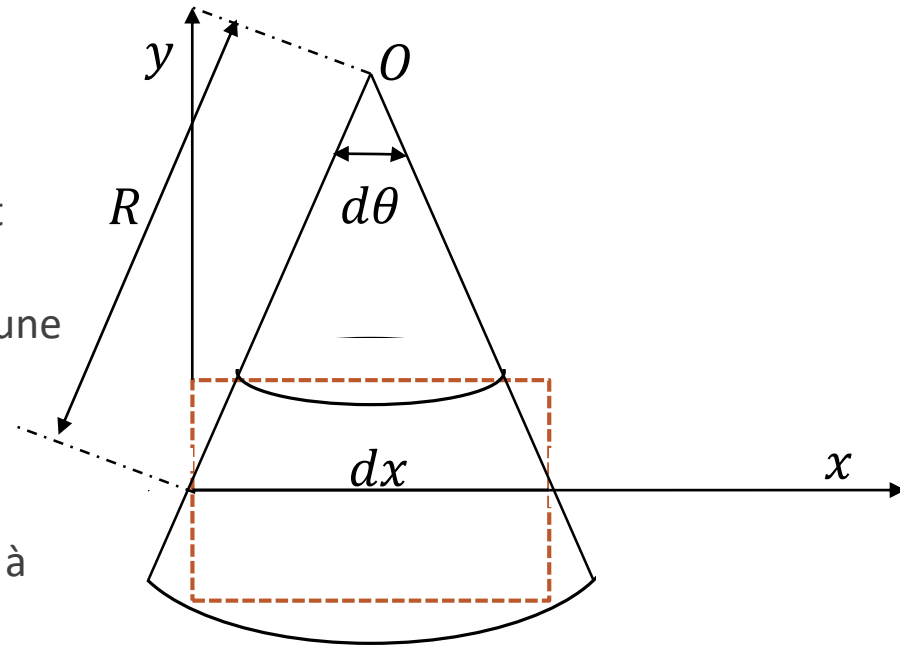
La fibre neutre de longueur  $dx$  prend alors une forme circulaire de centre  $o$  et de rayon  $R$  appelé rayon de courbure

$$cc' = dx \simeq Rd\theta$$

Si on veut la déformation d'une fibre située à une position  $y$  ( $dd'$ )

$$\varepsilon_x(y) = \frac{dd' - cc'}{cc'} = \frac{(R - y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta}$$

$$\varepsilon(x, y) = -y \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{R(x)}$$



# Flexion plane simple

## Relation Courbure – Moment fléchissant

---

$$\varepsilon(x, y) = -y\chi$$

$$\frac{1}{R} = \chi \simeq \frac{d^2v}{dx^2}$$

La loi de Hooke  $\sigma_x(x, y) = E\varepsilon(x, y) = -Ey\chi$

Or  $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y$  donc  $-\frac{M_z}{I_z}y = -Ey\chi$

$$\chi = \frac{M_z}{EI_z} \simeq \frac{d^2v}{dx^2}$$

Ou  $v(x)$  représente le déplacement, selon l'axe  $y$ , d'un point de coordonnées  $(x, y)$



# Flexion plane simple

## Equation de la déformée et calcul de la flèche

---

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

Est l'équation de la dérivée seconde de la déformée

Il faut deux (02) intégrations pour déterminer l'équation  $v(x)$  de la déformée.

Après une intégration on obtient la rotation  $\theta(x)$

Les constantes d'intégrations sont déterminées en utilisant les **conditions aux limites** et les **conditions de continuité**



# Systemes hyperstatiques

---

COURS III



# Systeme hyperstatique

## L'hyperstaticité. Définition

---

On définit trois types d'hyperstaticité

**L'hyperstaticité externe** qui considère la structure comme indéformable et qui porte sur les liaisons externes (réactions).

**L'hyperstaticité interne** qui porte sur des mécanismes dus aux liaisons internes (éléments de réductions).

**L'hyperstaticité totale** constituée par la somme des deux.

Le degré d'hyperstaticité est donc le nombre de liaisons surabondantes par rapport à la juste stabilité





# Systeme hyperstatique

## Degré d'hyperstaticité

---

Le **degré d'hyperstaticité** d'une structure renseigne donc sur son niveau de stabilité. Elle est considérée stable si aucune de ses parties ne se déplace librement dans l'espace.

Une structure **hypostatique** n'est pas stable (instable). Il lui manque des liaisons.

Une structure **isostatique** est juste stable, la suppression d'une liaison la rendrait instable.

Une structure **hyperstatique** est plus que stable, une ou plusieurs liaisons surabondantes peuvent être supprimées sans affecter sa stabilité.



# Systeme hyperstatique

## Degré d'hyperstaticité

---

On rappelle que dans un problème plan on compte:

- Une liaison pour un appui simple
- Deux liaisons pour un appui double
- Trois liaisons pour un encastrement
- Une liaison pour une barre biarticulée

On rappelle aussi que dans un problème plan on compte trois équations d'équilibre

- $\sum F_X = 0$
- $\sum F_Y = 0$
- $\sum M/p = 0$



# Systeme hyperstatique

## Degré d'hyperstaticité

---

Les liaisons surabondantes rendent le calcul des réactions et des efforts internes impossible par les seuls équations de la statique.

Lorsque les liaisons surabondantes ne sont que des réactions l'hyperstaticité est dite extérieure et le degré d'hyperstaticité se calcule par

$$DH = NR - NE$$

Où

$DH$ : Degré d'hyperstaticité

$NR$ : Nombre de réactions

$NE$ : Nombre d'équations.  $NE = \begin{cases} 3 & \text{Si structure en 2D} \\ 6 & \text{Si structure en 3D} \end{cases}$



# Systeme hyperstatique

## Degré d'hyperstaticité

---

Lorsque les liaisons surabondantes sont des efforts intérieurs (éléments de réduction) l'hyperstaticité est dite intérieure et le degré d'hyperstaticité dépend de la structure



# Systemes hyperstatiques

## Méthodes de résolution

---

Deux méthodes sont à disposition pour résoudre les structures hyperstatiques

1. La méthode des forces
2. La méthode des déplacements.



# Systemes hyperstatiques

## Méthode des forces (MF)

---

Dans la méthode des forces, les inconnues sont des forces. Le terme «forces» doit être compris ici dans son sens général, ces inconnues pouvant être des efforts internes, des réactions d'appui, des moments de flexion (ou des paires de moments de flexion, etc.).

Pour résoudre le système, des conditions supplémentaires de déformation sont exprimées. Ces conditions de déformation se nomment conditions de *compatibilité cinématique*.



# Systemes hyperstatiques

## Méthode des déplacements (MD)

---

Dans la méthode des déplacements, les inconnues sont des déplacements. Le terme «déplacements» doit être compris dans son sens général, les inconnues pouvant être des rotations ou des translations.

La méthode des déplacements s'applique aussi bien à des structures hyperstatiques qu'isostatiques.

Concrètement, des conditions supplémentaires d'*équilibre* sont exprimées pour résoudre le système.



# Systemes hyperstatiques

## Systeme fondamental

---

Dans la procédure de résolution, par les deux méthodes, un système structural, dérivé de la structure à analyser, occupe un rôle important. C'est le système fondamental qui est défini comme étant le système dans lequel les inconnues sont nulles (système de base).

Dans la méthode des forces, le système fondamental est issu du système initial par des coupures effectuées afin de supprimer les liaisons surabondantes; il est nécessairement isostatique et dépend des inconnues choisies pour la résolution.

Dans la méthode des déplacements, le système fondamental est issu du système initial par les blocages effectués afin d'exprimer les conditions d'équilibre. Il est encore plus hyperstatique que le système initial, car il résulte d'un système hyperstatique, après autant de blocages que d'inconnues utilisées.





# Systemes hyperstatiques

## Systeme à résoudre

---

Les conditions de *compatibilité cinématique* (méthode des forces) ou d'*équilibre* (méthode des déplacements) s'expriment mathématiquement par un système linéaire d'équations dont la résolution fournit les valeurs des inconnues.

Les équations qui expriment les conditions de compatibilité cinématique ou d'équilibre sont composées de coefficients  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{i0}$  ou  $r_{ij}$ ,  $r_{i0}$  respectivement. Le coefficient  $\delta_{ij}$  représente, dans le système fondamental, le déplacement associé à l'inconnue  $X_i$  dû à l'action **unique** et **unitaire** de l'inconnue  $X_j$ . Le coefficient  $r_{ij}$  représente, dans le système fondamental, l'effort associé à l'inconnue  $X_i$  dû à l'action **unique** et **unitaire** de l'inconnue  $X_j$ .



# Systemes hyperstatiques

## Systeme à résoudre

---

Les coefficients  $\delta_{ij}$  forment la matrice de flexibilité du système et les coefficients  $r_{ij}$  forment la matrice de rigidité du système.

Les matrices de flexibilité et de rigidité sont symétriques et sont inverses l'une de l'autre (théorème de Betti-Rayleigh)

Les coefficients  $\delta_{ij}$  et  $r_{ij}$  sont intrinsèques au système analysé et sont indépendants du cas de charge examiné. Par conséquent, ils ne doivent pas être modifiés lors de l'étude d'un cas de charge différent.

Par contre les coefficients  $\delta_{i0}$  et  $r_{i0}$  sont, par définition, liés au cas de charge considéré et doivent donc évidemment être modifiés pour un autre cas de charge.

Les diagrammes des efforts intérieurs s'obtiennent par superposition. Pour la méthode des forces, on peut également les obtenir en déterminant préalablement les réactions d'appui correspondantes.



# Méthode des forces (MF)

---

COURS IV



# Systemes Hyperstatiques

---

Un systeme hyperstatique est un systeme ou les **equations d'equilibre** ne suffisent pas a calculer les **forces**. Il y a plus d'inconnues que d'equations d'equilibre car le systeme comporte une surabondance de « liaisons » internes et/ou externes. Le nombre de ces liaisons est appele degre d'hyperstaticite.

On doit alors faire appel a d'autres types d'equations de la RDM pour completer le systeme d'equations a resoudre. On aura alors recours aux equations liees a la cinematique de la structure: la continuite des **deplacements** / la **compatibilite** des deformations.

La loi de Hook permet d'assurer la relation **forces – deplacements** (contrainte – deformation).



# Principe de la MF

---

L'idée de la MF est de supprimer les liaisons surabondantes (par des coupures ou en supprimant des appuis) pour définir un système isostatique de base. Les liaisons supprimées sont remplacées par les efforts correspondants qui sont inconnus. Ce sont les Inconnues Hyperstatiques (IH).

Chaque IH, ainsi que le chargement extérieur, déforment le système de base, particulièrement au droit des liaisons supprimées. Les calculs de ces déformations sont longs mais relativement aisés vu l'isostatisme du système de base.

En utilisant le principe de superposition (PS), on pose ensuite des équations en fonction des IH, de façon à **retrouver** la cinématique (les liaisons) de la structure initiale. Leur solution donne les IH.



# Décomposition du problème

---

Soit une structure hyperstatique d'ordre  $N$  ( $IH = N$ ), sollicitée par un chargement extérieur.

Par application du PS, le système hyperstatique est décomposé en

- **Un système fondamental isostatique** (noté  $Sys_0$ ) à partir du système initial, en enlevant **toutes** les liaisons surabondantes (hyperstatiques) et en conservant le **chargement extérieur**.
- **$N$  systèmes** (notés  $Sys_i$   $i$  variant de 1 à  $N$ ) correspondant aux inconnues hyperstatiques, obtenus à partir du système isostatique **chargé uniquement** par les inconnues hyperstatiques



# Recomposition du problème par le principe de superposition (PS)

---

On peut alors écrire

$$Sys_{Hyper} = Sys_0 + \sum_i^n Sys_i$$

Ou bien

$$Sys_{Hyper} = Sys_0 + \sum_i^n \overline{Sys}_i \cdot X_i$$

où le système  $\overline{Sys}_i$  est le système identique à  $Sys_i$  mais avec une force (ou un moment) unitaire.



# Recomposition du problème par le principe de superposition

---

Pour toute variable  $\Delta$ ,

- $\Delta_0$  est la valeur de cette variable pour le système  $Sys_0$
- $\bar{\Delta}_i$  est sa valeur pour le système  $\overline{Sys}_0$

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_i^n \bar{\Delta}_i \cdot X_i$$

$\Delta$  peut être un déplacement, une déformation, une réaction, un effort interne....





# Calcul des inconnues hyperstatiques

## Résolution des systèmes associés

---

Pour la détermination des inconnues hyperstatiques, il faut résoudre

- le système isostatique associé ainsi que les systèmes associés à chaque inconnue hyperstatique.
- Il faudra notamment, tracer les diagrammes des projections locales du torseur des efforts intérieurs à prendre en compte dans l'énergie.
- Si par exemple la flexion est dominante donc on ne trace que le diagramme du moment fléchissant pour chaque système.



# Calcul des inconnues hyperstatiques

## Application du théorème de CASTIGLIANO

Si les liaisons sont rigides, alors les déplacements associés à chaque projection des actions hyperstatiques sont nuls.

- Dans le cas où l'action est un moment, la rotation correspondante est nulle.
- Dans le cas où l'action est une force, la translation correspondante est nulle.

$$\frac{\partial W_e}{\partial X_k} = 0$$

Suivant les hypothèses faites et la dimension de l'espace considéré, l'énergie est la somme de  $m$  termes provenant des types de sollicitations  $j$  affectés des caractéristiques de raideur  $\lambda_j$  correspondantes.

$$W_e = \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j^2}{2\lambda_j} ds \quad ; \quad \text{avec} \quad \Delta_j = \Delta_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta_{ji}} ds$$



# Calcul des inconnues hyperstatiques

## Application du théorème de CASTIGLIANO

---

$$\frac{\partial W_e}{\partial X_k} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Delta_j^2}{2\lambda_j \partial X_k} ds = \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j \partial \Delta_j}{\lambda_j \partial X_k} ds$$

avec  $\frac{\partial \Delta_j}{\partial X_k} = \overline{\Delta_{kj}}$

$$\frac{\partial W_e}{\partial X_k} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{kj}} ds = 0$$

$$X_i \int \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{kj}} ds = - \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{kj}} ds$$



# Calcul des inconnues hyperstatiques

## Application du théorème de CASTIGLIANO

---

$$\text{On pose } \delta_{ik} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ij} \Delta_{jk}}}{\lambda_j} ds$$

$$\Delta_{0k} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{0j}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds$$

$\delta_{ik}$  est le coefficient de flexibilité

$\Delta_{0k}$  est une translation si  $X_k$  est une force, et est une rotation si  $X_k$  est un moment.

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ik} X_i = -\Delta_{0k}$$

L'équation ci-dessus est l'équation d'équilibre à résoudre pour trouver les inconnues hyperstatiques.

Les diagrammes des efforts intérieurs s'obtiennent par superposition. On peut également les obtenir en déterminant préalablement les réactions d'appui correspondantes.



# Méthode des déplacements (MD)

---

COURS V



# Rappel: Systèmes Hyperstatiques / MF

---

Un système hyperstatique est un système où les **équations d'équilibre** ne suffisent pas à calculer les **forces**. On peut utiliser la MF ou la MD.

Dans la MF, on supprime les liaisons surabondantes pour définir un système isostatique de base et des inconnues hyperstatiques. Ces inconnues sont des « forces » introduites pour remplacer les liaisons supprimées. Pour résoudre le problème et calculer ces inconnues, on pose les équations de compatibilité de façon à retrouver la cinématique du système initial.

Ainsi, dans la MF on vérifie d'abord les équations d'équilibre puis, on pose les équations de compatibilité des déplacements pour calculer les inconnues hyperstatiques.

NB: La loi de Hook permet d'assurer la relation **forces – déplacements**.



# Principe de la MD

---

Dans la MD, l'ordre d'utilisation des équations d'équilibre et de compatibilité est inversé. On conserve alors toutes les liaisons du système initial, en considérant que les déplacements des nœuds sont inconnus: **La cinématique de la structure est conservée.**

Une structure est vue comme un ensemble de nœuds (indéformables) reliés par des poutres (déformables). Chaque déplacement/DDL d'un nœud induit des efforts dans ce nœud, et dans les autres nœuds qui lui sont connectés par des poutres. La relation entre les forces induites et le DDL imposé est établie par des **coefficients de rigidité**. Ces coefficients sont obtenus à partir de ceux des poutres isolées.



# Principe de la MD

---

Les **équations d'équilibre** entre les efforts induits par les DDL et les charges appliquées à la structure sont ensuite **posées pour calculer les déplacements/DDL inconnus des nœuds**. On en déduit ensuite les efforts aux extrémités des poutres puis le reste des inconnues de la Mécanique Des Structures (MDS).

Les charges extérieures peuvent être appliquées aux nœuds (Charge nodales) ou sur les poutres (charges en travée).

Dans la MD, les notions de « déplacement/DDL » et de « nœud » sont fondamentales. On commence par les définir.





# Principe de la MD

## Déplacements/DDL d'un point

---

Dans le cas général, la cinématique d'un point matériel est définie par sa translation et sa rotation qui sont représentées par leurs composantes dans un référentiel qu'on se fixe.

Ces composantes sont regroupées dans un vecteur de « déplacements généralisés », communément appelé vecteur de « déplacements » ou vecteur de « Degrés De Liberté » (DDL).

Dans l'espace, la translation et la rotation d'un point ont chacune 3 composantes. Un point matériel a donc 6 DDL dans l'espace.

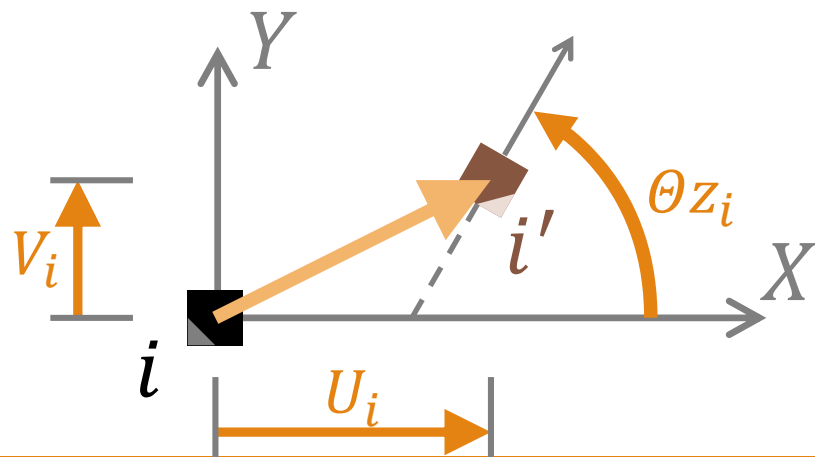


# Principe de la MD

## DDL dans le cas des Portiques Plans

Dans le cas des portiques plans chargés et se déformant dans leur plan, tout point peut subir, en général, une translation (vecteur à 2 composantes dans le référentiel choisi pour le plan) et une rotation autour de la normale au plan. Chaque point  $i$  possède ainsi **3 DDL** qui repèrent sa nouvelle position  $i'$  par rapport à sa position initiale. Si on retient un repère  $XY$  orthonormé direct, les DDL d'un point  $i$  s'écrivent comme suit:

$$\delta_i = \begin{cases} U_i \\ V_i \\ \theta z_i \end{cases}$$



# Principe de la MD

## Les nœuds

---

La MD consiste à déterminer les DDL de certains points particuliers de la structure, appelés **nœuds**.

Les nœuds se situent **obligatoirement** aux intersections entre poutres, aux points présentant des singularités (changement brusque de caractéristiques, discontinuités de DDL) et aux appuis.

- *NB: Des nœuds supplémentaires peuvent être retenus par l'ingénieur d'étude mais ils ne serviront qu'à diviser des poutres en 2 parties ou plus, et auront pour conséquence une augmentation du nombre d'inconnues. On notera aussi qu'on ne peut pas avoir de nœud non connecté à au moins 1 poutre.*

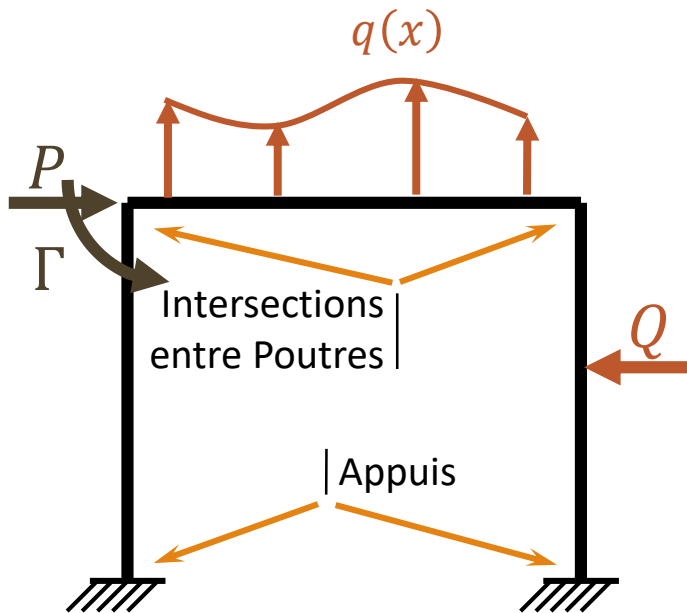
Les nœuds sont supposés indéformables et transmettre intégralement les efforts.

Les nœuds assurent ainsi le **lien** entre les poutres de la structure, et entre la structure et son environnement. Les nœuds appuis sont particuliers dans le sens où certains de leurs DDL sont connus (imposés) alors que les forces qui leur correspondent sont inconnues.



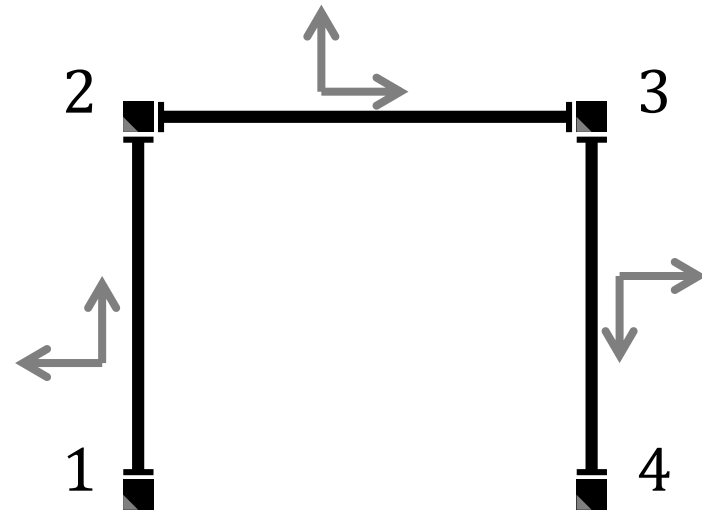
# Principe de la MD

## Illustré à travers un exemple simple



### Structure et chargement

$P$  et  $\Gamma$ : Charges Nodales  
 $q(x)$  et  $Q$ : Charges en travée

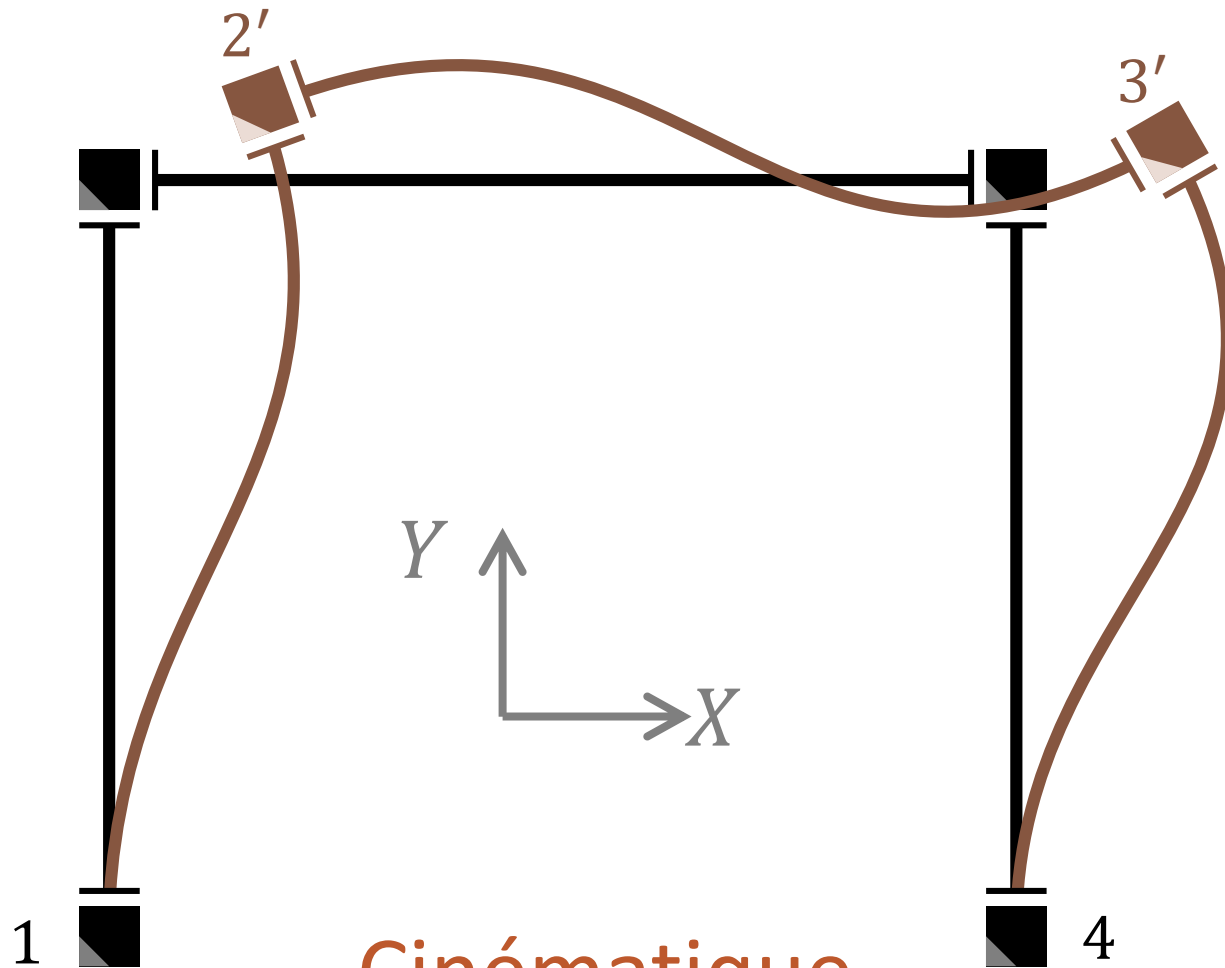


### Le Modèle

(Nœuds, Poutres orientées)

NB: Les DDL des encastremements  
(nœuds 1 et 4) sont nuls/connus





## Cinématique

Allure de la déformée due aux  $(3 \times 2)$  DDL des 2 nœuds libres.

