



Chapitre 1 :

Introduction à la méthode des éléments finis (MEF)

I. Introduction

- Les logiciels de simulation par éléments finis sont de plus en plus utilisés dans l'enseignement des Sciences de l'Ingénieur.
- Cependant, ils font appel à des théories et des méthodes relativement sophistiquées, qui rendent l'interprétation de leurs résultats difficile.



Il faut connaître les différents concepts pour comprendre les simulations par éléments finis et pouvoir interpréter les résultats.

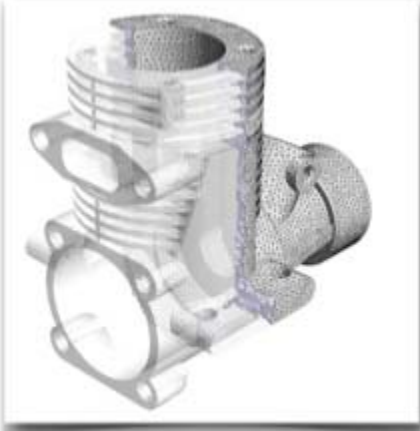
II. Méthode des éléments finis

II.1 Définition

C'est un outil de simulation numérique le plus utilisé et le plus efficace, utilisé par les Ingénieurs de tout secteur.

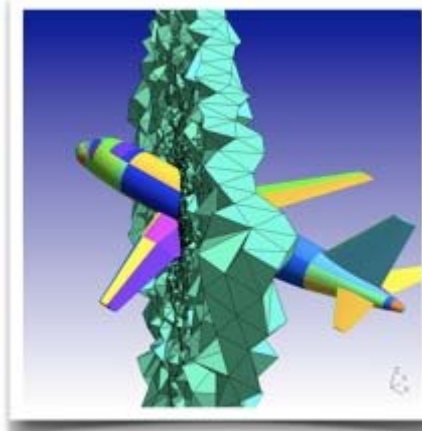
Elle s'applique aux problèmes de mécanique des milieux continus (MMC).

La vaste utilisation de la MEF dans tous les domaines est due à la similarité des différents problèmes de l'Ingénieur (équations différentielles, système d'équations d'équilibre...etc).



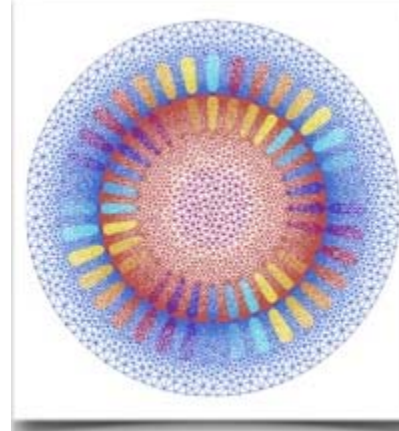
(a)

le carter d'un moteur (3D)



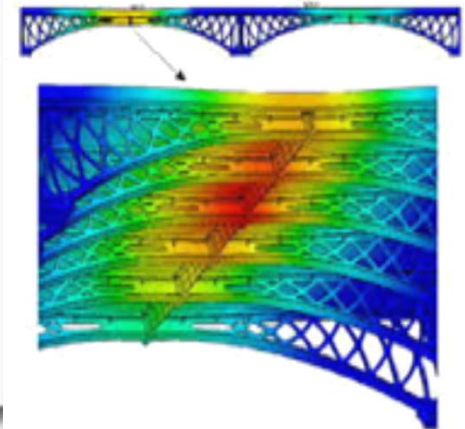
(b)

une partie du volume d'air entourant un avion (simulation d'acoustique 3D)



(c)

un modèle plan d'un moteur électrique (électromagnétisme 2D)

