I.1 Introduction et définition

L'idée des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs $x^{(k)}$ qui converge vers le vecteur x, solution de l'équation $Ax = b$.

La plupart des méthodes itératives sont de la forme suivantes : partant d'un vecteur arbitraire $x^{(0)}$, on engendre une suite $x^{(k)}$ définie par :

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

Où B est une matrice

Définition 1 : une méthode itérative de la forme définie ci-dessus est dite convergente si pour tout $x^{(0)}$, on a

$$x^{(k)} \to x, \quad quand \quad k \longrightarrow \infty$$

Et la limite vérifie $Ax = b$.

L'intérêt des méthodes itératives, comparées aux méthodes directes est d'être simple à programmer.

I.2 La méthode de Jacobi (1830 environ)

La méthode de JACOBI, due au mathématicien allemand Karl Jacobi, est une méthode itérative de résolution du système matriciel $[A]\{x\} = \{b\}$. L'idée est de découper la matrice $[A]$ en deux matrices.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Que l'on peut écrire sous la forme

$$[\,A\,] = [\,M\,] + [\,N\,]$$

Où $[M\,]$est la partie diagonale de $[A]$.

On effectue si nécessaire des permutations de lignes pour que $[M]$ soit inversible. Le système s'écrit alors

$$[M]\{x\} + [N]\{x\} = \{b\}$$

$$[M]^{-1}[M]\{x\} + [M]^{-1}[N]\{x\} = [M]^{-1}\{b\}$$

Donc

$$\{ x \} = -[M]^{-1}[N]\{x\} + [M]^{-1}\{b\}$$ (Equation du point fixe)

$[J]=[M]^{-1}[N]$ est appelée matrice de JACOBI

On considère l'itération $\begin{cases} x^{(0)} & quelconque \\ x^{(k+1)} = -M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$

Si elle est convergente, sa limite est le point fixe, c'est-à-dire la solution du système.

C'est une méthode de type linéaire dont l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x^{(0)} & quelconque \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

Avec $B = -M^{-1}N \quad et \quad c = M^{-1}b$

Théorème 1

Une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que l'itération converge quel que soit le vecteur de départ, est que toutes les valeurs propres de la matrice B soient de module inferieur à 1. Mais cette condition est difficile à vérifier en pratique.

Définition.

On dit que A est une matrice à diagonale dominante si

$$\forall i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad ou$$

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad |a_{jj}| > \sum_{i=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Condition de convergence

Théorème.

Si A est une matrice à diagonale dominante, alors l'itération est convergente quelque soit le vecteur initial $x^{(0)}$

On rappelle que l'itération est :

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad quelconque \\ x^{(k+1)} = -M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$$

Cette égalité matricielle est équivalente à

$$Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} = b$$

L'équation i de ce système s'écrit alors :

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} = b_i$$

D'où

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Application

Soit le système ci-dessous à résoudre

$$\begin{cases} -16x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -19 \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + x_2 + 18x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 14x_4 = 1 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -16 & 6 & -2 & -5 \\ 3 & 10 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & 18 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19 \\ 1 \\ 12 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La matrice est à diagonale dominante donc l'itération est convergente

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)}}{a_{11}} = \frac{-19 - 6x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 5x_4^{(k)}}{-16}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)}}{a_{22}} = \frac{1 - 3x_1^{(k)} + 5x_3^{(k)} - x_4^{(k)}}{10}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{34}x_4^{(k)}}{a_{33}} = \frac{12 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 2x_4^{(k)}}{18}$$

$$x_4^{(k+1)} = \frac{b_4 - (a_{41}x_1^{(k)} + a_{42}x_2^{(k)} + a_{43}x_3^{(k)}}{a_{44}} = \frac{1 - x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{-14}$$

Or $x^{(0)}$ est choisi arbitrairement. Donc $x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Le vecteur x à la première itération est :

$$x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 19/16 \\ 1/10 \\ 2/3 \\ -1/14 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur x à la deuxième itération est :

$$x^{(2)} = \begin{Bmatrix} 3911/3360 \\ 283/3360 \\ 2351/2520 \\ 59/480 \end{Bmatrix}$$

Etc, après 20 itérations la solution est :

$$x = \begin{Bmatrix} 1.10002277 \\ 0.19507752 \\ 0.88238216 \\ 0.16106729 \end{Bmatrix}$$

I.3 La méthode de Gauss-Seidel (1846)

Dans la méthode de Gauss-Seidel la matrice $[A]$ est également divisée en deux matrices $[M]$ et $[N]$.

$[M]$ est la partie triangulaire inferieure, diagonale comprise, de $[A]$. Il faut que $[M]$ soit inversible. Si nécessaire effectuer des permutations de lignes.

On considère l'itération $\begin{cases} x^{(0)} \quad quelconque \\ \{x\}^{(k+1)} = -\,[\,M\,]^{-1}[N]\{x\}^{(k)} + [\,M\,]^{-1}\{b\} \end{cases}$

Cette égalité matricielle est équivalente à $[M]\{x\}^{(k+1)} + [\,N\,]\,\{\,x\,\}^{(k)} = \{\,b\,\}$

L'équation i de ce système s'écrit alors :

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} = b_i$$

D'où

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

I.4 La méthode de relaxation

L'idée de la méthode de relaxation (SOR = Successive Over Relaxation) est d'utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour calculer un itéré intermédiaire $\tilde{x}^{(k+1)}$ qu'on « relaxe » ensuite pour améliorer la vitesse de convergence de la méthode. On se donne $0 < \omega < 2$, et on modifie l'algorithme de Gauss–Seidel de la manière suivante :

$x^{(0)} \quad quelconque$

$$a_{ii}\tilde{x}_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}, i = 1, \dots, n$$

(Pour $\omega = 1$ on retrouve la méthode de Gauss–Seidel.)

I.5 Critères d'arrêt.

Afin d'éviter que les calculs s'éternisent, il est nécessaire de prévoir un critère d'arrêt. On peut citer les critères les plus fréquemment utilisés :

Critère de convergence absolue

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon$$

Critère de convergence relative

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon\left|x^{(k)}\right|$$

Critère du nombre maximal d'itérations

$$k = N$$

Où N est le nombre maximal d'itérations.