NB: Le Principe de Superposition (PS) permet de la voir comme la superposition des déformées des 6 DDL, pris un à un.



# Principe de la MD

## Équilibre

---

Les **équations d'équilibre** entre les efforts induits par les DDL et les charges appliquées à la structure doivent être posées pour déterminer les DDL inconnus.

Pour les écrire, on utilise le principe de superposition et on opère en deux étapes:

- Partie I: On écrit les forces aux nœuds qui sont induites par les déformations des poutres (suite aux déplacements des nœuds).
- Partie II: On écrit les efforts aux nœuds dus aux charges extérieures seules, sans aucun déplacement des nœuds.

Pour ce faire, il faut pratiquer des coupures afin d'isoler les nœuds des poutres.

Il faut alors assurer la continuité des efforts entre le nœud isolé et la poutre à laquelle il est lié.



# Principe de la MD

## Équilibre (partie I): Notation

---

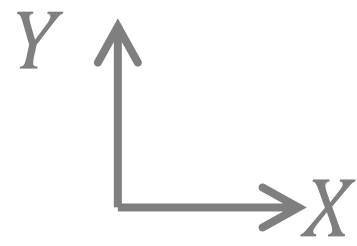
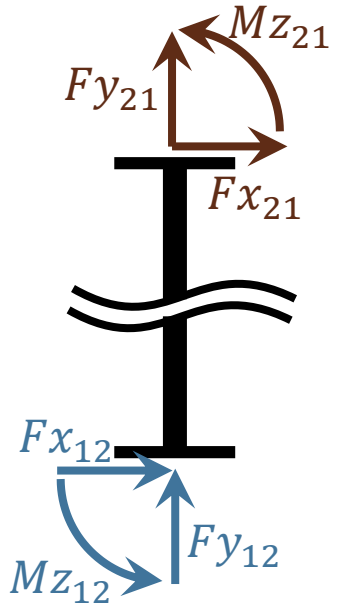
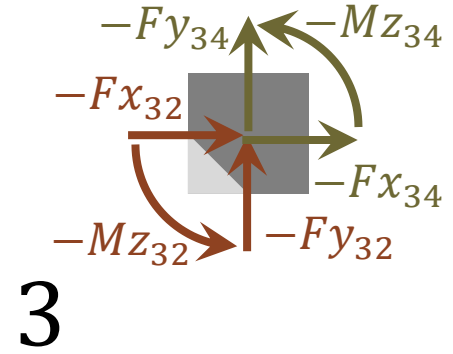
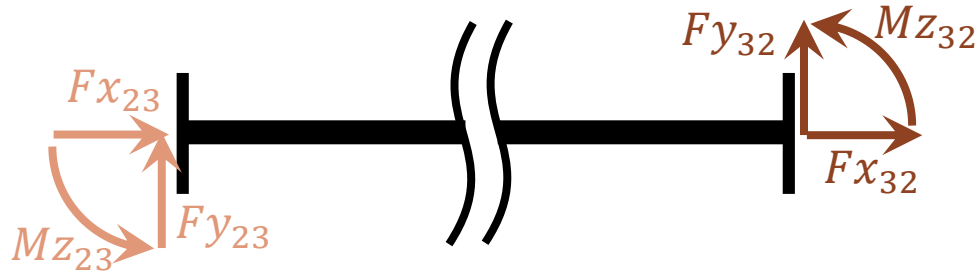
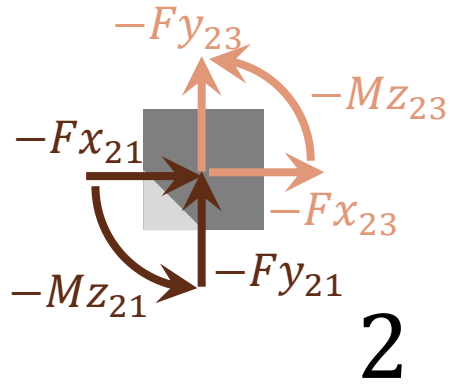
Dans la diapositive suivante, les efforts sont exprimés dans le repère  $XY$  du Plan, et la notation ci-dessous est adoptée:

- $Fx_{ij}$  est l'action du nœud  $i$  sur la poutre  $ij$  suivant l'axe  $X$
- $-Fy_{ij}$  est l'action de la poutre  $ij$  sur le nœud  $i$  suivant l'axe  $Y$
- $Mz_{ji}$  est le moment qu'exerce le nœud  $j$  sur la poutre  $ij$

Ainsi,

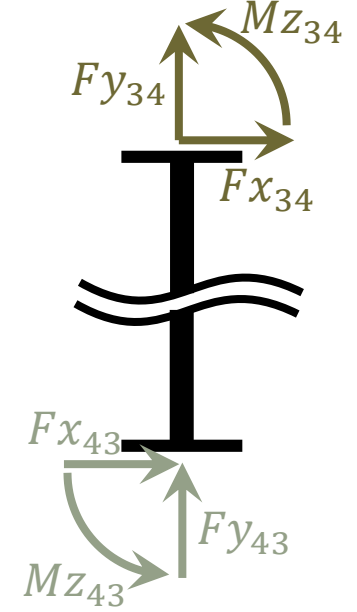
- l'indice cité en premier indique le nœud concerné; les 2 indices définissent la poutre déformée.
- Les actions des nœuds sur les poutres portent un signe (+) et les actions des poutres sur les nœuds le signe (−) afin d'assurer la continuité des efforts.





# Équilibre (Partie I)

Les Efforts induits par les déplacements des nœuds/déformations des Poutres





# Principe de la MD

## Équilibre (partie I):

### Les efforts aux nœuds induits par les déplacements des nœuds

---

D'après la figure, il apparait évident que les efforts induits au niveau d'un nœud résultent de la « somme » des actions des poutres qui lui sont connectées.

Comme tous les efforts sont exprimés dans le même repère, le résultat est immédiat. Pour notre exemple, le cumul des forces induites aux nœuds 2 et 3 valent:

$$Fx_2 = Fx_{21} + Fx_{23} ; Fy_2 = Fy_{21} + Fy_{23} ; Mz_2 = Mz_{21} + Mz_{23}$$

$$Fx_3 = Fx_{32} + Fx_{34} ; Fy_3 = Fy_{32} + Fy_{34} ; Mz_3 = Mz_{32} + Mz_{34}$$

Une étape importante de la MD est d'écrire ces forces en fonction des DDL. On les déduit à partir des relations élémentaires établies pour chacune des poutres, prise isolément. *La procédure sera présentée ultérieurement.*

Pour l'instant on admet que la relation entre les 6 forces ci-dessus et les 6 DDL est établie et qu'elle possède la forme générale illustrée ci-après.



# Principe de la MD

## Équilibre (partie I):

### Forme de la relation efforts induits aux nœuds – déplacements des nœuds

D'une manière générale, en élasticité linéaire, les efforts aux nœuds sont reliés **linéairement** aux déplacements des nœuds qui les provoquent par une matrice dite matrice de rigidité. La forme de cette relation pour l'exemple d'illustration est:

$$\begin{Bmatrix} Fx_2 \\ Fy_2 \\ Mz_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ Mz_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta z_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \theta z_3 \end{Bmatrix}$$

On remarquera que, par exemple, la 4<sup>ème</sup> colonne de cette matrice est égale au vecteur des forces induites aux nœuds en imposant au 4<sup>ème</sup> DDL, soit  $U_3$ , une valeur **unitaire** et en supposant le reste des DDL nuls, c'est-à-dire en les supposant **bloqués**.

Ainsi, les colonnes de la matrice de rigidité pourraient être obtenues séquentiellement en bloquant tous les DLL puis, en leur imposant une valeur unitaire, l'un après l'autre. On calcule à chaque fois les forces induites aux nœuds.



# Principe de la MD

## Équilibre (partie II):

Les efforts aux nœuds dus aux charges extérieures seules (sans aucun déplacement des nœuds)

---

Les forces extérieures appliquées à une structure peuvent être des

- Forces/moments concentrés appliqués aux nœuds, dites charges nodales
- Charges concentrées ou réparties appliquées sur les poutres, dites charges en travée.

Comme on veut écrire les équations d'équilibre des nœuds, les charges nodales ne posent aucun problème.

Pour les charges en travée, il faut calculer les efforts transmis aux nœuds par les poutres chargées. On procède comme précédemment en pratiquant des coupures, afin d'isoler les nœuds des poutres, et on assure la continuité des efforts.



# Principe de la MD

## Équilibre (partie II): Notation

---

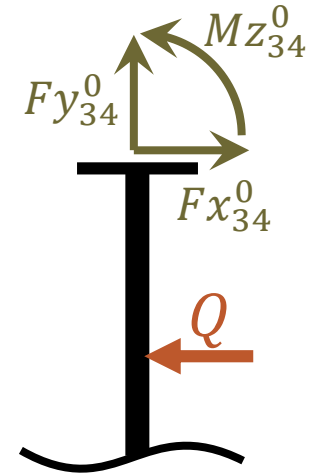
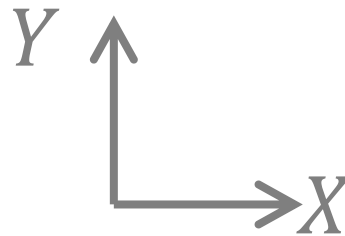
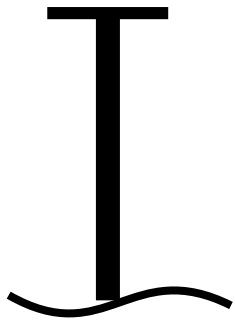
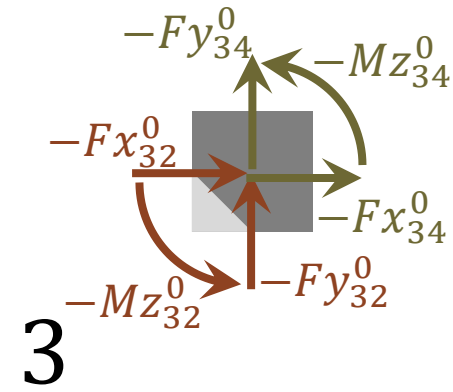
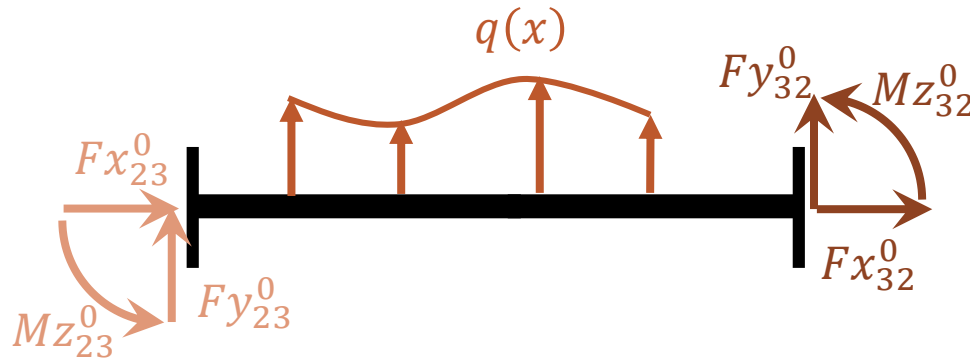
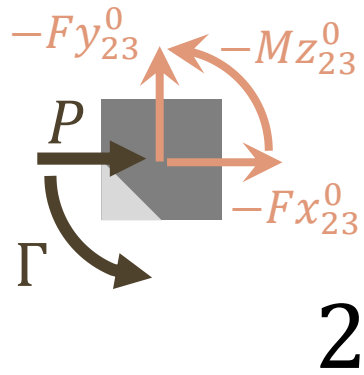
Dans la diapositive suivante, les efforts sont exprimés dans le repère  $XY$  du Plan. Pour toute poutre  $ij$  chargée, la notation ci-dessous est adoptée:

- $Fx_{ij}^0$  est la force au nœud  $i$  de la poutre  $ij$  suivant l'axe  $X$ , due à la charge en travée uniquement.
- $-Fy_{ij}^0$  est l'action de la poutre  $ij$  sur le nœud  $i$  suivant l'axe  $Y$
- $Mz_{ji}^0$  est le moment au nœud  $j$  de la poutre  $ij$ , dû à la charge en travée uniquement.

Ainsi,

- L'exposant 0 indique qu'il s'agit de forces liées aux charges en travées.
- l'indice cité en premier indique le nœud concerné.
- Les actions des poutres sur les nœuds portent le signe  $(-)$  afin d'assurer la continuité des efforts.





## Équilibre (Partie II)

Les Efforts dus aux charges extérieures  
(sans aucun déplacement des nœuds)



# Principe de la MD

## Équilibre des nœuds: (partie I) + (Partie II)

---

On écrit maintenant l'équilibre des nœuds sous les forces induites par les déplacements (partie I) et les charges appliquées à la structure (partie II):

### Equilibre du nœud 2

$$-(Fx_{21} + Fx_{23}) - Fx_{23}^0 + P = 0 ;$$

$$-(Fy_{21} + Fy_{23}) - Fy_{23}^0 = 0;$$

$$-(Mz_{21} + Mz_{23}) - Mz_{23}^0 + \Gamma = 0$$

### Equilibre du nœud 3

$$-(Fx_{32} + Fx_{34}) - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 = 0;$$

$$-(Fy_{32} + Fy_{34}) - Fy_{32}^0 - Fy_{34}^0 = 0;$$

$$-(Mz_{32} + Mz_{34}) - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 = 0$$



# Principe de la MD

## Systeme à résoudre

Ainsi, on a les 6 équations nécessaires au calcul des 6 DDL de la structure qui sont inconnus. Pour les résoudre, on regroupe les termes inconnus à gauche et les termes connus à droite:

$$\left\{ \begin{array}{l} Fx_2 = P - Fx_{23}^0 \\ Fy_2 = 0 - Fy_{23}^0 \\ Mz_2 = \Gamma - Mz_{23}^0 \\ Fx_3 = 0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 \\ Fy_3 = 0 - Fy_{32}^0 - Fy_{34}^0 \\ Mz_3 = 0 - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 \end{array} \right.$$

- Les 0 sont « rajoutés » pour mettre en évidence la « nuance » entre les forces nodales et les forces en travée.
- La relation explicite entre les forces induites par la déformation et les DDL est données par des coefficients de rigidité. *La procédure sera présentée ultérieurement.*



# Principe de la MD

## Solution du système d'équations

---

La solution du système d'équations linaires obtenu précédemment donne les DDL des nœuds.

On en déduit ensuite les valeurs des forces aux extrémités des poutres.

Avec ces résultats, on peut calculer les réactions selon les DDL bloqués (imposés) ainsi que **tous** les paramètres souhaités (efforts internes, contraintes, déplacement en travée, ...) dans toutes les poutres.

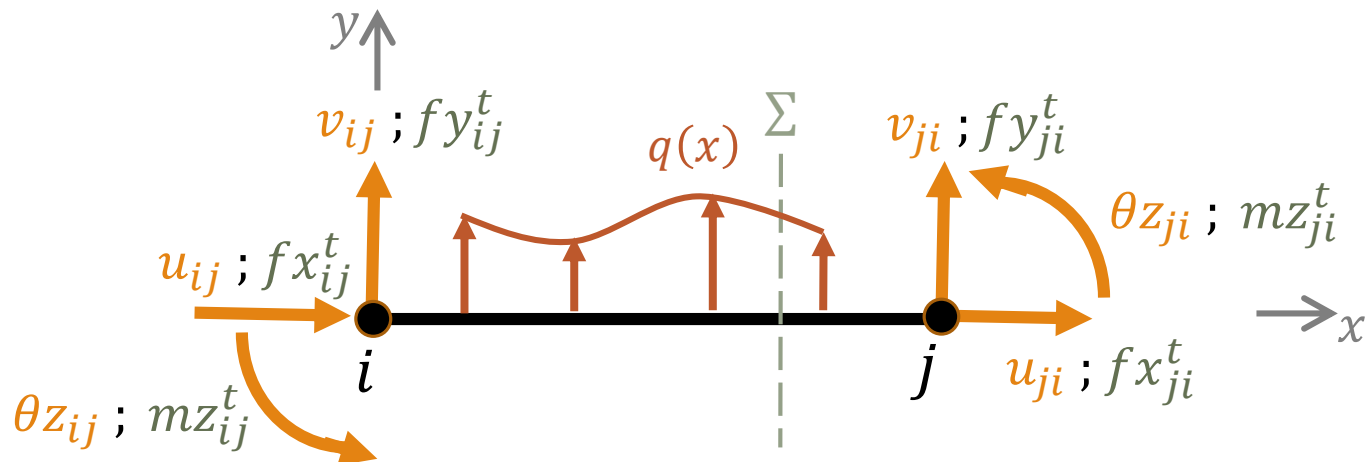




# Principe de la MD

## Calcul des paramètres dans les poutres

Cette étape conclut la procédure de la MD. Le calcul mécanique de la structure et de ses éléments se trouve ainsi « achevé ». En effet, une poutre dont on connaît les déplacements et les forces aux nœuds  $i$  et  $j$  est statiquement déterminée et on peut, grâce à la MDS, calculer tous les paramètres (efforts internes, déplacements, contraintes, etc.) n'importe quelle section  $\Sigma$  d'abscisse  $x$  le long de sa longueur.



# Problématique du choix des DDL et du volume de calculs

Le nombre d'inconnues ( $NDL$ ) de la MD est facile à calculer. C'est le nombre de nœuds de la structure ( $NN$ ) multiplié par le nombre de DDL/nœud ( $NDN$ ). On retranchera le nombre de DDL bloqués/connus au niveau des appuis ( $NDA$ ).

$$NDL = NN \times NDN - NDA$$

Il est évident que le nombre d'inconnues d'une structure de génie civil relativement simple peut être très élevé. La résolution du système d'équations est assez fastidieuse à la main et les ingénieurs, avant l'avènement de l'ordinateur, se sont ingénié à réduire les DDL en exploitant astucieusement des propriétés (symétrie/antisymétrie) et/ou des hypothèses « raisonnables » sur la cinématique de la structure (indéformabilité de certaines parties, ...). D'autres, comme Cross, ont très astucieusement mis en œuvre des techniques de résolution des grands systèmes d'équations algébriques (méthode de relaxation).

Dans ce qui suit, nous allons présenter, à travers notre exemple, comment et pourquoi la MD classique, dite aussi Méthode des Rotations (MR), réduit le nombre de DDL.



# MD vs MF

---

Pour notre exemple à 4 nœuds, deux sont encastrés, c'est-à-dire que tous leurs DDL sont bloqués (nuls).

$$\delta_1 = \begin{cases} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ \Theta z_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \delta_4 = \begin{cases} U_4 = 0 \\ V_4 = 0 \\ \Theta z_4 = 0 \end{cases}$$

Les DDL inconnus sont finalement ceux des nœuds 2 et 3. Autrement-dit, le système à résoudre est de dimension 6.

Si on utilise la MF, notre structure est 3 fois hyperstatique. Le système à résoudre par la MF est de dimension 3. Il est alors évident qu'il vaut mieux étudier cet exemple par la MF, à moins d'utiliser des astuces/techniques pour « alléger les calculs » de la MD.

Pour **réduire le volume de calculs**, il est courant de prendre des hypothèses supplémentaires **cohérentes** avec le comportement « réel » de la structure.

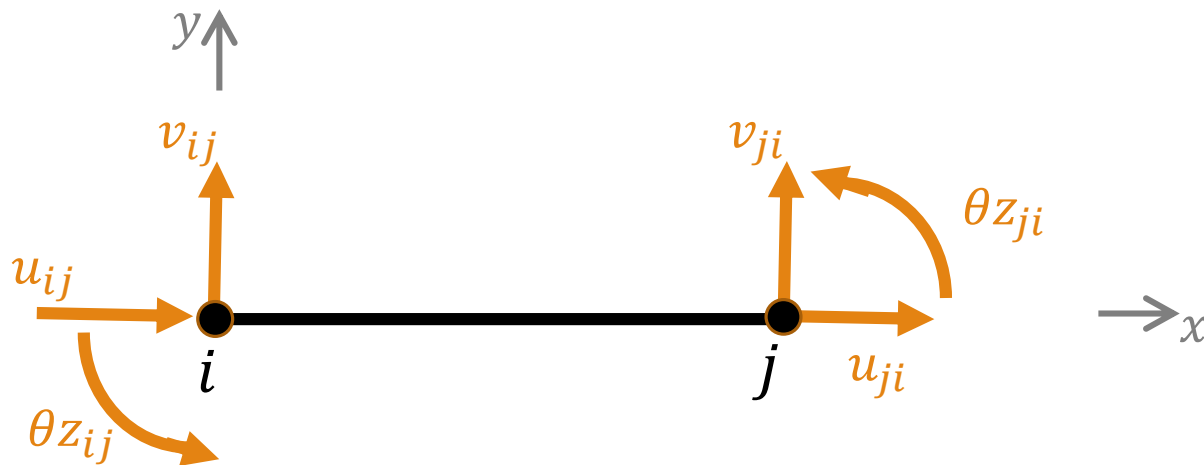


# MD classique ou M des Rotations

MD avec hypothèse de conservation de la longueur des poutres: MR

L'hypothèse la plus usuelle dans l'étude de portiques plans par la MD est celle qui suppose l'indéformabilité axiale des poutres. Cela équivaut à considérer que **toute poutre  $ij$  conserve sa dimension** selon son axe  $x$  et cela se traduit par l'équation de contrainte suivante:

$$u_{ij} - u_{ji} = 0$$



# MR

## Conséquence sur les DDL

---

Avec ces relations/conditions supplémentaires, le nombre total de DDL se trouve réduit de 1 DDL par poutre. La réduction concerne exclusivement les DDL de translation et les composantes « à réduire » dépendent des orientations des poutres et de leur maillage.