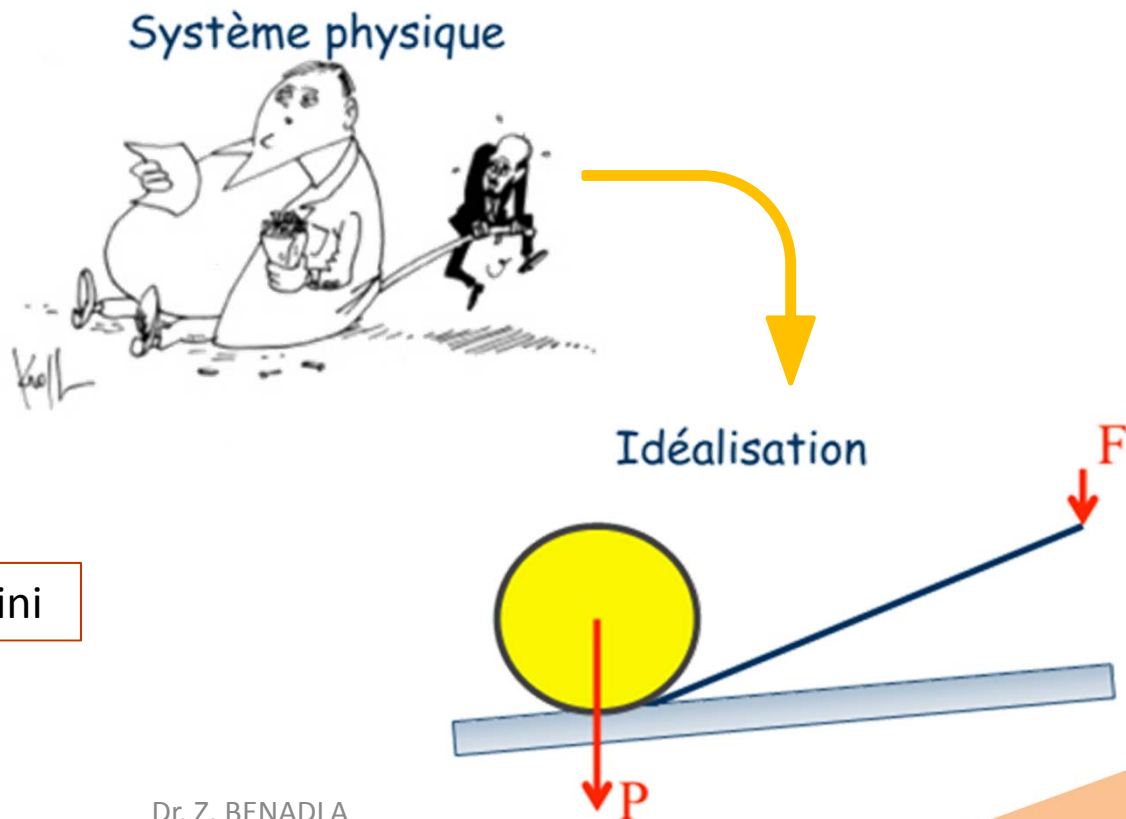
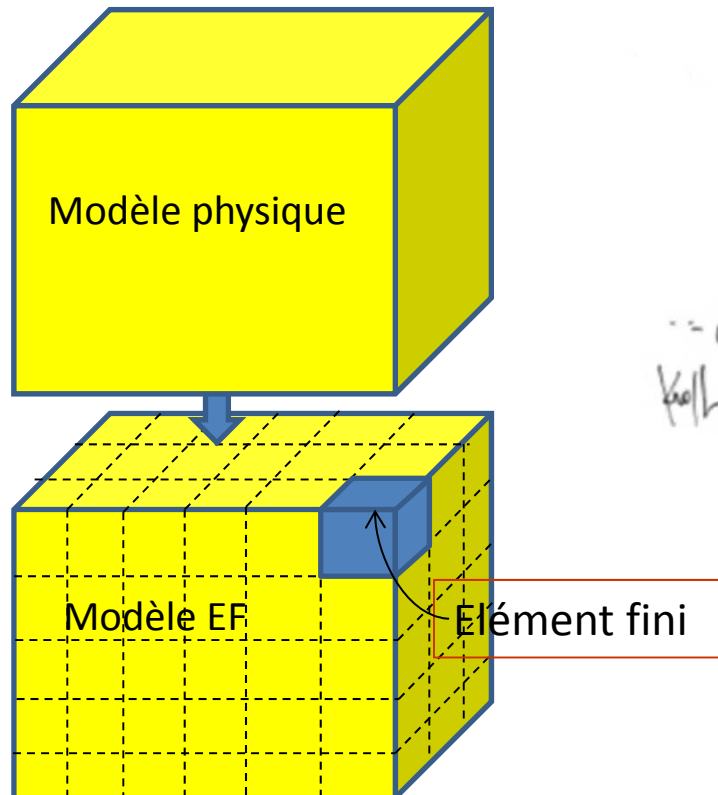