En notant  $NP$  le nombre de poutres, le  $NDL$  de la MR vaut:

$$NDL = NN \times NDN - NDA - NP$$

Pour notre exemple à 3 poutres, l'hypothèse d'indéformabilité axiale fait passer le  $NDL$  de 6 à 3 et rend la MR « compétitive » avec la MF.

Dans ce qui suit, on montre l'exploitation de ces relations dans le cas de notre exemple. *Une procédure plus générale sera présentée ultérieurement.*



# MR

## Conséquence sur les DDL

---

Pour notre exemple à 3 poutres, l'hypothèse d'indéformabilité axiale permet d'écrire, respectivement pour chacune de poutres 12, 23 et 34, les équations ci-dessous:

$$u_{12} = u_{21} ; u_{23} = u_{32} ; u_{34} = u_{43}$$

Comme les nœuds sont indéformables et que les poutres sont orthogonales entre-elles, on peut « aisément » déduire que ces équations équivalent à:

$$V_1 = V_2 ; U_2 = U_3 ; V_3 = V_4$$

À partir des conditions d'appui, on arrive à conclure que

$$V_2 = 0 \text{ et } V_3 = 0.$$

Ainsi, on peut retenir indifféremment  $U_2$  ou  $U_3$  comme translation inconnue. On choisit  $U_2$  et les 3 DDL à calculer sont:

$$\theta z_2 , \theta z_3 \text{ et } U_2$$



# MR

## Conséquence sur l'équilibre

---

L'hypothèse de l'indéformabilité axiale des poutres réduit les DDL mais pose un problème pour les efforts normaux: ils ne peuvent pas être calculés à partir des déplacements ! On ne peut donc pas les considérer parmi les efforts induits par les déplacements. La procédure de la MD présentée précédemment se trouve ainsi bouleversée et on ne pourra pas écrire l'équilibre des nœuds suivant les directions où interviendrait un effort normal, c'est-à-dire suivant les DDL de translation.

Il est évident que cela ne concerne pas les DDL en rotation. Ainsi, la MD classique utilise « naturellement » l'équilibre des moments appliqués aux nœuds pour obtenir les équations relatives aux DDL de rotation.

Alors que pour les équations relatives aux translations, elle utilise astucieusement les formes d'écriture de l'équilibre qui passent par le travail ou l'énergie.



# MR

## Conséquence sur l'équilibre

---

Cette façon de faire permet d'éviter de faire mention directe des efforts normaux en faisant plutôt appel aux travaux (ou énergies) qui leurs correspondent et de négliger leurs contributions au travail (ou à l'énergie) global.

- Cette pratique est courante en MDS classique. À titre d'exemples:
  - L'effort tranchant est bien pris en compte dans l'équilibre des poutres alors que la distorsion (la déformation qui lui correspond) y est négligée.
  - Les charpentes métalliques sont modélisées par des treillis car l'énergie flexionnelle y est négligeable...

La procédure consiste à calculer, pour chaque DDL de translation, la somme des travaux de toutes les forces aux nœuds de la structure; on négligera évidemment la contribution des composantes des efforts induits (partie I) causées par les déformations axiales des poutres. On prendra une valeur quelconque (virtuelle) de la translation et on écrira que la somme des travaux est nulle (PTV).





# MR

## Équilibre des nœuds selon les DDL de rotation

---

Les équations d'équilibre des nœuds sous les moments induits par les rotations (partie I) et ceux dus aux charges appliquées à la structure (partie II) restent identiques à celles de la MD

### Equilibre des moments appliqués au nœud 2

$$-Mz_{21} - Mz_{23} + \Gamma - Mz_{23}^0 = 0$$

### Equilibre des moments appliqués au nœud 3

$$-Mz_{32} - Mz_{34} - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 = 0$$



# MR

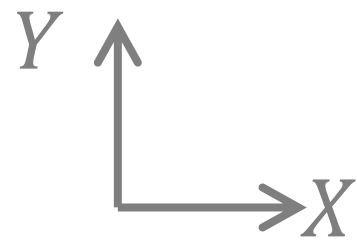
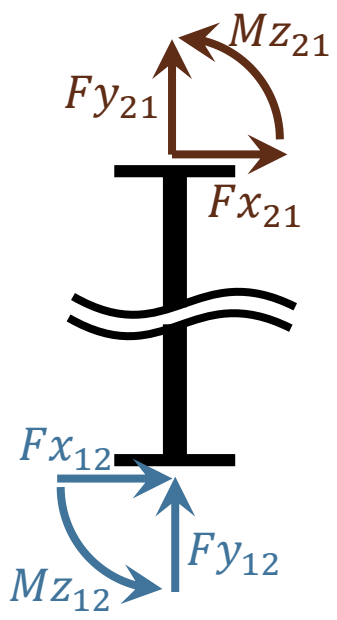
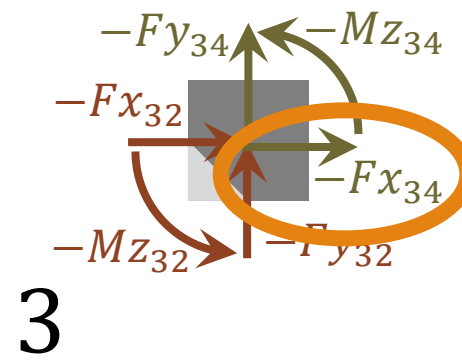
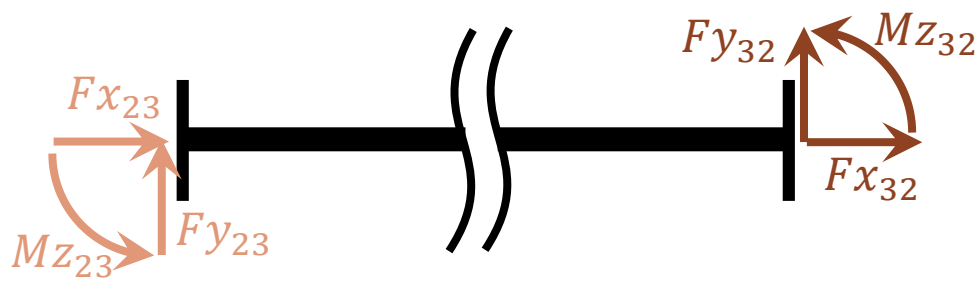
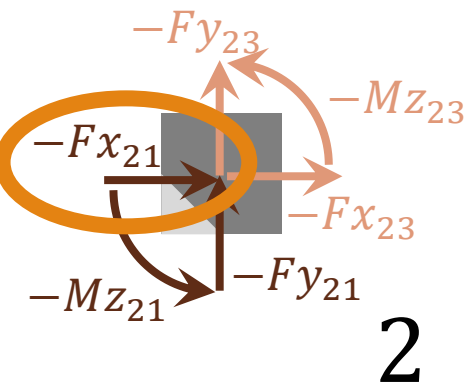
## Équilibre selon le DDL de translation

---

Puis, on calcule la somme des Travaux virtuels sous une translation quelconque  $U^*$  parallèle au (seul) DDL de translation  $U_2$ . Pour illustrer la procédure, on reprend les figures montrant les efforts intervenant dans l'équilibre (parties I et II) tout en mettant en évidence les efforts aux nœuds qui produisent un travail **non nul** sous  $U^*$ .

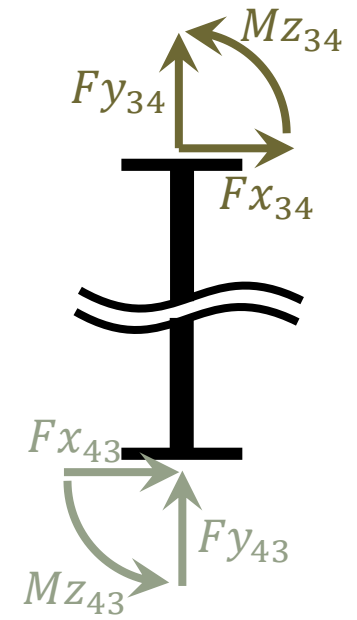
Les forces  $(-Fx_{23})$  et  $(-Fx_{32})$ , résultant de l'action axiale de la poutre 23 sur les nœuds 2 et 3 respectivement, produiront un travail négligeable. Quant aux forces  $(-Fx_{23}^0)$  et  $(-Fx_{32}^0)$  qui résultent des charges en travée, elles produisent un travail virtuel sous  $U^*$ .

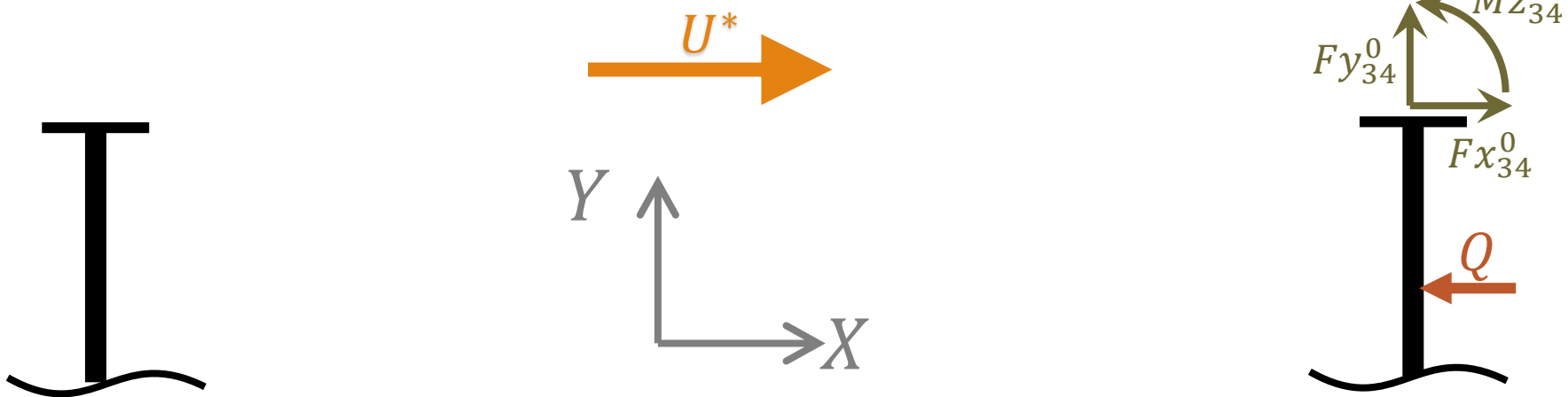
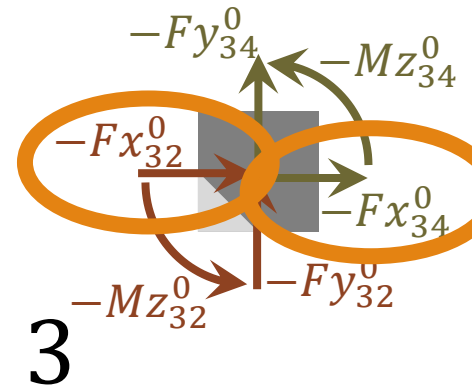
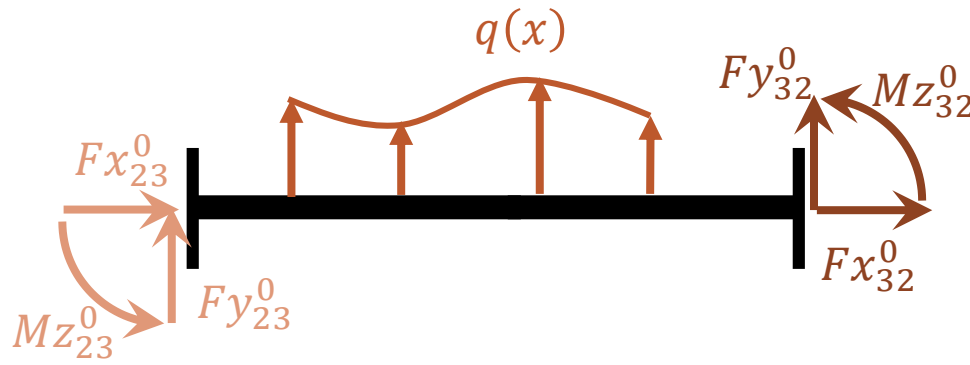
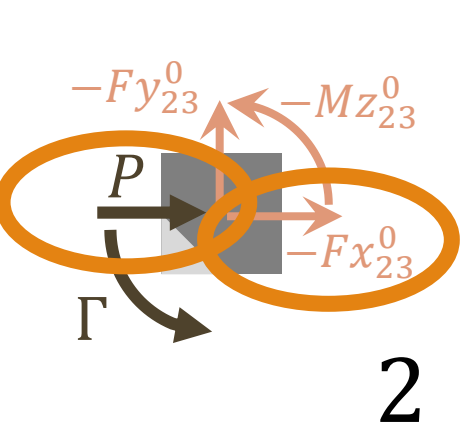




# Équilibre (Partie I)

Les Efforts induits par les déplacements des nœuds





## Équilibre (Partie II)

Les Efforts dus aux charges extérieures  
(sans aucun déplacement des nœuds)



# MR

## Équilibre selon le DDL de translation

---

La somme des travaux virtuels (non négligeables) sous  $U^*$  doit être nulle ( $\forall U^*$ ), alors

$$-Fx_{21}U^* - Fx_{34}U^* + PU^* - Fx_{23}^0U^* - Fx_{32}^0U^* - Fx_{34}^0U^* = 0$$

Il s'ensuit évidemment que:

$$-Fx_{21} - Fx_{34} + P - Fx_{32}^0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 = 0$$



# MR

## Systeme à résoudre

---

Ainsi, on a les 3 équations nécessaires au calcul des 3 DDL de la structure. Pour les résoudre, on regroupe les termes inconnus à gauche et les termes connus à droite:

$$\left\{ \begin{array}{l} MZ_{21} + MZ_{23} = \Gamma - MZ_{23}^0 \\ MZ_{32} + MZ_{34} = 0 - MZ_{32}^0 - MZ_{34}^0 \\ Fx_{21} + Fx_{34} = P - Fx_{23}^0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 \end{array} \right.$$



# MR

## Calcul des paramètres dans les poutres Particularité des efforts axiaux

---

L'étape suivante de la MD est le calcul des efforts aux extrémités des poutres à partir des DDL obtenus par résolution du système précédent puis, d'en déduire les réactions et tous les paramètres des poutres (efforts internes, etc.).

Cependant, l'hypothèse de l'indéformabilité axiale des poutres fait que les efforts axiaux ne sont pas reliés aux DDL! Pour contourner ce problème, on pose les équations d'équilibre en translation, selon  $X$  et  $Y$ , des  $NN$  nœuds pour trouver les  $NP$  efforts axiaux inconnus. On ne peut donc envisager de solution que si :  $NP \leq 2 \times NN$



# Principe de la MD

## Pour terminer la formulation du système à résoudre... Passage par les solutions des Poutres Isolées

---

La MD dans ses deux versions pose des équations d'équilibre pour trouver les DDL qui sont inconnus.

Elle utilise le principe de superposition pour écrire l'équilibre des nœuds de la structure. Les forces aux nœuds sont alors dues à la superposition de deux états:

- les actions induites par les DDL seuls (sans le chargement)
- Les efforts dus aux charges extérieures (sans aucun déplacement des nœuds)

La MDS permet de résoudre entièrement le cas des poutres isolées soumises à des déplacements imposés en leurs extrémités. Elle donne aussi les efforts développés dans les poutres isolées chargées en travée, lorsque leurs extrémités ne se déplacent pas.

Dans ce qui suit, on donne ces relations/expressions pour une poutre isolée. On abordera ensuite la problématique de l'orientation des poutres.

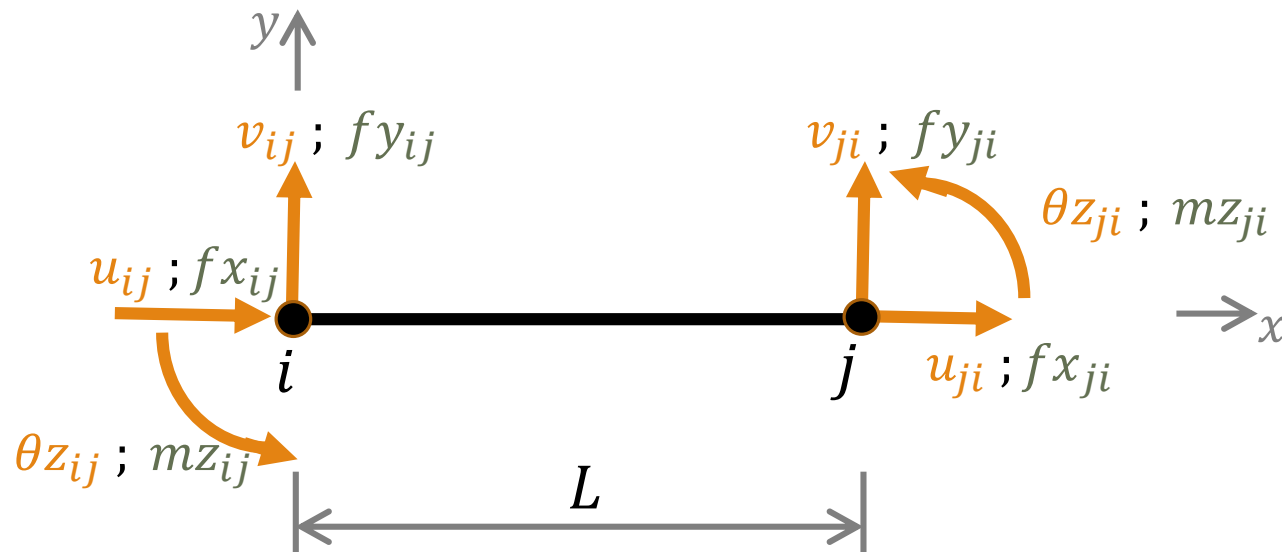




# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

La MD se base sur les relations entre les forces induites et les DDL qui les provoquent. Pour une poutre seule, il est aisé d'établir ces relations par l'une des méthodes de la MDS. Dans ce cours, on fera usage de l'équation de la ligne élastique.

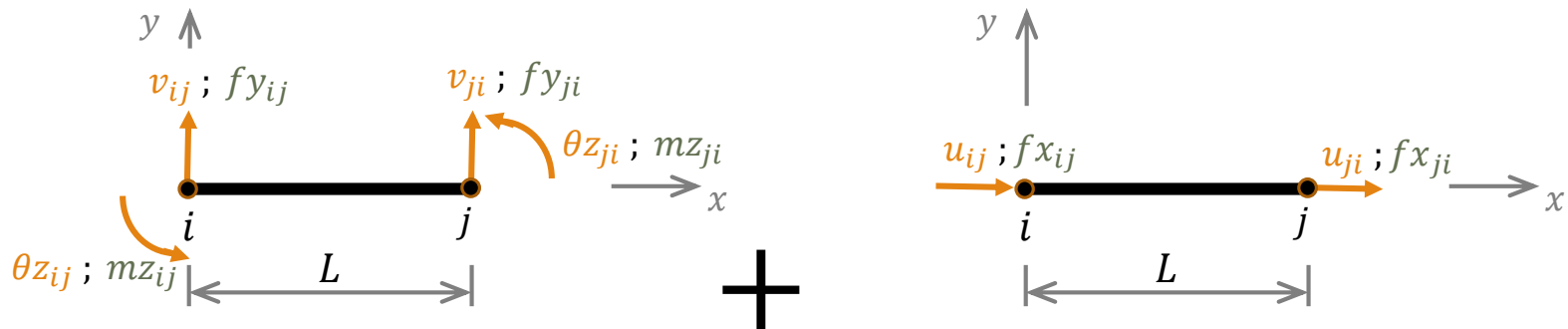


# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

### Décomposition: Flexion Simple + Sollicitation Axiale

Et il est courant de faire usage du principe de superposition. On considère alors séparément la flexion de la poutre de son comportement axial.



Flexion simple

Comportement Axial



# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

### Flexion simple: Equation de la ligne élastique

---

Une poutre droite d'axe longitudinal  $x$  qui fléchit dans le plan  $xy$  (défini par un repère orthonormé direct) est régie par l'équation différentielle d'ordre 4 ci-dessous, dite équation de la ligne élastique.

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E I_z}$$

- $v(x)$  est la flèche
- $q(x)$  est la charge appliquée sur la ligne moyenne de la poutre et dirigée selon  $y$ .
- $E$  est le module de Young
- $I_z$  est le moment d'inertie de la section transversale de la poutre par rapport à l'axe  $z$ , normal au plan de flexion.

Connaissant les conditions aux limites  $i$  et  $j$  de la poutre, on peut résoudre entièrement cette équation et en déduire la rotation, le moment fléchissant et l'effort tranchant dans n'importe quelle section d'abscisse  $x$  par les relations:

$$\theta_z(x) = dv(x)/dx \quad ; \quad M(x) = E I_z d^2v(x)/dx^2 \quad ; \quad T(x) = -dM(x)/dx$$



# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

### Flexion simple: Flèche en imposant $v_{ij}$ seul

L'équation de la ligne élastique avec un second membre nul (pas de chargement sur la poutre) admet comme solution un polynôme du 3<sup>ème</sup> degré:

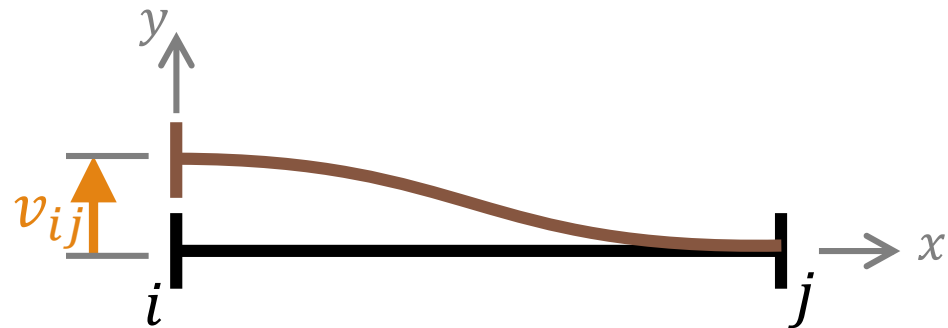
$$v(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

En imposant les 4 conditions aux limites

$$v(0) = v_{ij} ; \theta_z(0) = 0 ; v(L) = 0 ; \theta_z(L) = 0$$

On trouve les 4 coefficients du polynôme et par suite l'équation de la flèche sous  $v_i$  seul:

$$v(x) = \left( \frac{2}{L^3} x^3 - \frac{3}{L^2} x^2 + 1 \right) v_{ij}$$



# Poutre Isolée

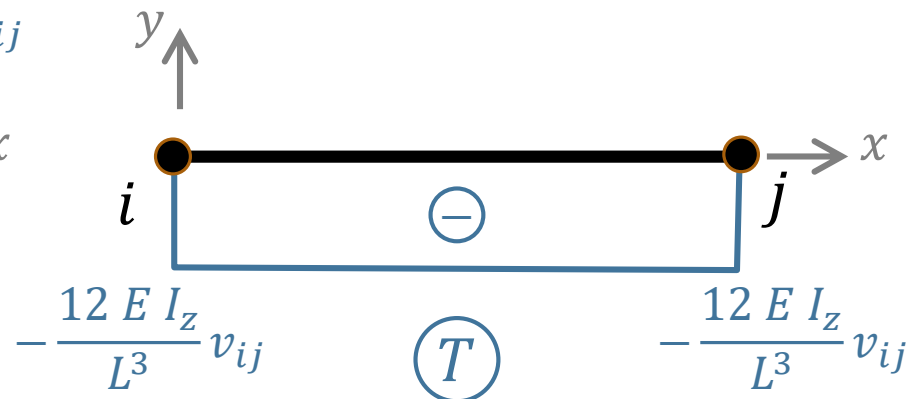
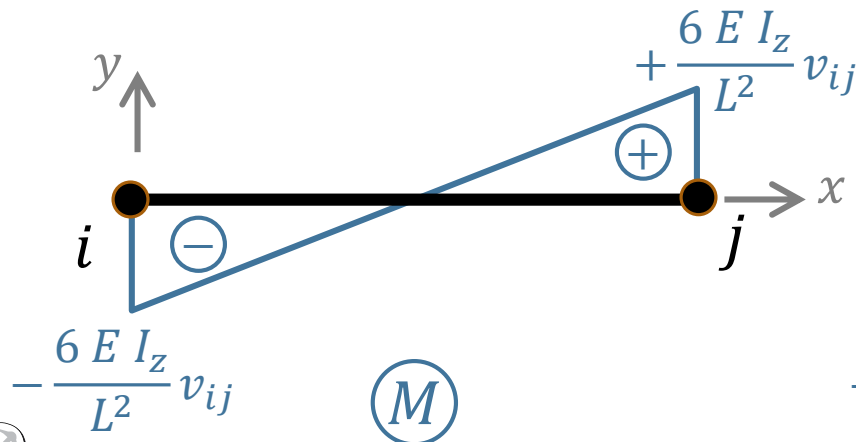
## Forces induites – Déplacements imposés