un modèle de pont (Génie Civil 3D)

II. Méthode des éléments finis...

II.2 Principe

La base conceptuelle de la MEF est de trouver la solution d'un problème complexe en le remplaçant par plusieurs d'autres plus simples.
Transformer un problème physique en un modèle numérique en le discrétisant en des éléments dits *finis*



II. Méthode des éléments finis...

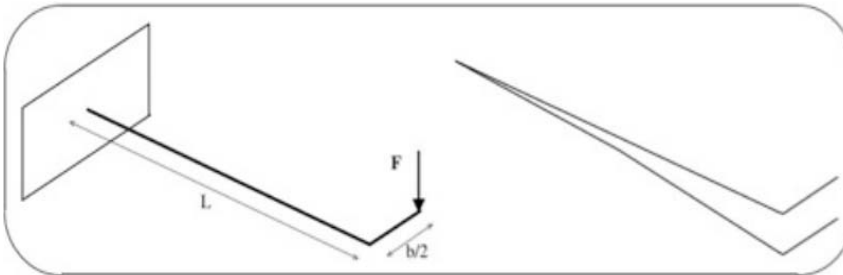
II.2 Principe

- ❑ Le modèle des éléments finis, qui a un nombre *fini* de variables (inconnues), n'est qu'une approximation du système physique continu, qui lui possède un nombre *infini* de variables.
- ❑ Chaque élément répond à des équations exactes qui décrivent sa réponse physique à un chargement donné.
- ❑ Les réponses de tous les éléments de la représentation donne la réponse totale du modèle.
- ❑ Les éléments ont un nombre fini de variables d'où le nom éléments finis.

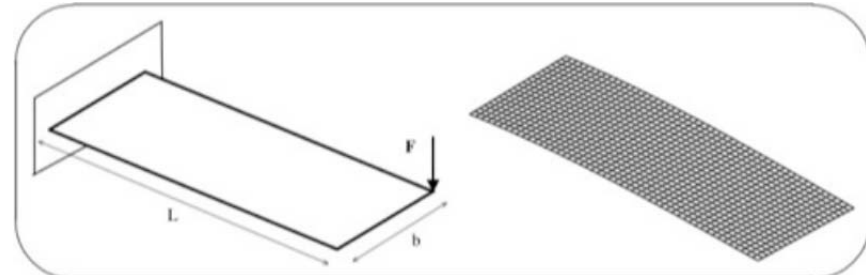
II. Méthode des éléments finis...

II.2 Principe...

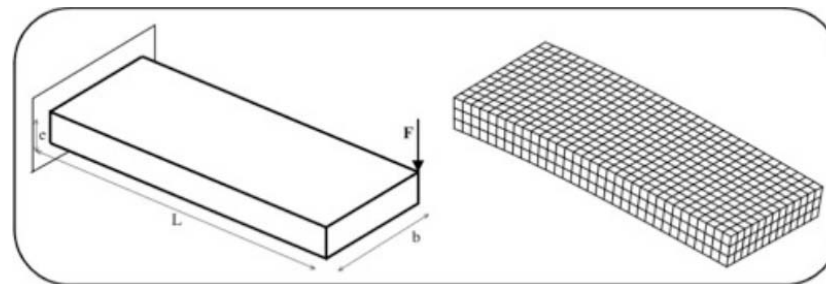
La modélisation peut être tri bi ou unidimensionnelle, selon le problème à traiter.



Théorie des poutres (RDM)



Théorie des plaques



Théorie MMC

II. Méthode des éléments finis...

II.3 La discrétisation

la simulation par éléments finis repose sur une théorie :

- Un ensemble de lois,
- Des hypothèses,
- Des théorèmes... Etc.



la théorie retenue est issue de la **mécanique des milieux continus** par une transformation nommée **discrétisation**.

Toutes les théories de la MMC peuvent être discrétisées, 3D, 2D (contraintes planes, déformations planes, axisymétrie...) ou théories des poutres, plaques ou coques.

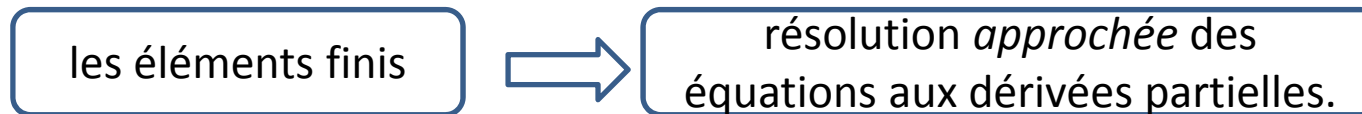
La discrétisation de la MMC repose sur deux modifications :

- Une **hypothèse cinématique supplémentaire** sur l'allure du champ de déplacement, qui est recherché sous la forme d'une combinaison linéaire (inconnue) de **fonctions de forme** connues, définies plus tard ;
- Une **transformation des équations d'équilibre** du milieu continu, destinée à les rendre mathématiquement compatibles avec l'hypothèse supplémentaire introduite.

II. Méthode des éléments finis...

II.3 La discrétisation...

les lois utilisées au cours d'une simulation par éléments finis **ne sont pas exactement** les lois de la MMC : il s'agit **de lois discrétisées**, donc différentes, qui conduisent ainsi à des solutions différentes.



La discrétisation et les fonctions de forme ont une influence considérable sur la modélisation, qui s'effectue dans le cadre théorique, et sur le résultat, qui ne sera pertinent que si :