### Flexion simple: Efforts internes en imposant $v_{ij}$ seul

À partir de l'équation de la flèche, on déduit les expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans n'importe quelle section d'abscisse  $x$  (l'effort normal est nul en flexion simple):

$$M(x) = E I_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = E I_z \left( \frac{12}{L^3} x - \frac{6}{L^2} \right) v_{ij}$$

$$T(x) = - \frac{dM(x)}{dx} = -E I_z \frac{12}{L^3} v_{ij}$$

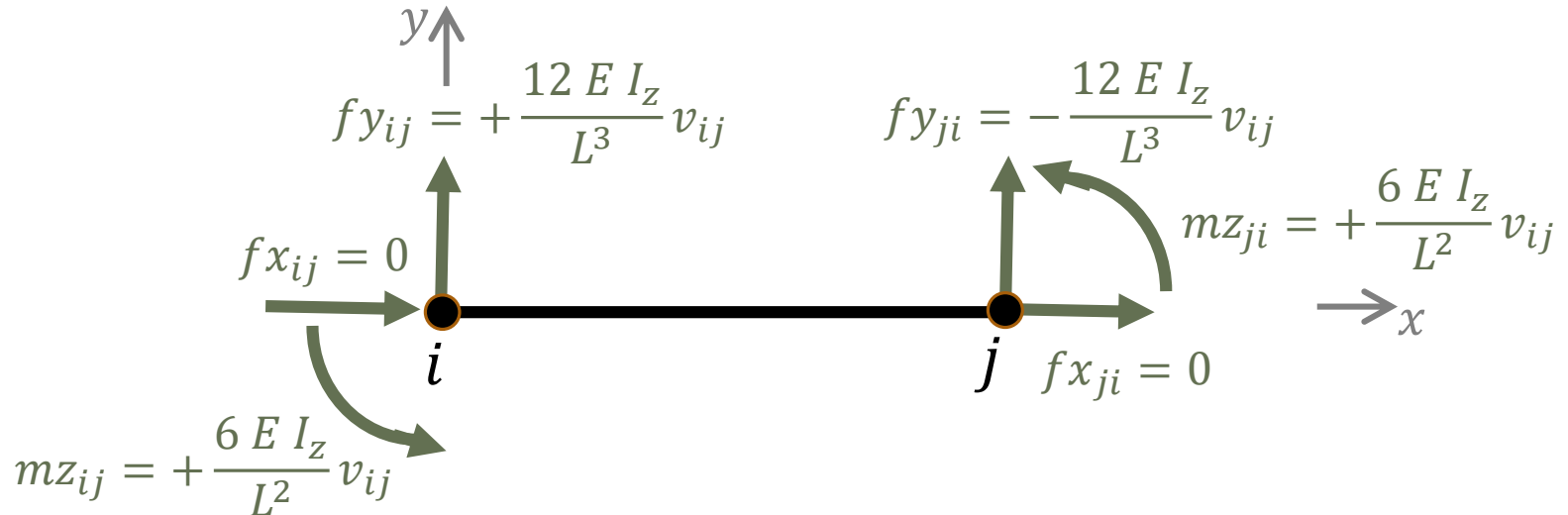


# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

Flexion simple: Efforts induits aux nœuds en imposant  $v_{ij}$  seul

En tenant compte de la convention de signes des efforts internes, on arrive à établir la relation recherchée, c'est-à-dire à exprimer les efforts induits aux nœuds suite à l'application de  $v_{ij}$  seul.



# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

### Flexion simple: Flèche et Efforts internes en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul

Avec les CL :

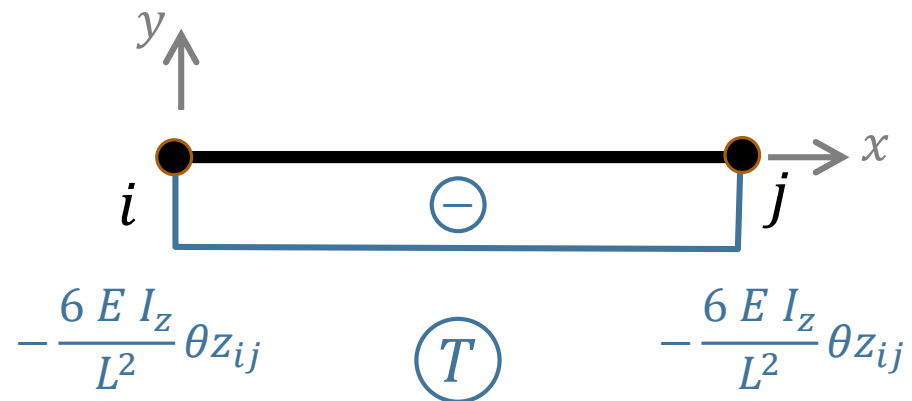
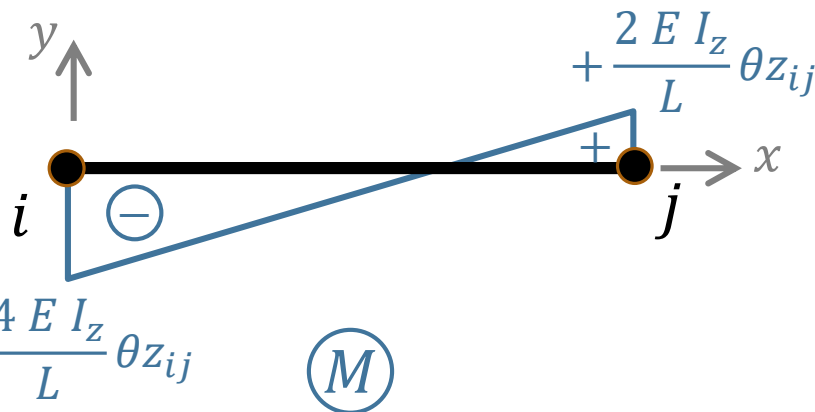
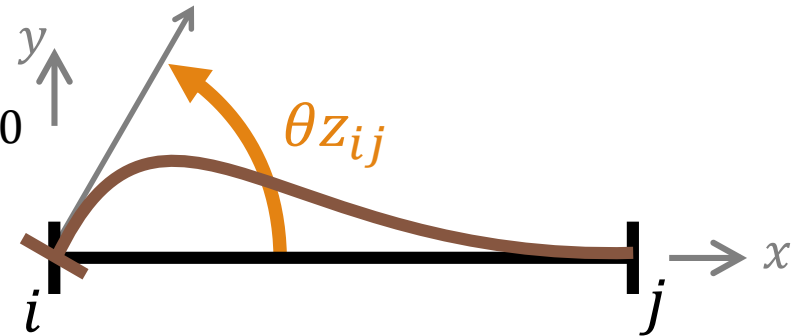
$$v(0) = 0 ; \theta_z(0) = \theta_{z_{ij}} ; v(L) = 0 ; \theta_z(L) = 0$$

On obtient:  $v(x) = \left( \frac{1}{L^2} x^3 - \frac{2}{L} x^2 + x \right) \theta_{z_{ij}}$

D'où

$$M(x) = E I_z \left( \frac{6}{L^2} x - \frac{4}{L} \right) \theta_{z_{ij}}$$

$$T(x) = -E I_z \frac{6}{L^2} \theta_{z_{ij}}$$

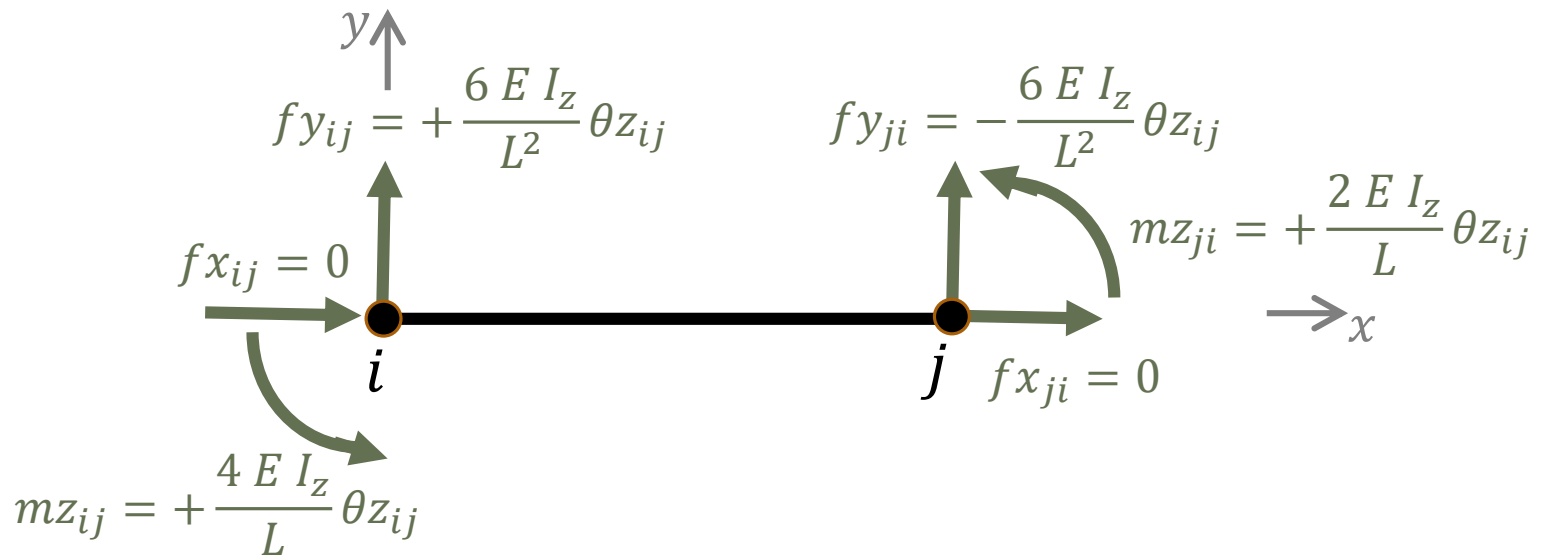


# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

Flexion simple: Efforts induits aux nœuds en imposant  $\theta_{z_{ij}}$  seul

Les efforts induits aux nœuds dus à  $\theta_{z_{ij}}$  seul valent alors:



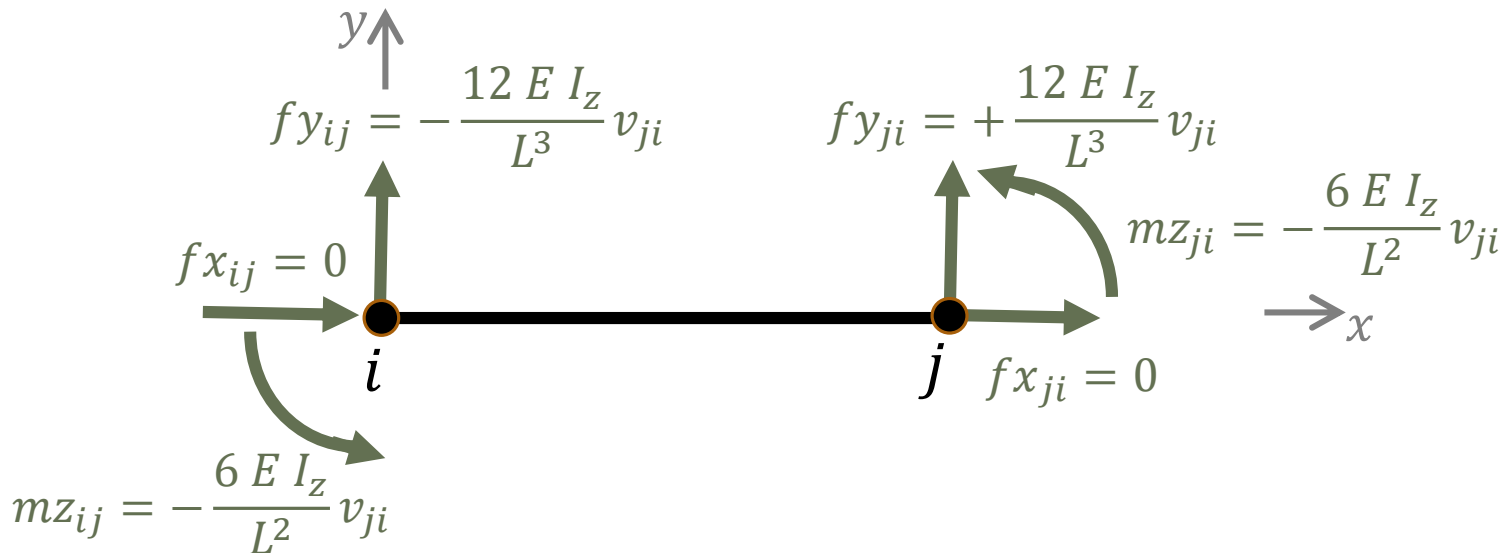
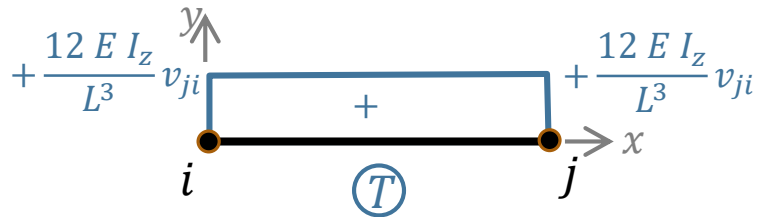
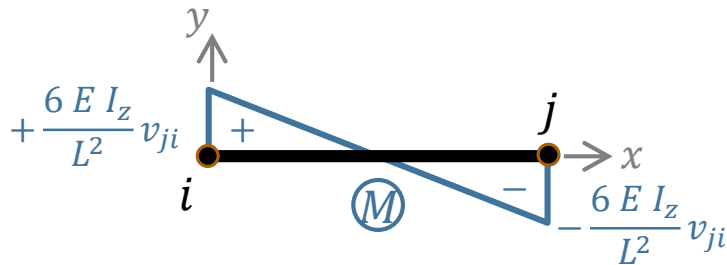


# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

Flexion simple: Efforts induits aux nœuds en imposant  $v_{ji}$  seul

De même, les efforts induits aux nœuds dus à  $v_{ji}$  seul valent

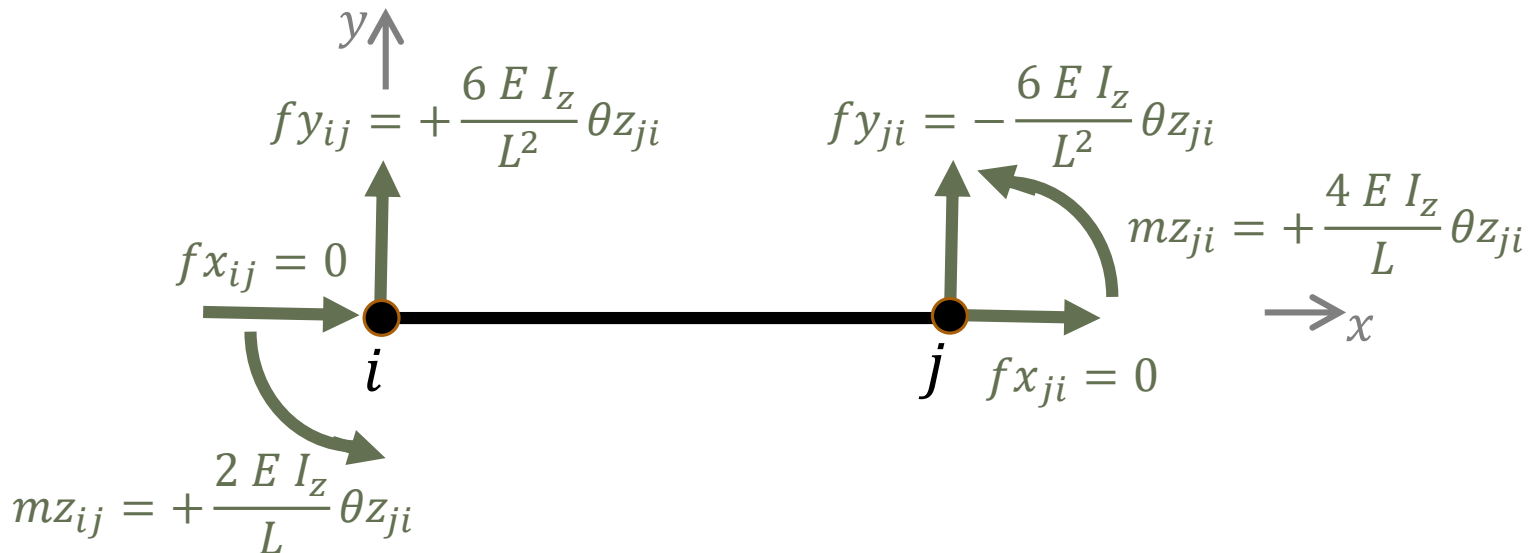
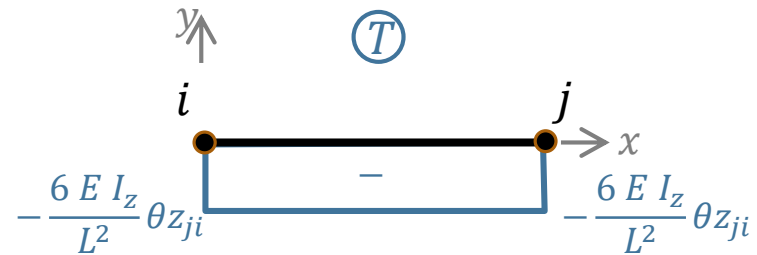
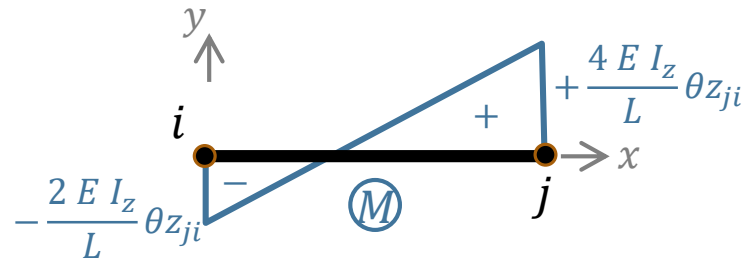


# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

Flexion simple: Efforts induits aux nœuds en imposant  $\theta_{zji}$  seul

Et, les efforts induits aux nœuds dus à  $\theta_{zji}$  seul sont :



# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

Flexion simple: Efforts induits aux nœuds sous  $v_{ij}$ ,  $\theta_{z_{ij}}$ ,  $v_{ji}$  et  $\theta_{z_{ji}}$

---

En combinant les résultats intermédiaires, on trouve les efforts induits aux nœuds par une flexion simple provoquée par les déplacements des extrémités de la poutre.

$$m_{z_{ij}} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \theta_{z_{ij}} + \theta_{z_{ji}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$m_{z_{ji}} = + \frac{2 E I_z}{L} (\theta_{z_{ij}} + 2 \theta_{z_{ji}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$f_{y_{ij}} = + \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_{ij}} + \theta_{z_{ji}}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$f_{y_{ji}} = - \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_{ij}} + \theta_{z_{ji}}) - \frac{12 E I_z}{L^3} (v_{ij} - v_{ji})$$



# Poutre Isolée

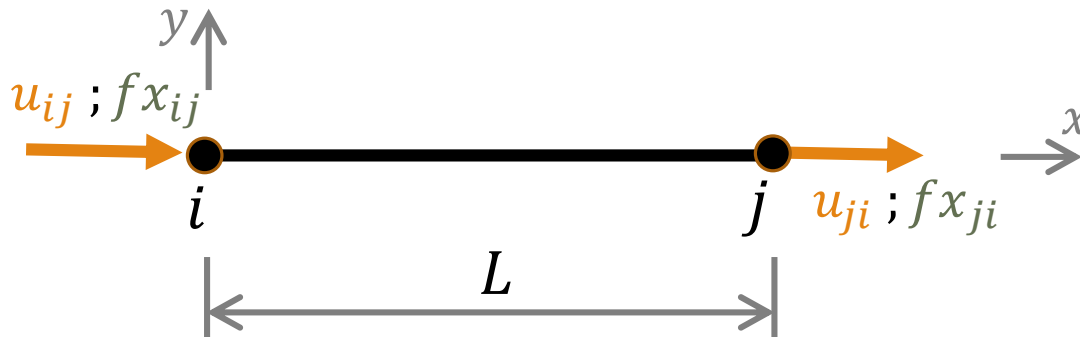
## Forces induites – Déplacements imposés

Sollicitation axiale: Efforts induits aux nœuds en imposant  $u_{ij}$  et  $u_{ji}$

Par définition, la déformation axiale est :  $\varepsilon_x = (u_{ji} - u_{ij})/L$

La loi de Hook donne la contrainte:  $\sigma_x = E \varepsilon_x$ , où  $E$  est le module de Young. Si  $A$  désigne l'aire de la section de la poutre, l'effort normal vaut  $N = A \sigma_x = E A (u_{ji} - u_{ij})/L$ . En tenant compte de la convention de signe de l'effort normal, on déduit aisément que:

$$f_{x_{ij}} = E A (u_{ij} - u_{ji})/L \quad \text{et} \quad f_{x_{ji}} = E A (u_{ji} - u_{ij})/L$$



# Poutre Isolée

## Forces induites – Déplacements imposés

Pour une poutre seule, les relations entre les forces induites et les DDL qui les provoquent peuvent être réécrites sous forme matricielle comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale: } \begin{Bmatrix} f_{x_{ij}} \\ f_{x_{ji}} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ u_{ji} \end{Bmatrix}$$

Flexion simple:

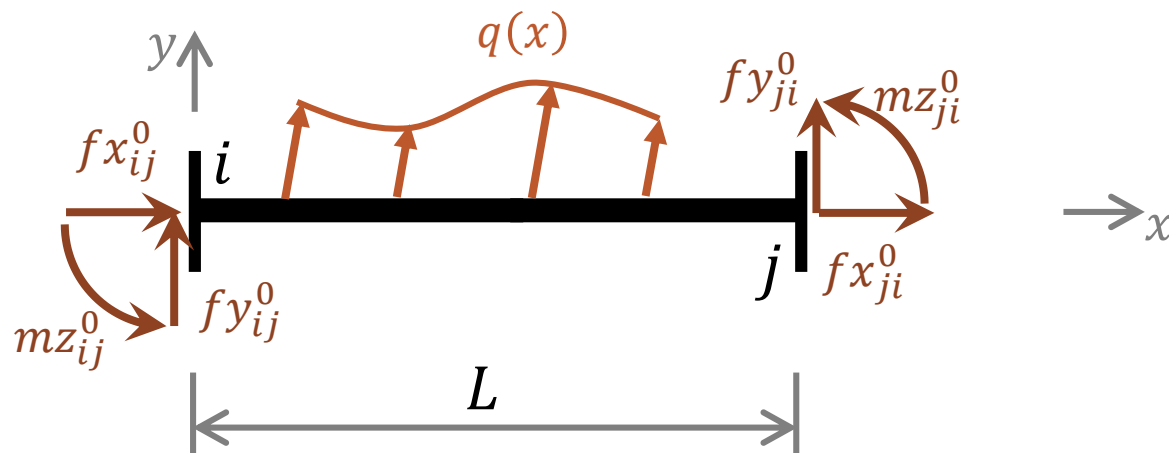
$$\begin{Bmatrix} f_{y_{ij}} \\ m_{z_{ij}} \\ f_{y_{ji}} \\ m_{z_{ji}} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{Bmatrix}$$



# Poutre Isolée

## Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules

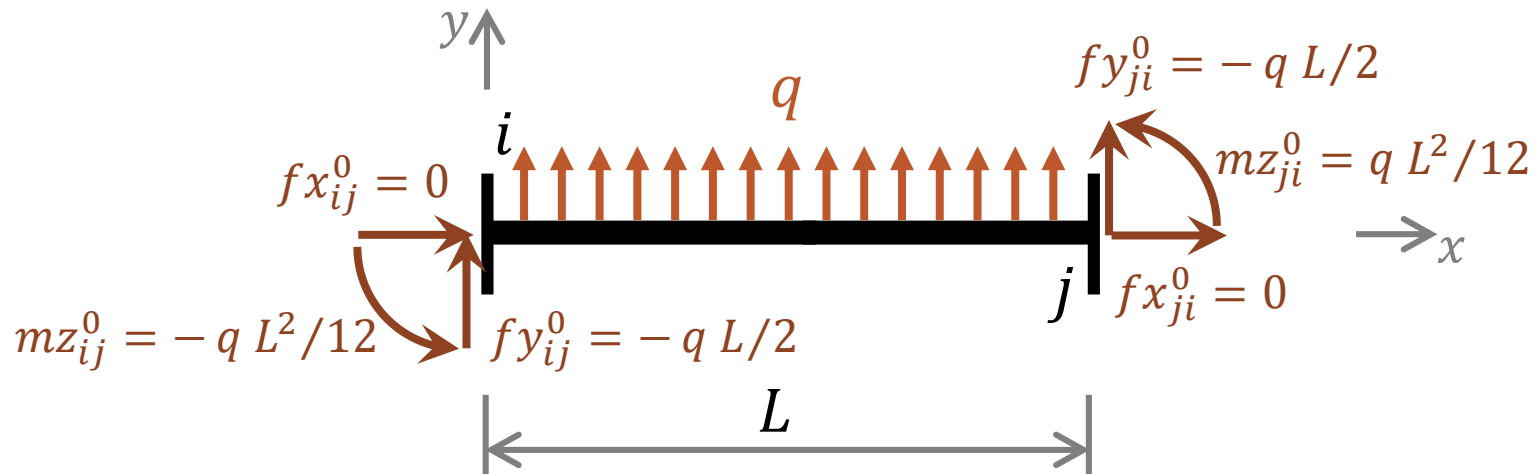
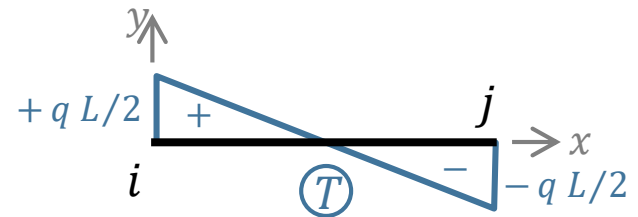
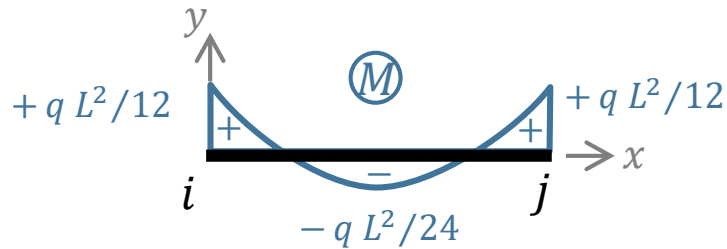
Dans l'écriture de l'équilibre dans la MD, on a aussi besoin des forces aux nœuds dues aux charges en travée seules, sans aucun déplacement de nœuds. Pour une poutre isolée, il est aisé de les calculer par une méthode de la MDS. Les résultats pour différents cas de chargement sont disponibles dans la bibliographie.



# Poutre Isolée

Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules  
Cas de la charge transversale uniformément répartie

A titre d'exemple, on donne les forces aux nœuds sous une charge en travée uniformément répartie, exprimées dans le référentiel de la poutre isolée.



# Poutre Isolée

## Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules Cas de la charge transversale uniformément répartie

---

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge en travée transversale uniformément répartie comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale: } \begin{Bmatrix} f x_{ij}^0 \\ f x_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Flexion simple: } \begin{Bmatrix} f y_{ij}^0 \\ m z_{ij}^0 \\ f y_{ji}^0 \\ m z_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q L/2 \\ -q L^2/12 \\ -q L/2 \\ +q L^2/12 \end{Bmatrix}$$

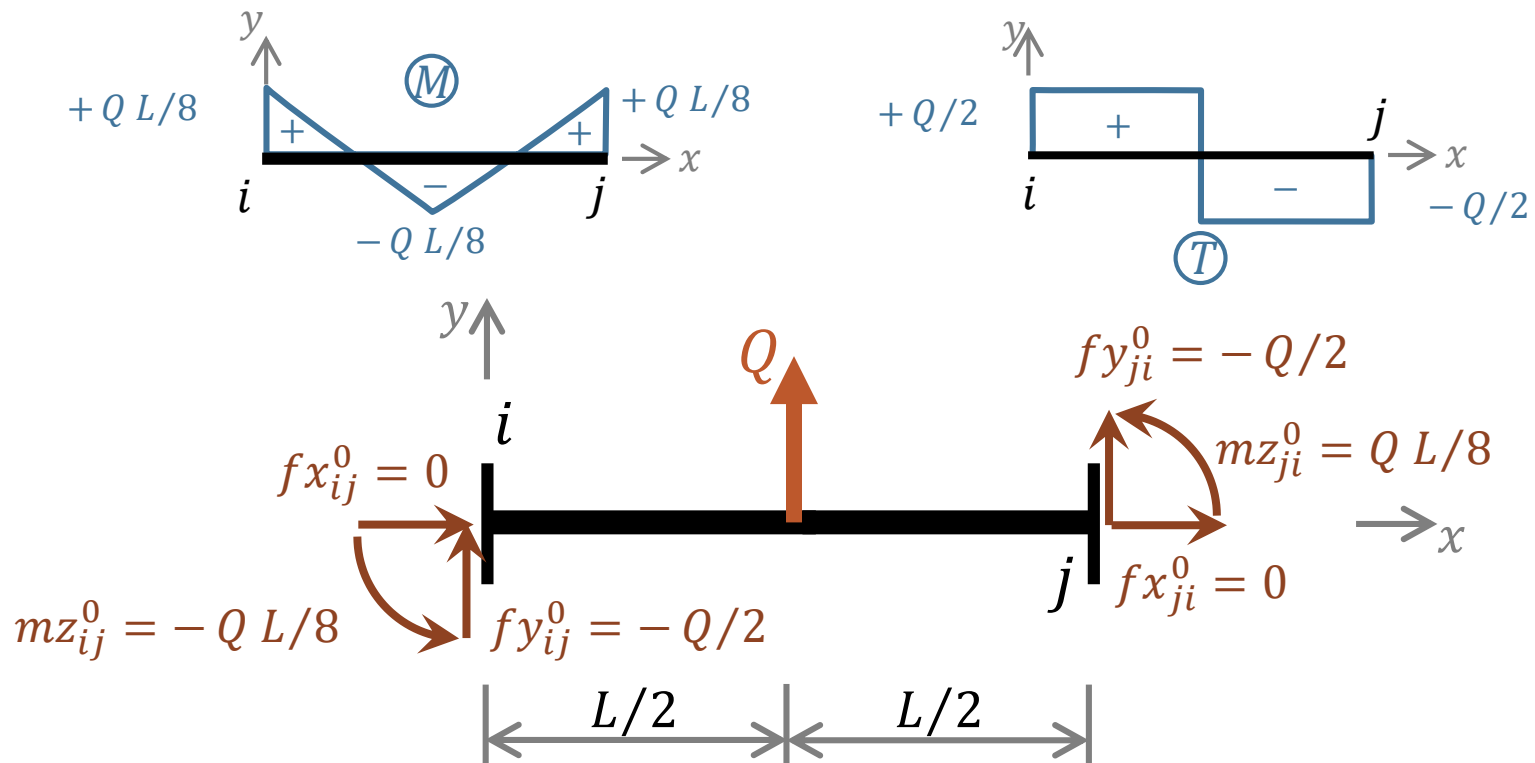




# Poutre Isolée

Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules  
Cas d'une Charge concentrée transversale à mi travée

Un autre exemple est celui d'une charge concentrée appliquée transversalement au milieu de la poutre.



# Poutre Isolée

## Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules Cas d'une Charge concentrée transversale à mi travée

---

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge concentrée transversale à mi travée comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale: } \begin{Bmatrix} f x_{ij}^0 \\ f x_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Flexion simple: } \begin{Bmatrix} f y_{ij}^0 \\ m z_{ij}^0 \\ f y_{ji}^0 \\ m z_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q/2 \\ -Q L/8 \\ -Q/2 \\ +Q L/8 \end{Bmatrix}$$



# Poutre Isolée

## Forces aux nœuds

Les forces totales aux extrémités de la poutre  $ij$  sont donc la superposition des 2 états présentés ci-avant, soit les forces dues aux DDL sans charges plus, les forces dues aux charges en travées sans déformation. Ainsi, on a

$$\begin{Bmatrix} fx_{ij}^t \\ fx_{ji}^t \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ u_{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} fy_{ij}^t \\ mz_{ij}^t \\ fy_{ji}^t \\ mz_{ji}^t \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{Bmatrix}$$



# Poutre Isolée

## Forces aux nœuds dans le cas de la MR.

Le problème de la MR qui suppose l'indéformabilité axiale des poutre pour réduire les DDL est qu'il n'est pas possible d'obtenir directement les efforts axiaux des poutres. On ne pourra calculer que les efforts de flexion à partir des DDL:

$$\begin{Bmatrix} f x_{ij}^t \\ f x_{ji}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ? \\ ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f x_{ij}^0 \\ f x_{ji}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f y_{ij}^t \\ m z_{ij}^t \\ f y_{ji}^t \\ m z_{ji}^t \end{Bmatrix} = \frac{E I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 L & -12 & 6 L \\ 6 L & 4 L^2 & -6 L & 2 L^2 \\ -12 & -6 L & 12 & -6 L \\ 6 L & 2 L^2 & -6 L & 4 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f y_{ij}^0 \\ m z_{ij}^0 \\ f y_{ji}^0 \\ m z_{ji}^0 \end{Bmatrix}$$



# Poutres Isolées « particulières »

Pour prendre en charge des discontinuités de DDL .

---

Dans la MD les nœuds assurent le **lien** entre les poutres de la structure, et entre la structure et son environnement. Par hypothèse, les nœuds sont indéformables et transmettent intégralement les efforts. Pour prendre en charge les discontinuités de DDL introduites par certains dispositifs mécaniques, telle l'articulation, on utilise la technique suivante. On crée un nœud situé « immédiatement avant » ou « immédiatement après » la discontinuité, et on « reporte » la discontinuité sur l'origine ou l'extrémité d'une poutre connectée à ce nœud. Cette poutre devra avoir/assurer en sa limite concernée les conditions modélisant le comportement du dispositif mécanique en question.

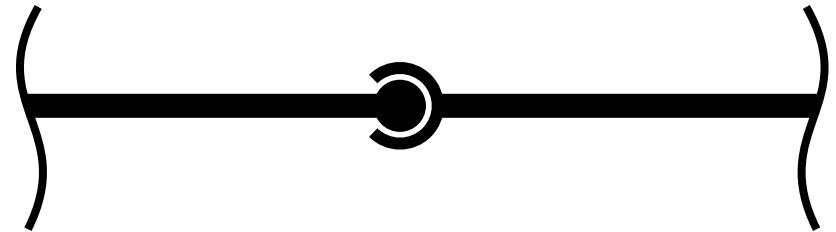
Dans ce qui suit, on va présenter quelques exemples de dispositifs sources de discontinuités avec leurs CL, et on n'exposera que le cas de l'articulation.



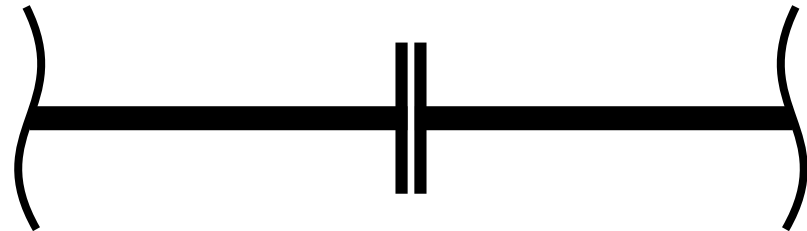
# Poutres Isolées « particulières »

## Exemples de dispositifs sources de discontinuités

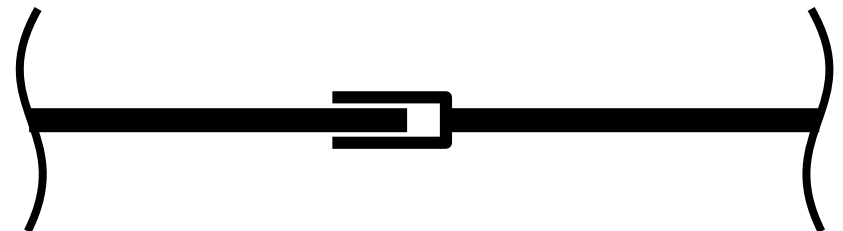
- Rotations indépendantes, moment fléchissant nul: Articulation.



- Flèches indépendantes, effort tranchant nul.



- Déplacements axiaux indépendants, effort normal nul.



# Poutre Isolée articulée à son extrémité

## Forces induites – Déplacements imposés

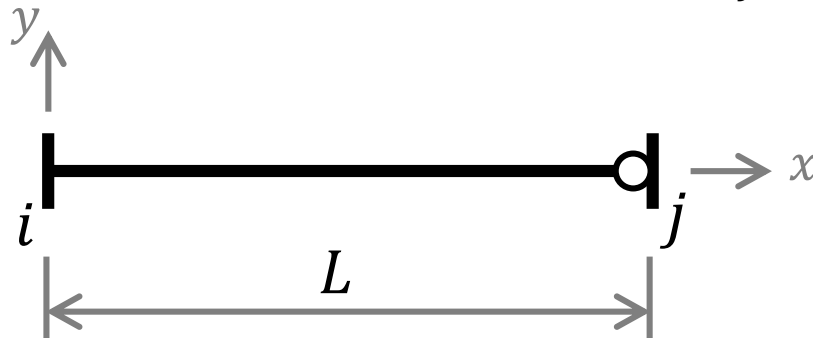
### Flexion simple

On résout l'équation de la ligne élastique en imposant les 4 conditions aux limites

$$v(0) = v_{ij} ; \theta_z(0) = \theta_{z_{ij}}; v(L) = v_{ji}; M(L) = 0$$

pour trouver la relation recherchée. Le moment à l'extrémité est bien sûr nul et les autres efforts sont indépendants de la rotation du nœud  $j$ :

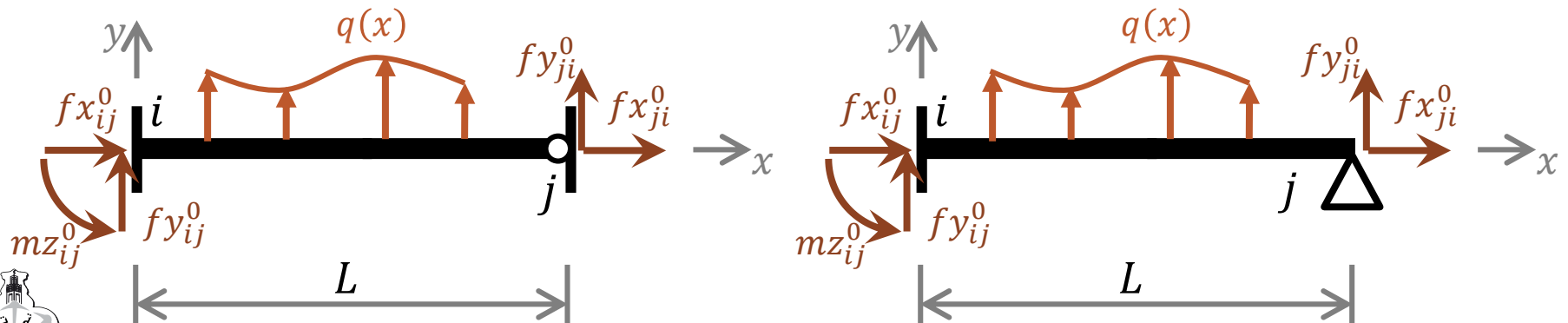
$$\begin{Bmatrix} f_{y_{ij}} \\ m_{z_{ij}} \\ f_{y_{ji}} \\ m_{z_{ji}} \end{Bmatrix} = \frac{E I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 0 \\ 3L & 3L^2 & -3L & 0 \\ -3 & -3L & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{Bmatrix}$$



# Poutre Isolée articulée à son extrémité

## Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules

Dans l'écriture de l'équilibre dans la MD, on a aussi besoin des forces aux nœuds dues aux charges en travée seules, sans aucun déplacement de nœuds. Pour une poutre isolée articulée à son extrémité, on adopte l'un des deux modèles ci-dessous et il est aisé de les calculer par une méthode de la MDS. Les résultats pour différents cas de chargement sont disponibles dans la bibliographie.



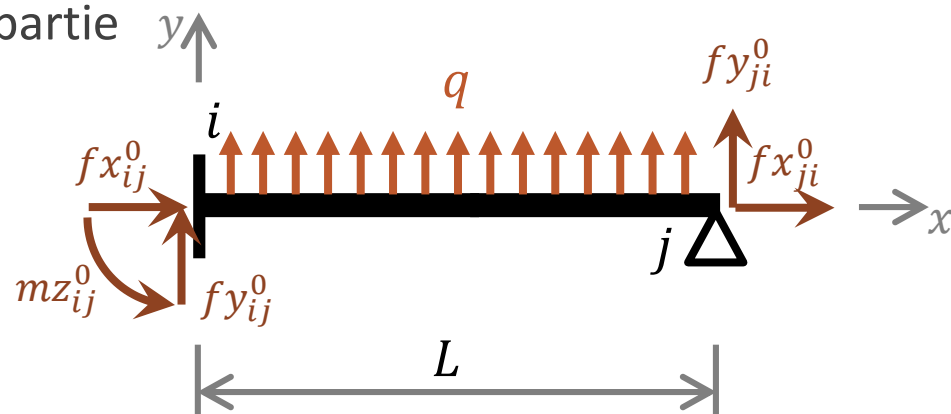


# Poutre Isolée articulée à son extrémité

## Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules Cas de la charge transversale uniformément répartie

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge en travée uniformément répartie comme suit.

Sollicitation Axiale:  $\begin{Bmatrix} f x_{ij}^0 \\ f x_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$



Flexion simple:  $\begin{Bmatrix} f y_{ij}^0 \\ m z_{ij}^0 \\ f y_{ji}^0 \\ m z_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 q L / 8 \\ -q L^2 / 8 \\ -3 q L / 8 \\ 0 \end{Bmatrix}$

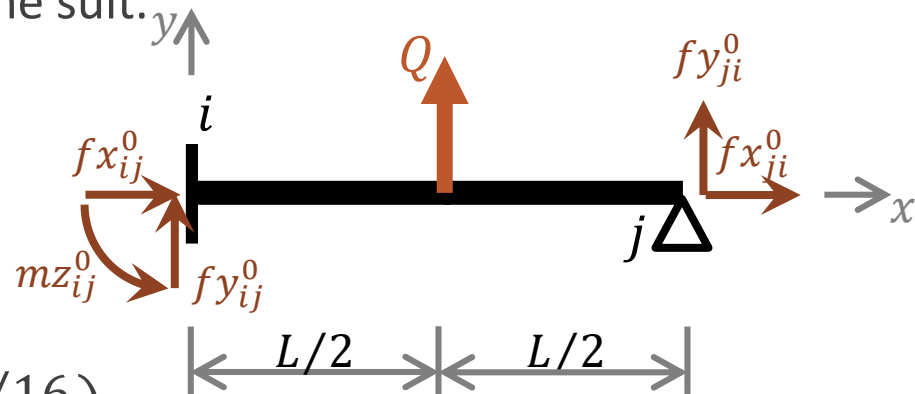


# Poutre Isolée articulée à son extrémité

Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules  
Cas d'une Charge concentrée transversale à mi travée

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge concentrée à mi travée comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale: } \begin{Bmatrix} f x_{ij}^0 \\ f x_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\text{Flexion simple: } \begin{Bmatrix} f y_{ij}^0 \\ m z_{ij}^0 \\ f y_{ji}^0 \\ m z_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11 Q/16 \\ -6 Q L/32 \\ -5 Q/16 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



# Problématique de l'orientation des poutres

---

Les forces induites par les déplacements des nœuds et celles dues aux charges en travées sont connues mais pour les poutres isolées.

Dans un portique plan, les poutres présentent différentes orientations et pour écrire les équations d'équilibre de la structure, il faut relier les déplacements des extrémités des poutres isolées aux déplacements des nœuds de la structure. Il faut également projeter les actions des nœuds sur les poutres (ainsi que les forces aux nœuds dues aux charges en travées des poutres isolées) dans le repère de la structure.

C'est l'objectif de cette section du cours. On commencera par le cas simple des réseaux de poutres orthogonales entre-elles et on présentera ensuite le cas des poutres orientées arbitrairement dans le plan de la structure.