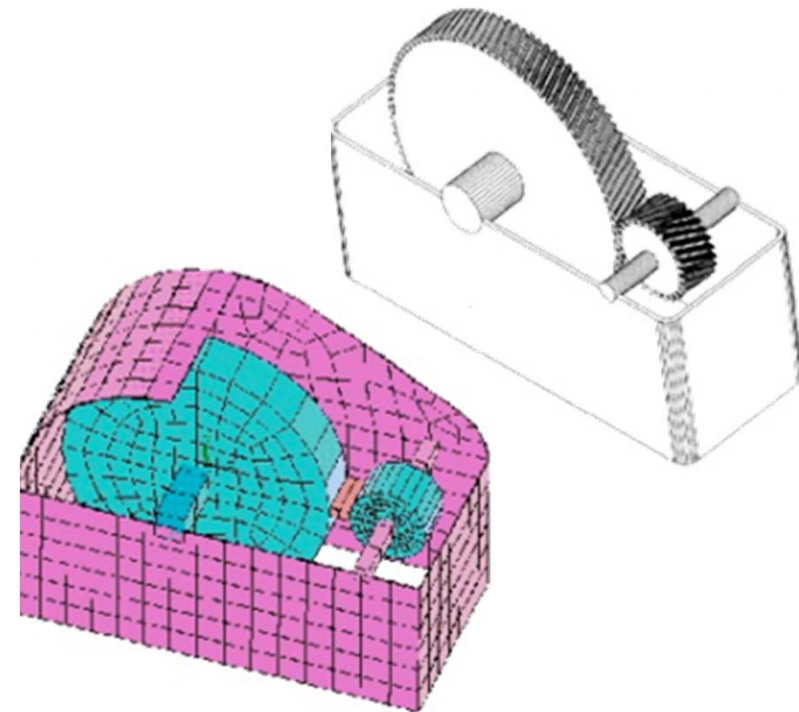
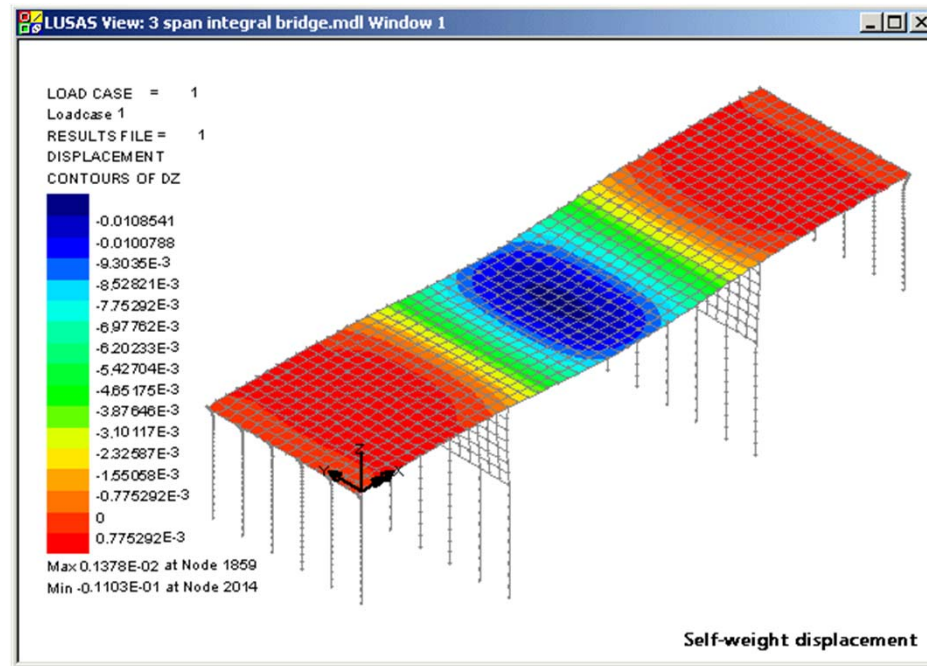


II. Méthode des éléments finis...

II.4 Le Maillage

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un **maillage**, dont la définition s'appuie sur deux objets géométriques.

1. Un découpage du domaine géométrique occupé par le produit en sous-domaines de formes simples (3D, 2D ou 1D (lignes)), selon la théorie dans laquelle on se place



II. Méthode des éléments finis...

II.4 Le Maillage...

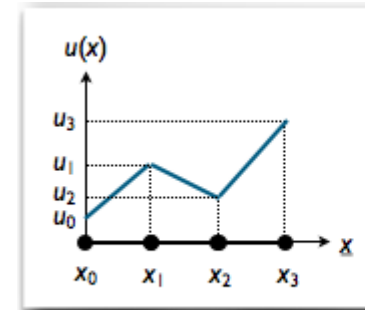
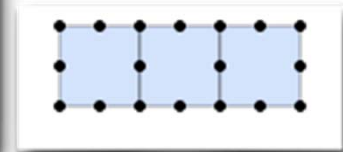
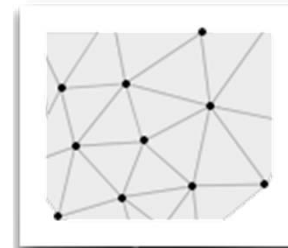
- Objet est une liste de points particuliers, situés aux sommets des sous-domaines ainsi que, quelquefois, aux milieux de leurs arêtes : les **nœuds**

Les sous-domaines et les nœuds servent à définir les fonctions de base utilisées pour représenter le champ de déplacement.