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres orthogonales entre-elles

### Les DDL

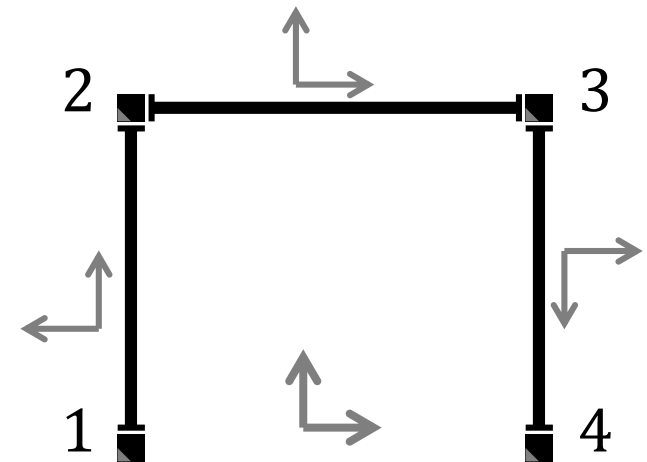
Les poutres formant les portiques plans constituent généralement un maillage de poutres orthogonales entre-elles. Dans ces cas-là, on ne trouve aucune difficulté à relier les déplacements des extrémités des poutres isolées aux déplacements aux nœuds de la structure. Les rotations sont d'ailleurs les mêmes ( $\theta_{z_{ij}} = \theta_{z_i}$ ). Le changement d'orientation n'affecte que les DDL de Translation. Pour l'exemple d'illustration, il est facile d'établir que pour

$$\text{poutre 12 : } u_{21} = V_2 ; \quad v_{21} = -U_2$$

$$\text{poutre 23 : } u_{23} = U_2 ; \quad v_{23} = V_2$$

$$u_{32} = U_3 ; \quad v_{32} = V_3$$

$$\text{poutre 34 : } u_{34} = -V_3 ; \quad v_{34} = U_3$$



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres orthogonales entre-elles

### Les Forces

---

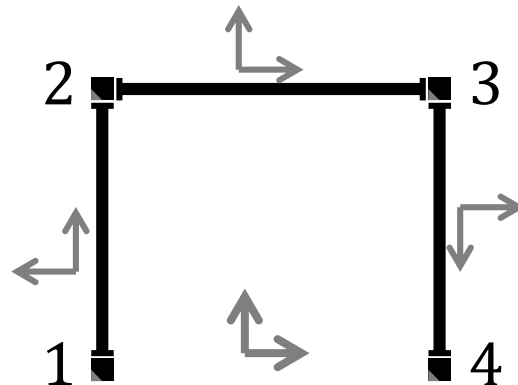
Aussi, les moments ne sont pas affectés par le changement d'orientation ( $Mz_{ij} = mz_{ij}$ ) et les actions des nœuds sur les poutres isolées valent alors:

$$\text{Poutre 12 : } Fy_{21} = fx_{21} ; Fx_{21} = -fy_{21}$$

$$\text{Poutre 23 : } Fx_{23} = fx_{23} ; Fy_{23} = fy_{23} ; Fx_{32} = fx_{32} ; Fy_{32} = fy_{32}$$

$$\text{Poutre 34 : } Fy_{34} = -fx_{34} ; Fx_{34} = fy_{34}$$

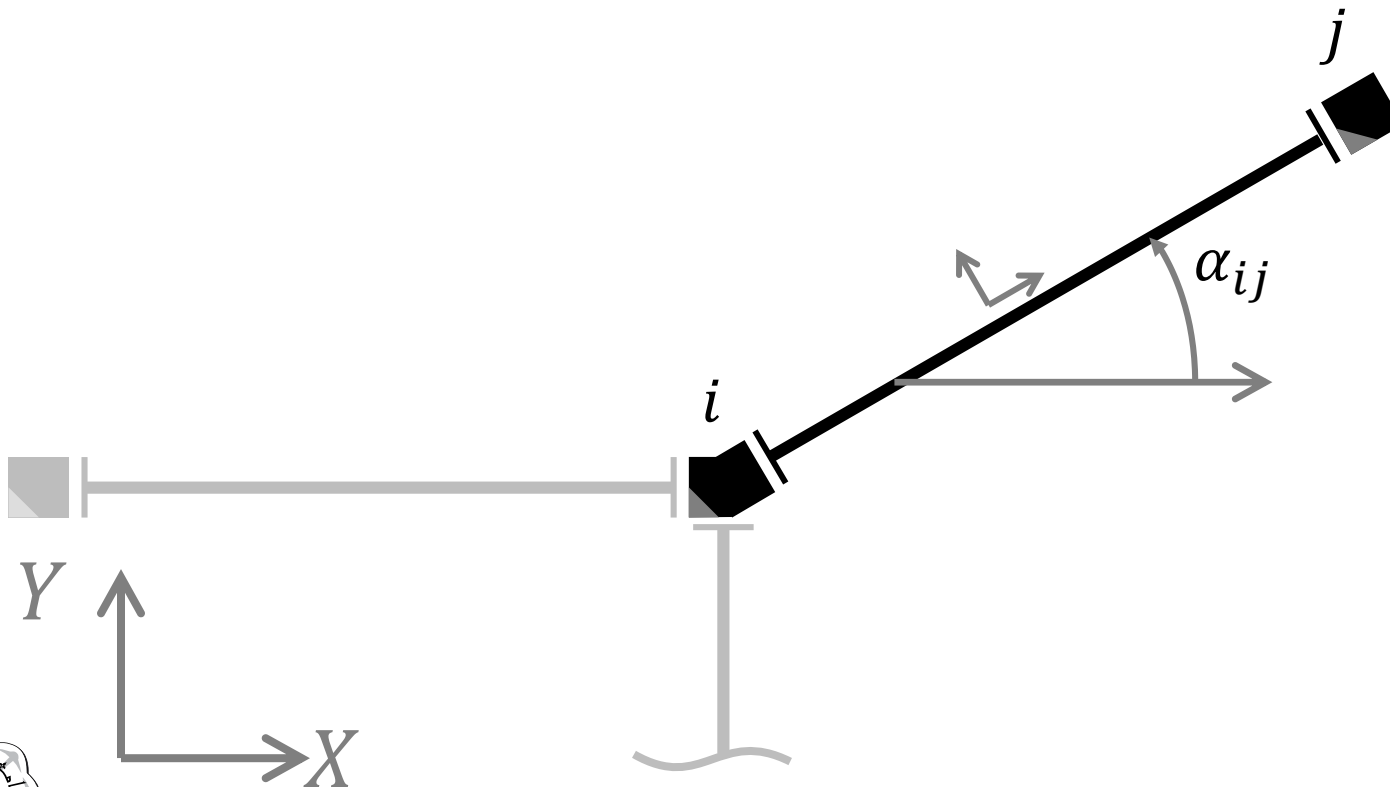
Il en est de même pour les forces aux nœuds dus aux charges en travées seules.



# Problématique de l'orientation des poutre.

## Poutres inclinées

Il arrive aussi qu'une poutre ait une orientation quelconque dans le plan  $XY$ , définie par l'angle  $\alpha_{ij}$  que fait son axe  $x$  avec l'axe  $X$  de la structure.



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres inclinées

### Les DDL

---

Comme précisé précédemment, les rotations ne sont pas affectées par le changement d'orientation dans le plan car elles sont toutes mesurées autour de la normale au plan.

La translation d'un nœud  $i$  a deux composantes  $U_i$  et  $V_i$ . Pour une poutre  $ij$  inclinée de  $\alpha_{ij}$ , cette translation se décompose en  $u_{ij}$  et  $v_{ij}$  dans le référentiel de la poutre.

Dans le cadre des petits déplacements,  $u_{ij}$  et  $v_{ij}$  s'obtiennent en additionnant les projections de  $U_i$  et  $V_i$  sur l'axe longitudinal de la poutre puis sur son axe transversal, respectivement.



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres inclinées

### Les DDL

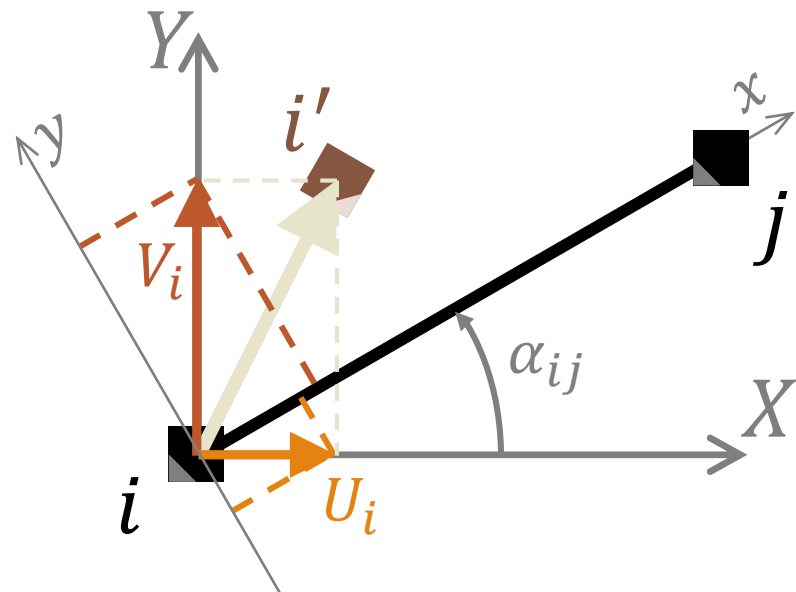
On trouve alors

$$u_{ij} = U_i \cos(\alpha_{ij}) + V_i \sin(\alpha_{ij})$$

$$v_{ij} = V_i \cos(\alpha_{ij}) - U_i \sin(\alpha_{ij})$$

Sachant que

$$\theta_{z_{ij}} = \theta_{z_i}$$





# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres inclinées

### Les Forces

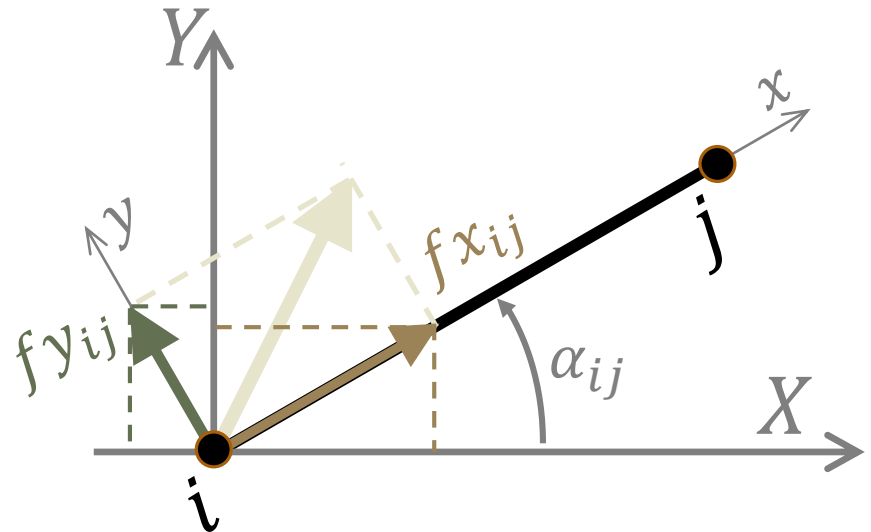
Les actions des nœuds sur les poutres (comme les forces aux nœuds dues aux charges en travées) sont connues pour les poutres isolées, c'est-à-dire dans le repère de chaque poutre. Les moments ne sont pas affectés par le changement d'orientation et les actions des nœuds sur les poutres isolées valent:

$$F_{x_{ij}} = f_{x_{ij}} \cos(\alpha_{ij}) - f_{y_{ij}} \sin(\alpha_{ij})$$

$$F_{y_{ij}} = f_{y_{ij}} \cos(\alpha_{ij}) + f_{x_{ij}} \sin(\alpha_{ij})$$

avec

$$M_{z_{ij}} = m_{z_{ij}}$$



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres inclinées

### Les conditions d'indéformabilité axiale des poutres

---

L'hypothèse d'indéformabilité axiale des poutres permet d'écrire pour chaque poutre  $(ij)$ :

$$u_{ij} - u_{ji} = 0$$

En projetant des translations des nœuds  $i$  et  $j$  sur l'axe de la poutre inclinée de  $\alpha_{ij}$ , cette condition devient:

$$(U_i - U_j) \cos(\alpha_{ij}) + (V_i - V_j) \sin(\alpha_{ij}) = 0$$

On retrouve le cas des maillages de poutres orthogonales entre-elles:

- Pour  $\alpha_{ij} = \pm\pi$ , on a:  $U_i = \pm U_j$
- Pour  $\alpha_{ij} = \pi/2 \pm \pi$ , on a:  $V_i = \pm V_j$

Le cas d'une inclinaison quelconque est maintenant abordé.



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres inclinées

### Les conditions d'indéformabilité axiale des poutres

---

Lorsque la structure comporte des poutres inclinées arbitrairement, il peut se poser un problème de **choix** des DDL de translation à « **retenir** ».

L'écriture de la condition d'indéformabilité axiale d'une poutre en fonction des DDL de translation de ses nœuds  $i$  et  $j$  donne :

$$(U_i - U_j) \cos(\alpha_{ij}) + (V_i - V_j) \sin(\alpha_{ij}) = 0$$

Soit 1 équation où interviennent 4 DDL. Nous pouvons l'utiliser pour exprimer l'un d'eux en fonction des 3 autres et le « réduire » du système à résoudre. Nous avons autant d'équations de ce type que de poutres.

**En somme, le système final à résoudre sera réduit de  $NP$  degrés de liberté de translation. Mais la question est, lesquels ?**



# Problématique de l'orientation des poutres.

## Poutres inclinées

## Les conditions d'indéformabilité axiale des poutres

---

En règle générale et pour tenir compte de l'interconnexion des poutres, il faudra poser les  $NP$  équations et les exploiter « simultanément » pour arriver à « réduire » les DDL de translation « non déterminants ».

En général, les choix sont faciles, ou « imposés », pour certains nœuds. On commencera par là et, de proche en proche, on arrive à prendre les décisions pour arriver à **choisir** les translations à « retenir ».

NB: Le cas limite est celui où il y a tellement d'équations qu'aucune translation n'est possible. Comme chaque nœud n'a que 2 translations, si  $NP \geq 2 \times NN$  alors aucune translation n'est possible. En tenant compte en plus du nombre de translations bloquée aux appuis  $NTA$ , la condition devient plus contraignante, ainsi :

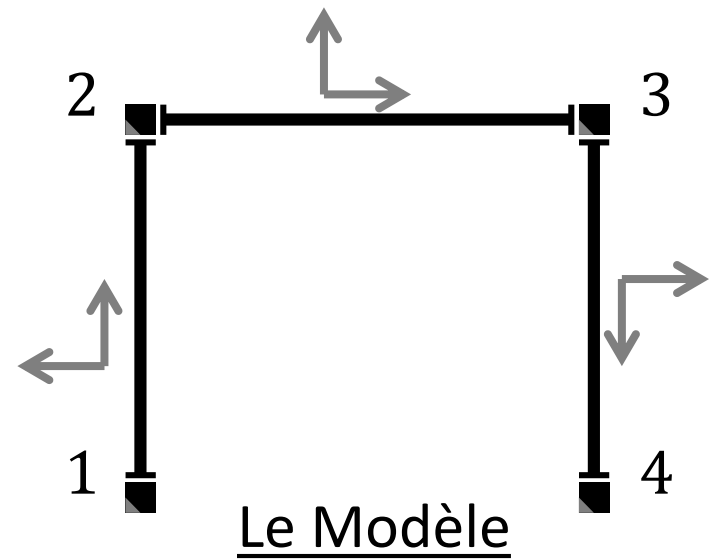
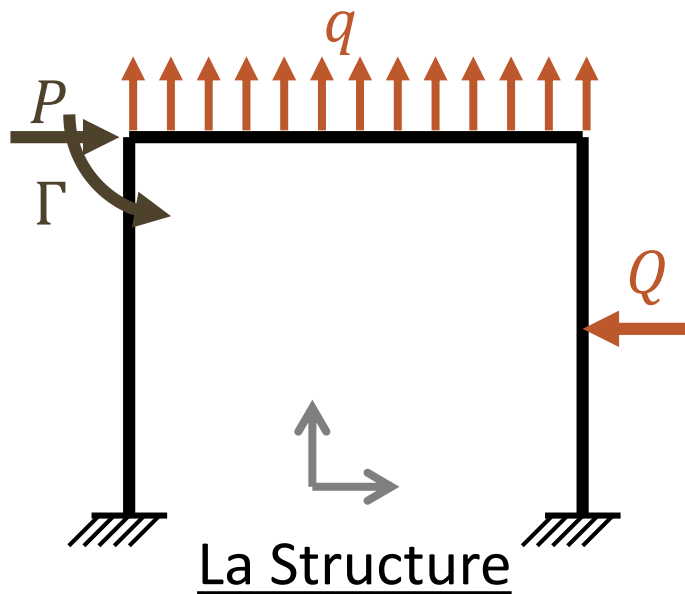
**Si  $NP \geq 2 \times NN - NTA$  alors, les nœuds de la structure ne peuvent subir que des rotations.**



# Exemple 1

## Terminer l'exemple illustratif (par la MR)

Pour terminer l'exemple illustratif, on précise quelques données: Les poutres ont la même longueur  $L$  et la même raideur  $EI$ . La charge  $Q$  est appliquée à mi travée et  $q$  est uniformément distribuée.



# Exemple 1

## Exploitation des étapes déjà accomplies

---

En utilisant la  $MD_C$ , on est arrivé à définir les 3 DDL inconnus

$$\theta_{z_2} , \theta_{z_3} \text{ et } U_2$$

et à écrire le système des 3 équations d'équilibre qui permettent de les obtenir:

$$\left\{ \begin{array}{l} Mz_{21} + Mz_{23} = \Gamma - Mz_{23}^0 \\ Mz_{32} + Mz_{34} = 0 - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 \\ Fx_{21} + Fx_{34} = P - Fx_{23}^0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 \end{array} \right.$$



# Exemple 1

## Exploitation des étapes déjà accomplies

---

En tenant compte des orientations des poutres, on écrit les correspondances entre les efforts intervenant dans les équations à résoudre et les forces des poutres isolées:

$$Mz_{ij} = mz_{ij} \quad ; \quad Mz_{ij}^0 = mz_{ij}^0$$

$$Fx_{21} = -fy_{21}; \quad Fx_{34} = fy_{34};$$

$$Fx_{23}^0 = fx_{23}^0 \quad ; \quad Fx_{32}^0 = fx_{32}^0 \quad ; \quad Fx_{34}^0 = fy_{34}^0$$



# Exemple 1

## Exploitation des étapes déjà accomplies

En revenant aux expressions établies pour une poutre isolée, on écrit les expressions des efforts induits par les déplacements qui interviennent dans les équations d'équilibre:

$$mz_{21} = + \frac{2 E I_z}{L} (\theta_{z_{12}} + 2 \theta_{z_{21}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{12} - v_{21});$$

$$mz_{23} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \theta_{z_{23}} + \theta_{z_{32}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{23} - v_{32});$$

$$mz_{32} = + \frac{2 E I_z}{L} (\theta_{z_{23}} + 2 \theta_{z_{32}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{23} - v_{32});$$

$$mz_{34} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \theta_{z_{34}} + \theta_{z_{43}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{34} - v_{43});$$

$$fy_{21} = - \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_{12}} + \theta_{z_{21}}) - \frac{12 E I_z}{L^3} (v_{12} - v_{21});$$

$$fy_{34} = + \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_{34}} + \theta_{z_{43}}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (v_{34} - v_{43});$$





# Exemple 1

## Exploitation des étapes déjà accomplies

En tenant compte des CL et des orientations des poutres, les équations ci-avant s'écrivent en fonction des DDL inconnus comme suit:

$$M_{Z_{21}} = m_{Z_{21}} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \Theta_{Z_2}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (U_2)$$

$$M_{Z_{23}} = m_{Z_{23}} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \Theta_{Z_2} + \Theta_{Z_3})$$

$$M_{Z_{32}} = m_{Z_{32}} = + \frac{2 E I_z}{L} (\Theta_{Z_2} + 2 \Theta_{Z_3})$$

$$M_{Z_{34}} = m_{Z_{34}} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \Theta_{Z_3}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (U_2)$$

$$F_{x_{21}} = -f_{y_{21}} = + \frac{6 E I_z}{L^2} (\Theta_{Z_2}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (U_2)$$

$$F_{x_{34}} = f_{y_{34}} = + \frac{6 E I_z}{L^2} (\Theta_{Z_3}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (U_2)$$



# Exemple 1

## Exploitation des étapes déjà accomplies

---

En revenant aux expressions établies pour une poutre isolée, on écrit les expressions des efforts dus aux charges en travées qui interviennent dans les équations d'équilibre:

$$Mz_{23}^0 = mz_{23}^0 = -q L^2 / 12$$

$$Mz_{32}^0 = mz_{32}^0 = +q L^2 / 12$$

$$Mz_{34}^0 = mz_{34}^0 = -(-Q) L / 8$$

$$Fx_{23}^0 = fx_{23}^0 = 0$$

$$Fx_{32}^0 = fx_{32}^0 = 0$$

$$Fx_{34}^0 = fy_{34}^0 = -(-Q) / 2$$



# Exemple 1

## La solution: Les DDL

En remplaçant, on arrive au système suivant:

$$\begin{cases} + \frac{2 E I_z}{L} (4 \Theta_{Z_2} + \Theta_{Z_3}) + \frac{6 E I_z}{L^2} U_2 = \Gamma + q L^2 / 12 \\ + \frac{2 E I_z}{L} (\Theta_{Z_2} + 4 \Theta_{Z_3}) + \frac{6 E I_z}{L^2} U_2 = 0 - q L^2 / 12 - QL / 8 \\ + \frac{6 E I_z}{L^2} (\Theta_{Z_2} + \Theta_{Z_3}) + \frac{24 E I_z}{L^3} U_2 = P - 0 - 0 - Q / 2 \end{cases}$$

Dont la solution est

$$\begin{Bmatrix} \Theta_{Z_2} \\ \Theta_{Z_3} \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{84 E I_z} \begin{bmatrix} 13 & -1 & -3 L \\ -1 & 13 & -3 L \\ -3 L & -3 L & 5 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma + q L^2 / 12 \\ - q L^2 / 12 - QL / 8 \\ P - Q / 2 \end{Bmatrix}$$

En se rappelant que:  $U_3 = U_2$ ;  $V_2 = V_3 = 0$ ;  $U_1 = V_1 = U_4 = V_4 = 0$  ;  
 $\Theta_{Z_1} = \Theta_{Z_4} = 0$  on a donc tous les déplacements des nœuds de la structure.



# Exemple 1

## La solution aux extrémités $i$ et $j$ d'une poutre

Les déplacements aux extrémités d'une poutre sont déduits des DDL de ses nœuds (fonction de l'orientation de la poutre). Quant aux efforts, on commence par calculer les efforts dus à la flexion. Les efforts axiaux se déduisent à partir de l'équilibre des nœuds.

Flexion simple:

$$\begin{Bmatrix} f y_{ij}^t \\ m z_{ij}^t \\ f y_{ji}^t \\ m z_{ji}^t \end{Bmatrix} = \frac{E I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 L & -12 & 6 L \\ 6 L & 4 L^2 & -6 L & 2 L^2 \\ -12 & -6 L & 12 & -6 L \\ 6 L & 2 L^2 & -6 L & 4 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f y_{ij}^0 \\ m z_{ij}^0 \\ f y_{ji}^0 \\ m z_{ji}^0 \end{Bmatrix}$$



# Exemple 1

## La solution: Poutre 12

## Déplacements et forces de flexion aux extrémités

---

Vu l'orientation de la poutre, on a :  $\begin{pmatrix} v_{12} \\ \theta_{z_{12}} \\ v_{21} \\ \theta_{z_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_2 \\ \theta_{z_2} \end{pmatrix}$ , d'où

$$\begin{pmatrix} fy_{12}^t \\ mz_{12}^t \\ fy_{21}^t \\ mz_{21}^t \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} \frac{21}{L} \Gamma + 21P + \frac{7L}{2} q - \frac{63}{8} Q \\ 4 \Gamma + 12L P + \frac{7L^2}{6} q - \frac{19L}{4} Q \\ -\frac{21}{L} \Gamma - 21 P - \frac{7L}{2} q + \frac{63}{8} Q \\ 17 \Gamma + 9L P + \frac{7L^2}{3} q - \frac{25L}{8} Q \end{pmatrix}$$



# Exemple 1

## La solution: Poutre 23

## Déplacements et forces de flexion aux extrémités

---

Vu l'orientation de la poutre, on a :  $\begin{Bmatrix} v_{23} \\ \theta_{z_{23}} \\ v_{32} \\ \theta_{z_{32}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_{z_3} \\ 0 \\ \theta_{z_3} \end{Bmatrix}$ , d'où

$$\begin{Bmatrix} fy_{23}^t \\ mz_{23}^t \\ fy_{32}^t \\ mz_{32}^t \end{Bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Bmatrix} \frac{36}{L} \Gamma - 18 P - 21L q + \frac{9}{2} Q \\ 25 \Gamma - 9L P - \frac{7L^2}{3} q + \frac{25L}{8} Q \\ -\frac{36}{L} \Gamma + 18 P - 21L q - \frac{9}{2} Q \\ 11 \Gamma - 9L P + \frac{7L^2}{3} q + \frac{11L}{8} Q \end{Bmatrix}$$



# Exemple 1

La solution: Poutre 34

Déplacements et forces de flexion aux extrémités

---

Vu l'orientation de la poutre, on a :  $\begin{Bmatrix} v_{34} \\ \theta_{z_{34}} \\ v_{43} \\ \theta_{z_{43}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ \Theta_{z_3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , d'où

$$\begin{Bmatrix} f_{y_{34}}^t \\ m_{z_{34}}^t \\ f_{y_{43}}^t \\ m_{z_{43}}^t \end{Bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Bmatrix} -\frac{21}{L} \Gamma + 21 P - \frac{7L}{2} q + \frac{63}{8} Q \\ -11 \Gamma + 9L P - \frac{7L^2}{3} q - \frac{11L}{8} Q \\ \frac{21}{L} \Gamma - 21 P + \frac{7L}{2} q + \frac{273}{8} Q \\ -10 \Gamma + 12L P - \frac{7L^2}{6} q - \frac{47L}{4} Q \end{Bmatrix}$$



# Exemple 1

## La solution: Les efforts axiaux

---

Les efforts axiaux se déduisent à partir des équations d'équilibre des nœuds de la structure suivant les DDL translation. Vu que les poutres sont orthogonales entre-elles, qu'aucune poutre n'est chargée selon son axe, et qu'il n'y a pas plus de 2 poutres connectées à un nœud, il est aisé de déduire:

$$\begin{aligned}fx_{21}^t &= -fy_{23}^t \\fx_{23}^t &= P + fy_{21}^t \\fx_{32}^t &= -fy_{34}^t \\fx_{34}^t &= fy_{32}^t\end{aligned}$$





# Exemple 1

## La solution: Les Réactions aux appuis

---

Tous les efforts appliqués aux nœuds sont maintenant connus sauf, les réactions selon les DDL bloqués (ou imposés). Elles se déduisent en écrivant l'équilibre des nœuds selon ces DDL. On trouve aisément :

$$R_{X1} = -fy_{12}^t$$

$$R_{Y1} = fx_{12}^t$$

$$R_{\Theta 1} = mz_{12}^t$$

$$R_{X4} = fy_{43}^t$$

$$R_{Y4} = -fx_{43}^t$$

$$R_{\Theta 4} = mz_{43}^t$$



# Exemple 1

## La solution: Calcul de paramètres dans une section

---

Avec les résultats ci-avant, toutes les poutres sont statiquement déterminées. On peut calculer tous les paramètres (efforts internes, déplacements, contraintes, ...) en **n'importe quelle section  $\Sigma$  d'abscisse  $x$**  le long de leurs longueurs.

À titre d'exemples, on va calculer le moment fléchissant et l'effort tranchant à mi travée de la poutre (23) et à  $x = 3L/4$  de la poutre (34).



# Exemple 1

La solution:

$M$  et  $V$  à mi travée de la poutre (23)

---

Le moment à mi travée de la poutre (23) vaut:

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = fy_{23}^t \frac{L}{2} - mz_{23}^t + \frac{L^2}{8} q$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{42} \left( -7 \Gamma + 0 P - \frac{35L^2}{12} q - \frac{7L}{8} Q \right)$$

L'effort tranchant est égal à:

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = -fy_{23}^t - \frac{L}{2} q$$

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{42} \left( -\frac{36}{L} \Gamma + 18P + 0 q - \frac{9}{2} Q \right)$$



# Exemple 1

La solution:

$M$  et  $V$  à  $x=3L/4$  de la poutre (34)

---

Le moment fléchissant à  $x = 3L/4$  de la poutre (34) vaut :

$$M\left(\frac{3L}{4}\right) = fy_{34}^t \frac{3L}{4} - \frac{L}{4} Q$$

$$M\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{1}{42} \left( -\frac{63}{4} \Gamma + \frac{63L}{4} P - \frac{21L^2}{8} q - \frac{147L}{32} Q \right)$$

L'effort tranchant est égal à :

$$V\left(\frac{3L}{4}\right) = -fy_{34}^t + Q$$

$$V\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{1}{42} \left( \frac{21}{L} \Gamma - 21P + \frac{7L}{2} q + \frac{273}{8} Q \right)$$



# Exemple 1

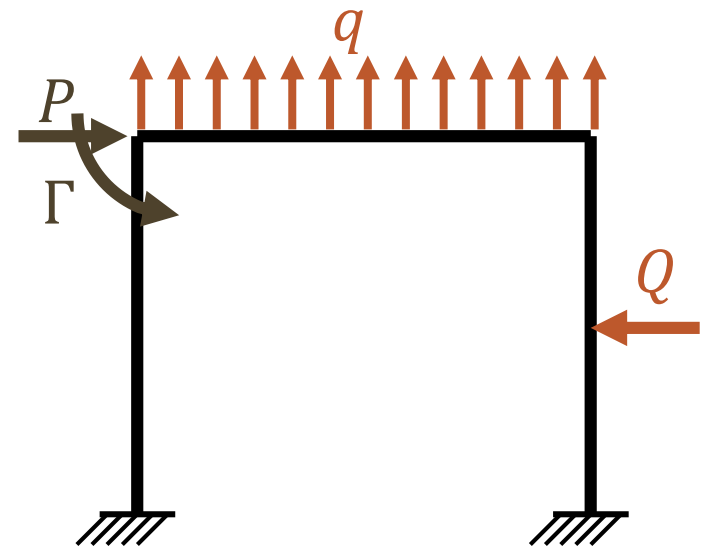
## Application Numérique

Pour tracer les diagrammes des efforts internes, on effectue les calculs en prenant:

$$L = 2m; q = 10 \text{ kN}/m; Q = 10 \text{ kN}; P = 10 \text{ kN}; \Gamma = 10 \text{ kN}\cdot m$$

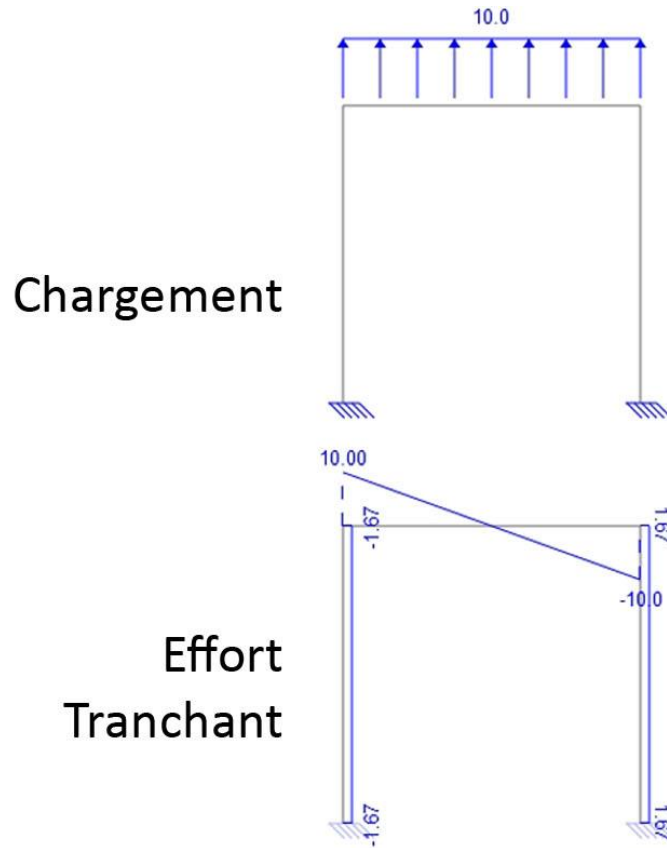
Les diagrammes sont donnés pour chaque charge, puis pour la combinaison.

Les unités sont le  $kN$  et le  $m$

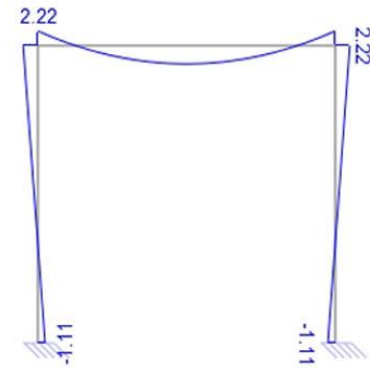


# Exemple 1

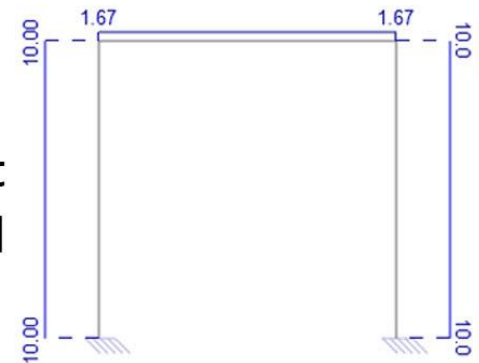
Application Numérique:  $q = 10 \text{ kN/m}$



Moment  
Flechissant



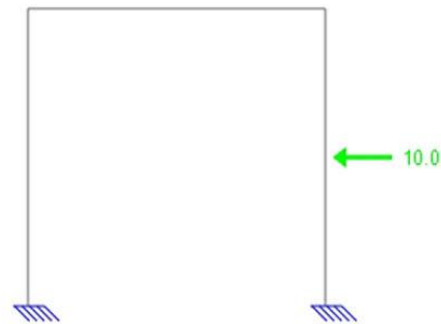
Effort  
Normal



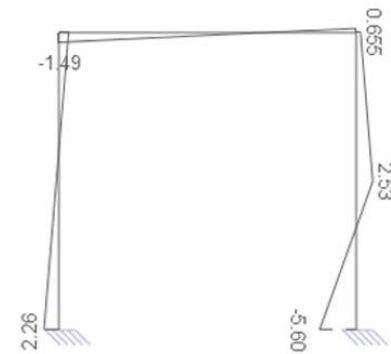
# Exemple 1

Application Numérique:  $Q = 10 \text{ kN}$

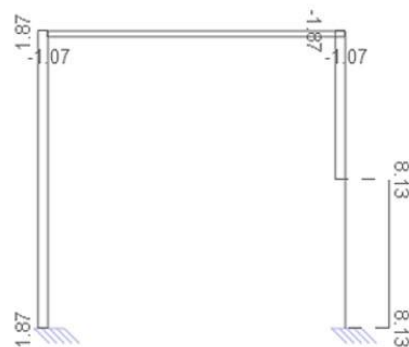
Chargement



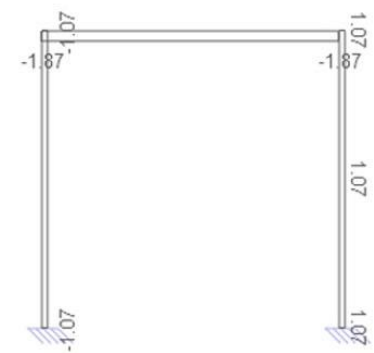
Moment  
Flechissant



Effort  
Tranchant



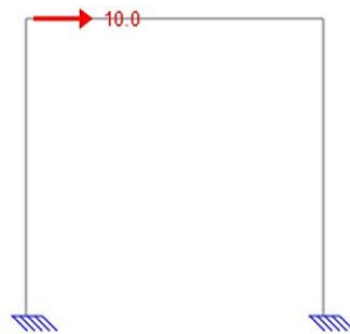
Effort  
Normal



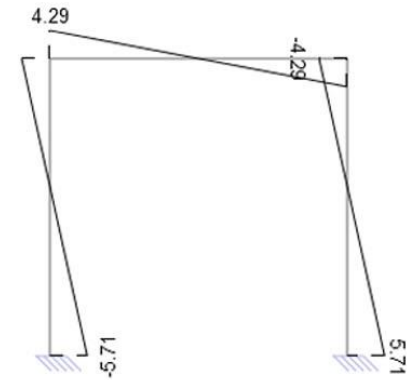
# Exemple 1

Application Numérique:  $P = 10 \text{ kN}$

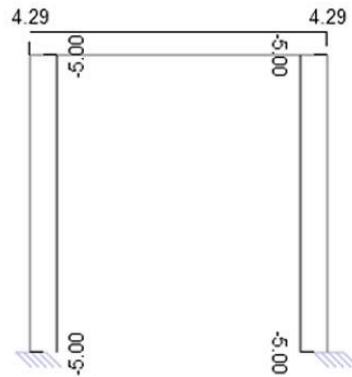
Chargement



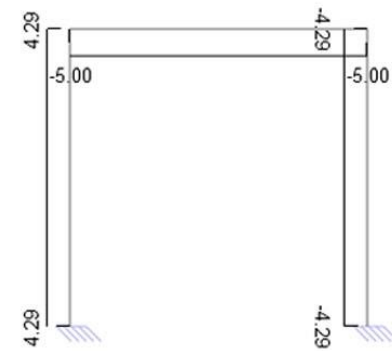
Moment  
Flechissant



Effort  
Tranchant



Effort  
Normal

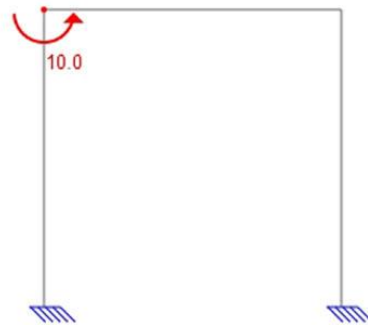




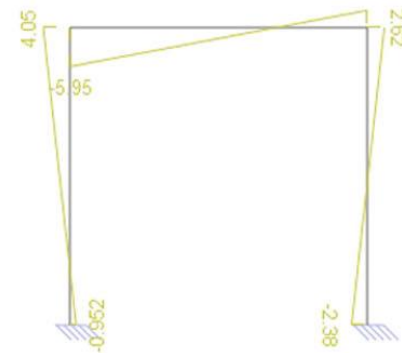
# Exemple 1

Application Numérique:  $\Gamma = 10 \text{ kN.m}$

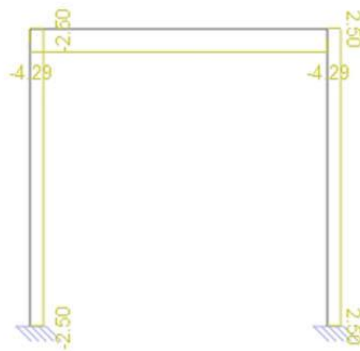
Chargement



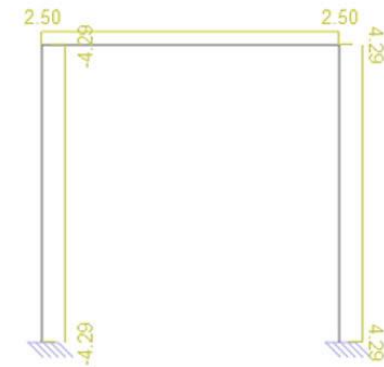
Moment  
Flechissant



Effort  
Tranchant

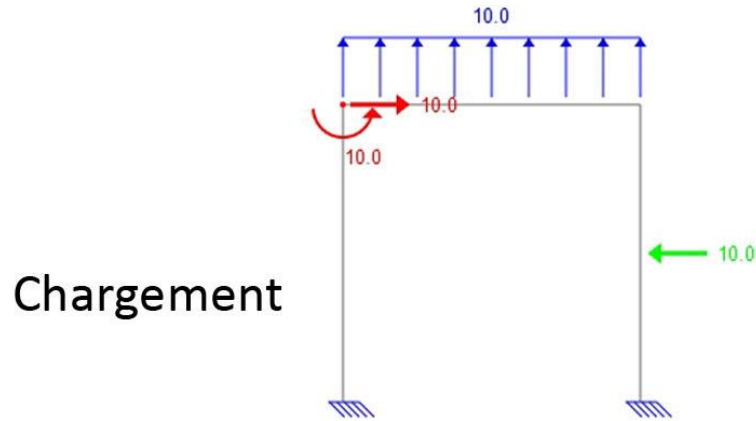


Effort  
Normal

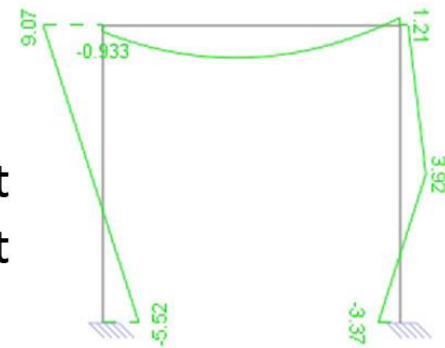


# Exemple 1

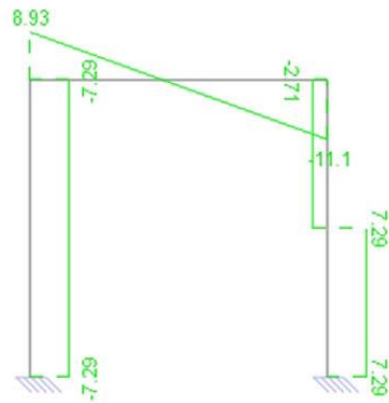
## Application Numérique: Diagrammes combinés



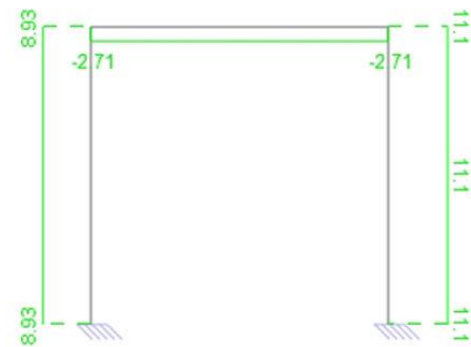
Moment  
Flechissant



Effort  
Tranchant

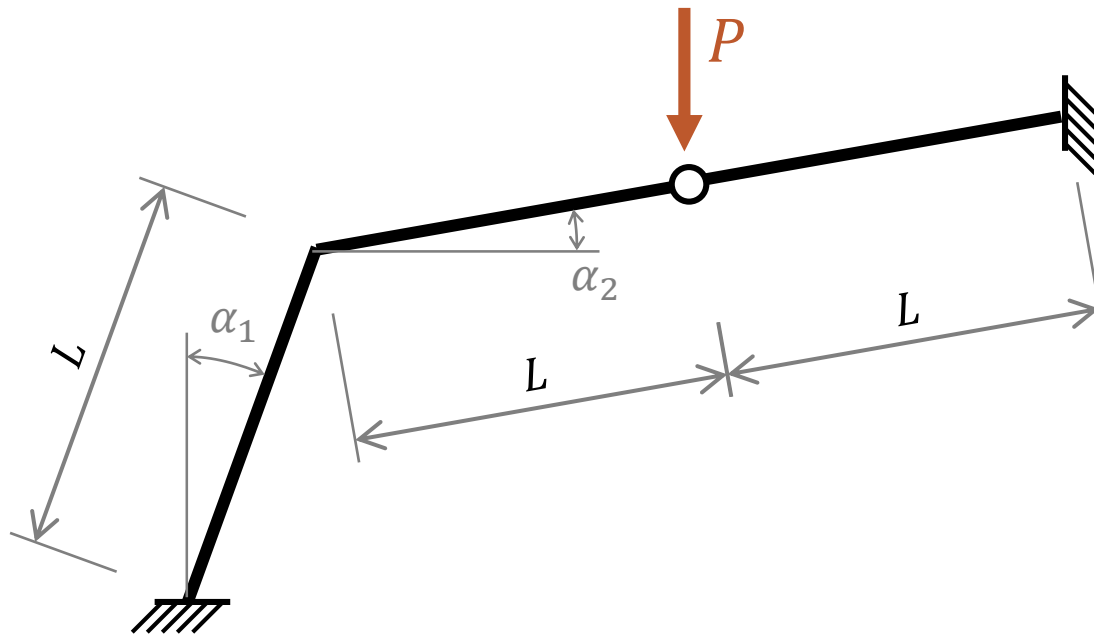


Effort  
Normal



# Exemple 2

## Structure – Chargement

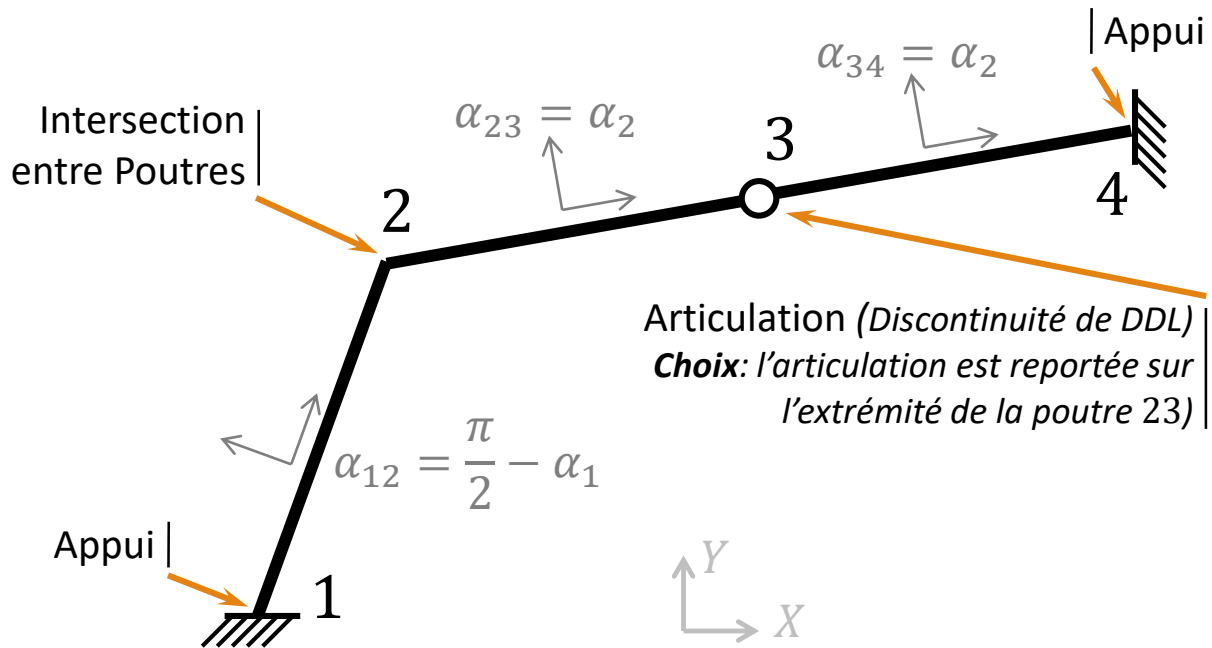


La raideur  $E I_z$  est constante



# Exemple 2

## Nœuds – Poutres orientées



# Exemple 2

## Paramètres / Données

---

Nombre de nœuds:  $NN = 4$

Nombre de poutres:  $NP = 3$

Structure plane *se déformant dans son plan* (les DDL d'un nœud  $i$  sont  $U_i$ ,  $V_i$  et  $\theta z_i$ )

- Nombre de DDL/nœuds:  $NDN = 3$
- Nombre de translations/nœuds:  $NTN = 2$

Liaisons:

- Nombre de DDL bloqués:  $NDA = 6$
- Translations bloquées:  $U_1 = V_1 = U_4 = V_4 = 0$ ; soit  $NTA = 4$
- Rotations bloquées :  $\theta z_1 = \theta z_4 = 0$

On utilise la  $MD_C$  :

- Nombre total d'inconnues :  $NDL = NN \times NDN - NDA - NP = 3$
- Nombre de translations inconnues:  $NTL = NN \times NTN - NTA - NP = 1$
- On a donc deux rotations inconnues  $\theta z_2$  et  $\theta z_3$  et une translation, **laquelle ?**



# Exemple 2

## Exploitation des conditions d'indéformabilité axiale des poutres

---

Les conditions d'indéformabilité axiale des 3 poutres s'écrivent:

$$\begin{cases} u_{12} - u_{21} = 0 \\ u_{23} - u_{32} = 0 \\ u_{34} - u_{43} = 0 \end{cases}$$

En les exprimant en fonction des translations des nœuds et en exploitant les conditions d'appuis, on arrive à

$$\begin{cases} (0 - U_2) \sin(\alpha_1) + (0 - V_2) \cos(\alpha_1) = 0 \\ (U_2 - U_3) \cos(\alpha_2) + (V_2 - V_3) \sin(\alpha_2) = 0 \\ (U_3 - 0) \cos(\alpha_2) + (V_3 - 0) \sin(\alpha_2) = 0 \end{cases}$$

On a un système de 3 équations où interviennent 4 translations; ces translations ne sont donc pas indépendantes: on peut en exprimer 3 en fonction de la 4<sup>ème</sup>.

Pour donner une approche générale, on réécrit ces équations sous forme matricielle.



# Exemple 2

## Exploitation des conditions d'indéformabilité axiale des poutres

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 & 0 \\ \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) & -\cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour trouver une/la translation « déterminante » qui permet de définir les 3 autres, il faut trouver le/un sous déterminant non nul en éliminant une colonne à la fois. Ainsi, on peut retenir le 4<sup>ème</sup> DDL (ou le 3<sup>ème</sup>), soit  $V_3$ . D'où

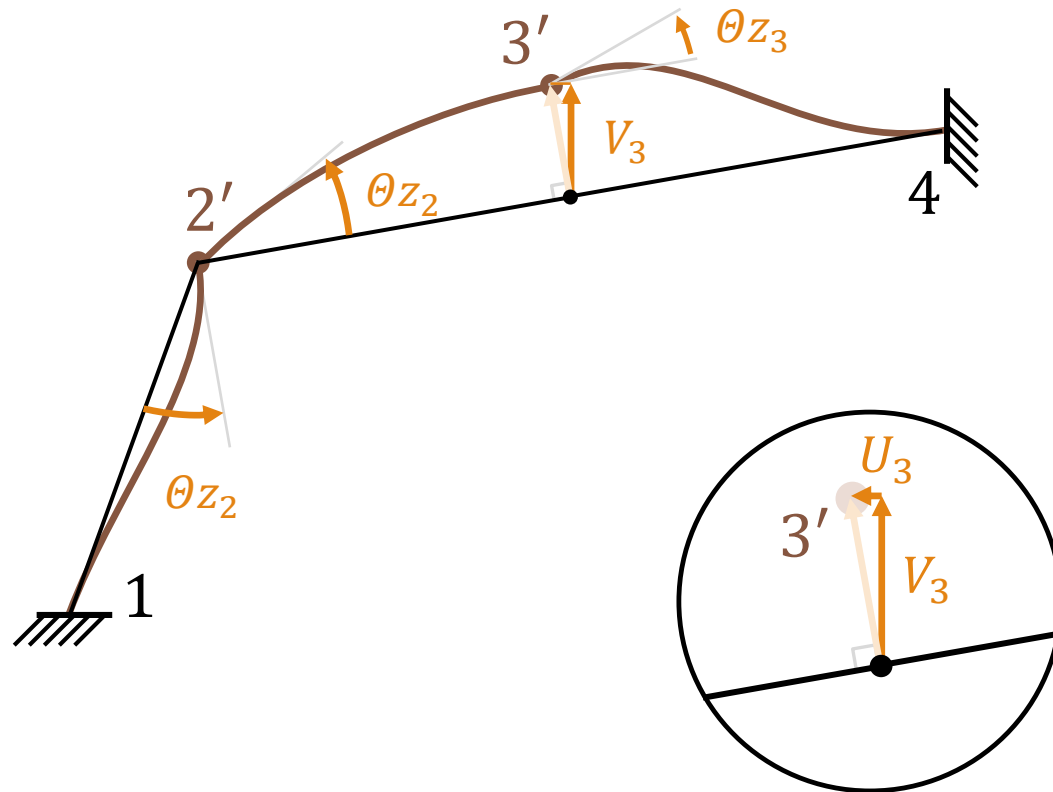
$$\begin{cases} U_2 = 0 \\ V_2 = 0 \\ U_3 = -\operatorname{tg}(\alpha_2) V_3 \end{cases}$$

**La translation retenue est donc  $V_3$ .**



# Exemple 2

Cinématique: les 3 DDL  $\theta_{z_2}$ ,  $\theta_{z_3}$  et  $V_3$





# Exemple 2

## Équilibre

---

Pour écrire l'équilibre, il faut pratiquer des coupures afin d'isoler les nœuds des poutres. Comme il n'y a pas de charges en travées, les deux étapes de l'équilibre (Parties I et II) se réduisent à une seule. Les équations d'équilibre des nœuds sous les moments induits par les rotations sont faciles à écrire:

Au nœud 2

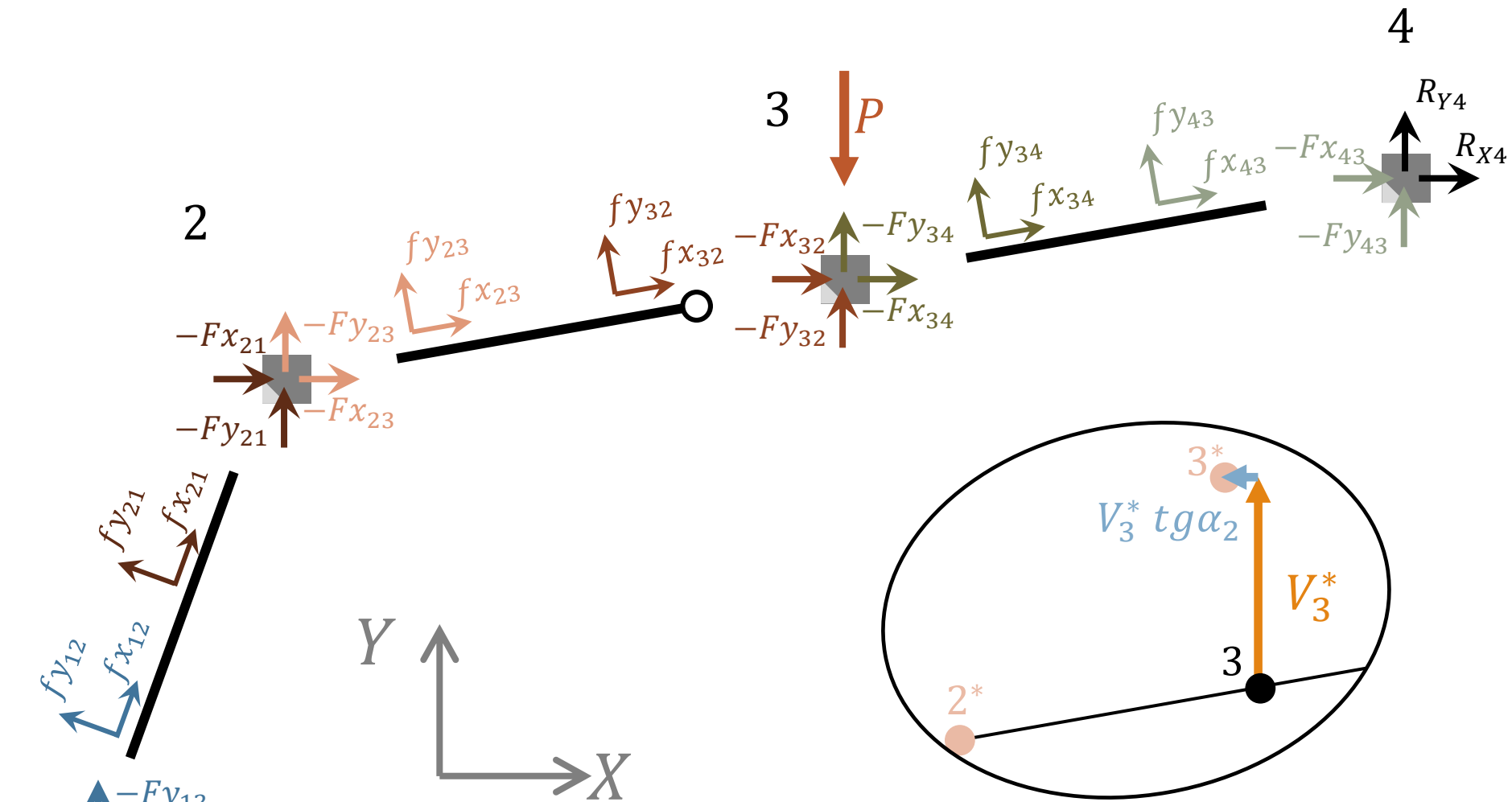
$$M_{Z_{21}} + M_{Z_{23}} = 0$$

Au nœud 3

$$M_{Z_{32}} + M_{Z_{34}} = 0$$

Pour écrire l'équilibre selon le DDL de translation, on utilise le PTV. Un déplacement virtuel quelconque  $V_3^*$  est pris dans la direction du DDL retenu  $V_3$ . Il induit une composante  $(-tg\alpha_2 V_3^*)$  dans la direction de  $U_3$  et aucune translation du nœud 2 (déformation virtuelle cinématiquement admissible).





# Équilibre

## Forces et cinématique virtuelle



# Exemple 2

## Équilibre

---

La somme des travaux virtuels sous la déformée virtuelle doit être nulle, alors

$$+Fx_{32} \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* + Fx_{34} \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* - Fy_{32} V_3^* - Fy_{34} V_3^* - P V_3^* = 0$$

En utilisant les relations entre les forces aux nœuds et les forces aux extrémités des poutres, on a:

$$\begin{aligned} & [+ (fx_{32} \cos\alpha_2 - fy_{32} \sin\alpha_2) \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* \\ & + (fx_{34} \cos\alpha_2 - fy_{34} \sin\alpha_2) \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* \\ & - (fy_{32} \cos\alpha_2 + fx_{32} \sin\alpha_2) V_3^* \\ & - (fy_{34} \cos\alpha_2 + fx_{34} \sin\alpha_2) V_3^* \\ & - P V_3^* ] = 0 \end{aligned}$$



# Exemple 2

## Équilibre

---

Les travaux virtuels des forces axiales sont négligés. Il s'ensuit:

$$\left( -fy_{32} \frac{1}{\cos\alpha_2} - fy_{34} \frac{1}{\cos\alpha_2} - P \right) V_3^* = 0$$

Ce travail virtuel devant être nul ( $\forall V_3^*$ ), on obtient alors la 3<sup>ème</sup> équation d'équilibre dans la direction de  $V_3$ . Le système d'équation à résoudre est donc:

$$\begin{cases} mz_{21} + mz_{23} = 0 \\ mz_{32} + mz_{34} = 0 \\ fy_{32} + fy_{34} = -P \cos\alpha_2 \end{cases}$$



# Exemple 2

## Équilibre

On utilise maintenant les expressions « connues » pour les poutres isolées; la poutre 23 est articulée en son extrémité 3.

$$m_{Z_{21}} = \frac{E I_z}{L} (2 \theta_{Z_{12}} + 4 \theta_{Z_{21}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{12} - v_{21})$$

$$m_{Z_{23}} = \frac{E I_z}{L} (3 \theta_{Z_{23}}) + \frac{3 E I_z}{L^2} (v_{23} - v_{32})$$

$$m_{Z_{32}} = 0$$

$$m_{Z_{34}} = \frac{E I_z}{L} (4 \theta_{Z_{34}} + 2 \theta_{Z_{43}}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (v_{34} - v_{43})$$

$$f_{Y_{32}} = \frac{E I_z}{L^2} (-3 \theta_{Z_{23}}) + \frac{3 E I_z}{L^3} (v_{32} - v_{23})$$

$$f_{Y_{34}} = \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{Z_{34}} + \theta_{Z_{43}}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (v_{34} - v_{43})$$



# Exemple 2

## Équilibre

En exploitant aussi les CL (DDL grisés dans la diapo précédente), les équations d'équilibre deviennent:

$$\begin{cases} \frac{7EI_z}{L} \theta_{Z_{21}} - \frac{6EI_z}{L^2} v_{21} + \frac{3EI_z}{L^2} v_{23} - \frac{3EI_z}{L^2} v_{32} = 0 \\ \frac{4EI_z}{L} \theta_{Z_{34}} + \frac{6EI_z}{L^2} v_{34} = 0 \\ -\frac{3EI_z}{L^2} \theta_{Z_{23}} + \frac{6EI_z}{L^2} \theta_{Z_{34}} + \frac{3EI_z}{L^3} v_{32} - \frac{3EI_z}{L^3} v_{23} + \frac{12EI_z}{L^3} v_{34} = -P \cos \alpha_2 \end{cases}$$

Or, les translations des extrémités des poutres sont reliées aux translations des nœuds par

$$u_{ij} = U_i \cos \alpha_{ij} + V_i \sin \alpha_{ij} ; v_{ij} = V_i \cos \alpha_{ij} - U_i \sin \alpha_{ij}$$

Et les rotations des extrémités des poutres sont les rotations des nœuds.



# Exemple 2

## Équilibre

---

Ainsi,

$$v_{21} = V_2 \sin\alpha_1 - U_2 \cos\alpha_1$$

$$v_{23} = V_2 \cos\alpha_2 - U_2 \sin\alpha_2$$

$$v_{32} = V_3 \cos\alpha_2 - U_3 \sin\alpha_2$$

$$v_{34} = V_3 \cos\alpha_2 - U_3 \sin\alpha_2$$

Or, d'après la cinématique on a

$$U_2 = 0 ; V_2 = 0 \text{ et } U_3 = -V_3 \operatorname{tg}\alpha_2$$

Donc:

$$v_{21} = v_{23} = 0 \text{ et } v_{32} = v_{34} = V_3 / \cos\alpha_2$$



# Exemple 2

## Solution : les déplacements

Le système à résoudre est:

$$\begin{cases} \frac{7EI_z}{L} \Theta_{Z_2} - \frac{3EI_z}{L^2} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = 0 \\ \frac{4EI_z}{L} \Theta_{Z_3} + \frac{6EI_z}{L^2} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = 0 \\ -\frac{3EI_z}{L^2} \Theta_{Z_2} + \frac{6EI_z}{L^2} \Theta_{Z_3} + \frac{15EI_z}{L^3} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = -P \cos\alpha_2 \end{cases}$$

La solution est:

$$\begin{cases} V_3 = -\frac{7L^3}{33EI_z} P \cos^2\alpha_2 \\ \Theta_{Z_2} = -\frac{L^2}{11EI_z} P \cos\alpha_2 \\ \Theta_{Z_3} = +\frac{7L^2}{22EI_z} P \cos\alpha_2 \end{cases}$$





# Exemple 2

## La solution aux extrémités $i$ et $j$ d'une poutre

---

Les déplacements aux extrémités d'une poutre sont déduits des DDL de ses nœuds (fonction de l'orientation de la poutre). Quant aux efforts, on commence par calculer les efforts dus à la flexion. Les efforts axiaux se déduisent à partir de l'équilibre des nœuds.



# Exemple 2

## La solution: Poutre 12

## Déplacements et forces de flexion aux extrémités

---

Vu l'orientation de la poutre, on a :

$$u_{12} = 0; v_{12} = 0; \theta_{z_{12}} = 0;$$

$$u_{21} = 0; v_{21} = 0; \theta_{z_{21}} = \theta_{z_2};$$

D'où:

$$\begin{Bmatrix} f_{y_{12}}^t \\ m_{z_{12}}^t \\ f_{y_{21}}^t \\ m_{z_{21}}^t \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^2} \begin{Bmatrix} 6 \\ 2L \\ -6 \\ 4L \end{Bmatrix} \theta_{z_2} = \begin{Bmatrix} -6 \\ -2L \\ 6 \\ -4L \end{Bmatrix} \frac{P \cos \alpha_2}{11}$$



# Exemple 2

## La solution: Poutre 23

## Déplacements et forces de flexion aux extrémités

---

Vu l'orientation de la poutre, on a :

$$u_{23} = 0; v_{23} = 0; \theta_{z_{23}} = \theta_{z_2};$$

$$u_{32} = 0; v_{32} = V_3 / \cos \alpha_2; \theta_{z_{32}};$$

D'où:

$$\begin{Bmatrix} fy_{23}^t \\ mz_{23}^t \\ fy_{32}^t \\ mz_{32}^t \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^2} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3L \\ -3 \\ 0 \end{Bmatrix} \theta_{z_2} + \frac{EI_z}{L^3} \begin{Bmatrix} -3 \\ -3L \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{V_3}{\cos \alpha_2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ L \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{4 P \cos \alpha_2}{11}$$



# Exemple 2

## La solution: Poutre 34

## Déplacements et forces de flexion aux extrémités

---

Vu l'orientation de la poutre, on a :

$$u_{34} = 0; v_{34} = V_3 / \cos \alpha_2; \theta_{Z_{34}} = \theta_{Z_3};$$

$$u_{43} = 0; v_{43} = 0; \theta_{Z_{43}} = 0;$$

D'où:

$$\begin{pmatrix} fy_{34}^t \\ mz_{34}^t \\ fy_{43}^t \\ mz_{43}^t \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} 12 \\ 6L \\ -12 \\ 6L \end{pmatrix} \frac{V_3}{\cos \alpha_2} + \frac{EI_z}{L^2} \begin{pmatrix} 6 \\ 4L \\ -6 \\ 2L \end{pmatrix} \theta_{Z_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -L \end{pmatrix} \frac{7 P \cos \alpha_2}{11}$$



# Exemple 2

## La solution: Les efforts axiaux

---

Les efforts axiaux se déduisent à partir des équations d'équilibre des nœuds de la structure suivant les DDL translation :

Au nœud 2

$$Fx_{21} + Fx_{23} = 0$$

$$Fy_{21} + Fy_{23} = 0$$

Au nœud 3

$$Fx_{32} + Fx_{34} = 0$$

$$Fy_{32} + Fy_{34} + P = 0$$



# Exemple 2

## La solution: Les efforts axiaux

---

En utilisant les relations « forces locales » - « forces globales » et en rassemblant les inconnues à gauche, ces équations deviennent:

Au nœud 2

$$fx_{21}^t \sin\alpha_1 + fx_{23}^t \cos\alpha_2 = fy_{21}^t \cos\alpha_1 + fy_{23}^t \sin\alpha_2$$

$$fx_{21}^t \cos\alpha_1 + fx_{23}^t \sin\alpha_2 = -fy_{21}^t \sin\alpha_1 - fy_{23}^t \cos\alpha_2$$

Au nœud 3

$$fx_{32}^t \cos\alpha_2 + fx_{34}^t \cos\alpha_2 = fy_{32}^t \sin\alpha_2 + fy_{34}^t \sin\alpha_2$$

$$fx_{32}^t \sin\alpha_2 + fx_{34}^t \sin\alpha_2 = -fy_{32}^t \cos\alpha_2 - fy_{34}^t \cos\alpha_2 - P$$



# Exemple 2

## La solution: Les efforts axiaux

---

Les 2 équations relatives au nœud 2 donnent:

$$\begin{Bmatrix} f x_{21}^t \\ f x_{23}^t \end{Bmatrix} = \frac{2 P \cos \alpha_2}{11 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} \begin{Bmatrix} -2 - 3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 3 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{Bmatrix}$$

Évidemment si  $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$ , c'est-à-dire si les poutres 12 et 23 ne sont pas alignées.



# Exemple 2

## La solution: Les efforts axiaux

Quant aux 2 équations relatives au nœud 3, elles ont une matrice non inversible (les poutres sont alignées)! On utilise alors l'équilibre de la poutre 23 pour obtenir  $f x_{32}^t$ :

$$f x_{32}^t = -f x_{23}^t = \frac{-2 P \cos \alpha_2}{11 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} (3 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Puis, de la 1<sup>ère</sup> équation d'équilibre du nœud 3 et de l'équilibre de la poutre 34, on obtient:

$$f x_{34}^t = -f x_{43}^t = \frac{P \cos \alpha_2}{11} \left[ \frac{2 (3 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2))}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} - 11 \operatorname{tg} \alpha_2 \right]$$

On a aussi:  $f x_{12}^t = -f x_{21}^t$





# Exemple 2

## La solution: Les efforts axiaux

---

Tous les efforts appliqués aux nœuds sont maintenant connus sauf, les réactions selon les DDL bloqués (ou imposés). Elles se déduisent en écrivant l'équilibre des nœuds selon ces DDL. On trouve aisément :

$$R_{X1} = Fx_{12} = fx_{12}^t \sin\alpha_1 - fy_{12}^t \cos\alpha_1$$

$$R_{Y1} = Fy_{12} = fy_{12}^t \sin\alpha_1 + fx_{12}^t \cos\alpha_1$$

$$R_{\Theta 1} = Mz_{12} = mz_{12}^t$$

$$R_{X4} = Fx_{43} = fx_{43}^t \cos\alpha_2 - fy_{43}^t \sin\alpha_2$$

$$R_{Y4} = Fy_{43} = fy_{43}^t \cos\alpha_2 + fx_{43}^t \sin\alpha_2$$

$$R_{\Theta 4} = Mz_{43} = mz_{43}^t$$



# Exemple 2

## Application Numérique

---

Pour tracer les diagrammes des efforts internes, on effectue les calculs en prenant:

$$L = 2m$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$\alpha_1 = 20^\circ$$

$$\alpha_2 = 10^\circ$$

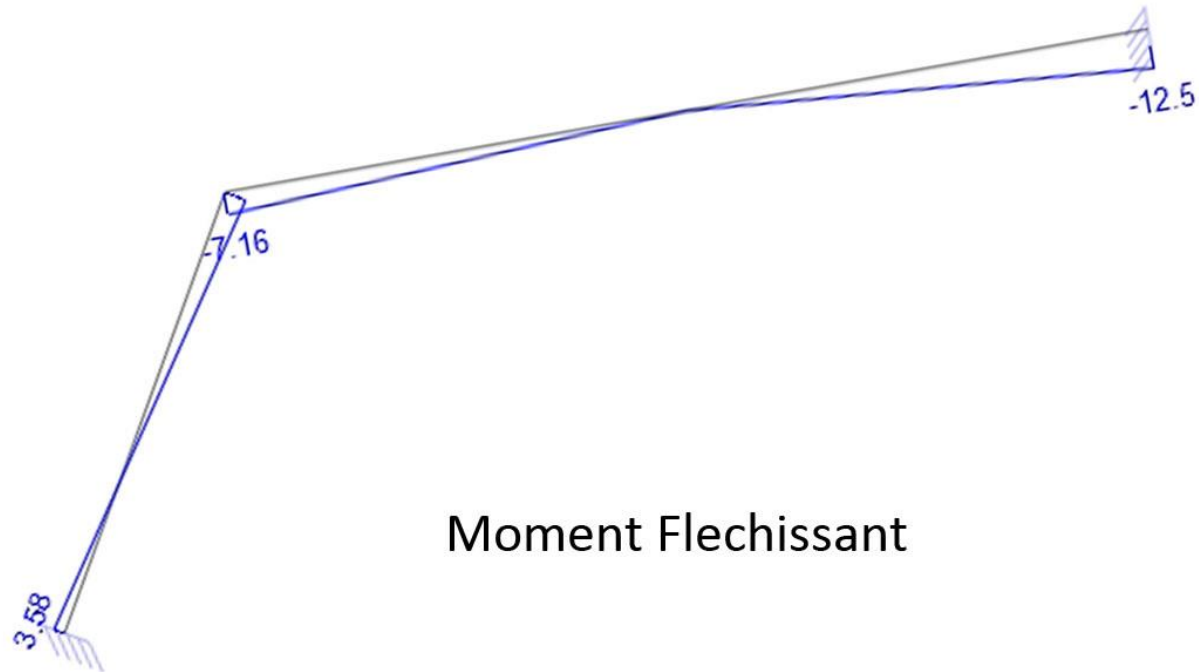
Les unités des diagrammes sont le  $m$  et  $kN$ .



# Exemple 2

## Application Numérique

---

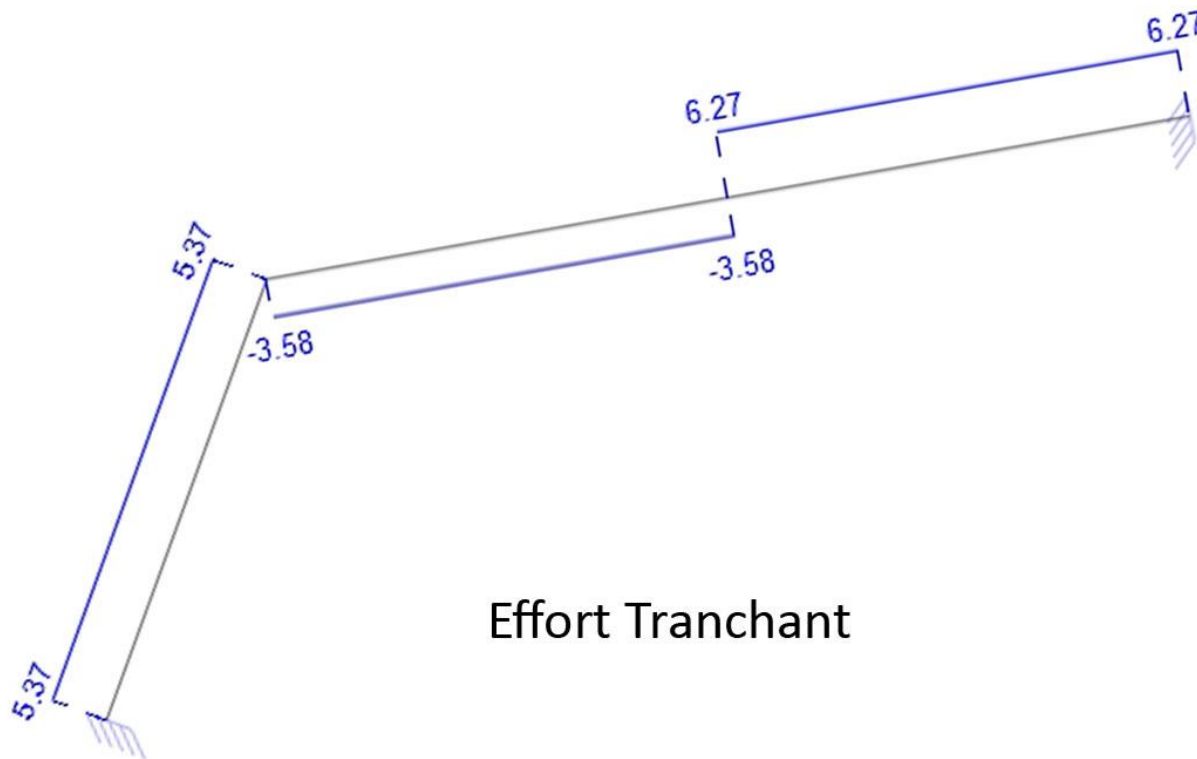


Moment Flechissant



# Exemple 2

## Application Numérique



Effort Tranchant



# Exemple 2

## Application Numérique

---