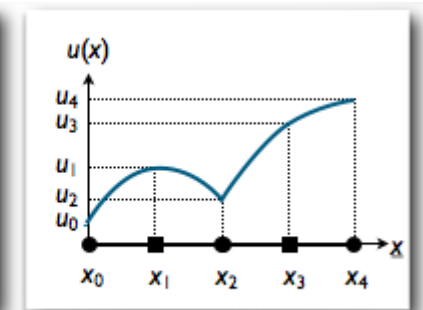
Ces fonctions sont définies par **morceaux**, dans chaque sous-domaine, et chacune d'entre elles est associée à un nœud.

Elles sont construites de sorte à réaliser une *interpolation du champ de déplacement* à partir de valeurs discrètes définies aux nœuds; cette interpolation est souvent affine ou quadratique par morceaux .

l'interpolation dépend des sous-domaines, qui sont choisis par l'utilisateur ; la construction des fonctions réalisant cette interpolation est, quant à elle, réalisée automatiquement par le logiciel.



(a)



(b)

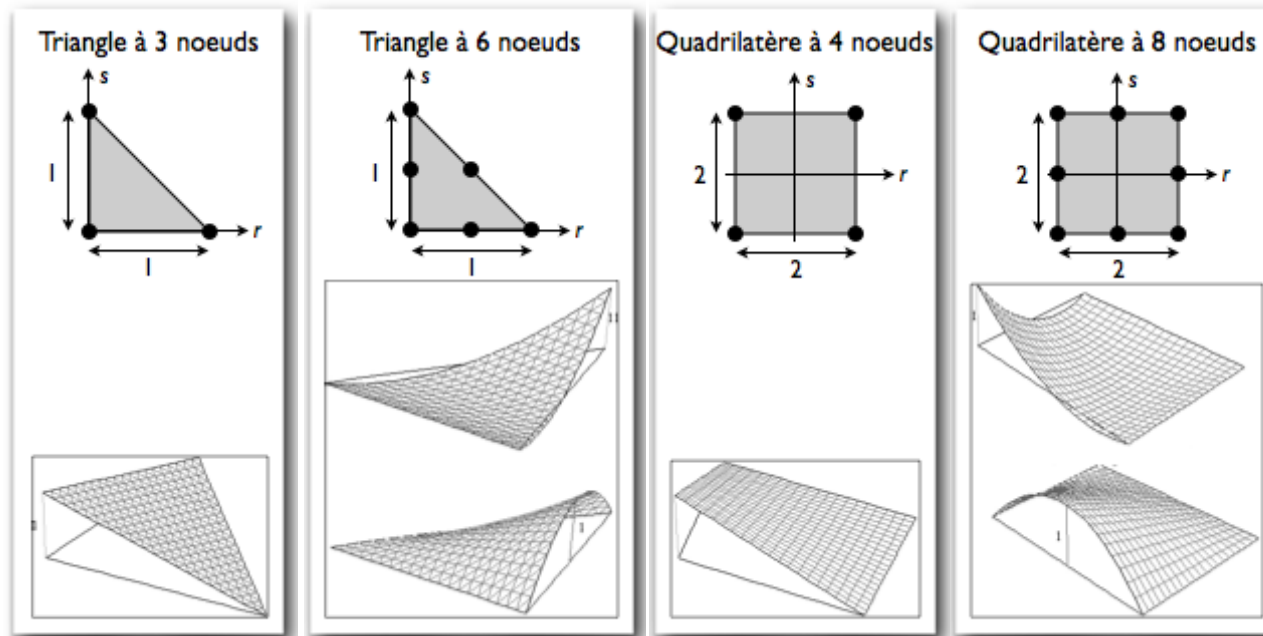
II. Méthode des éléments finis...

II.4 Le Maillage...

Un sous-domaine muni de ses nœuds et de leurs fonctions de base s'appelle un **élément fini**.

les éléments sont les "briques" à l'aide desquelles on modélise la structure.

En pratique, les logiciels de simulation possèdent des bibliothèques d'éléments dans lesquelles l'utilisateur peut piocher, qui se distinguent par leurs topologies et le nombre de leurs nœuds.



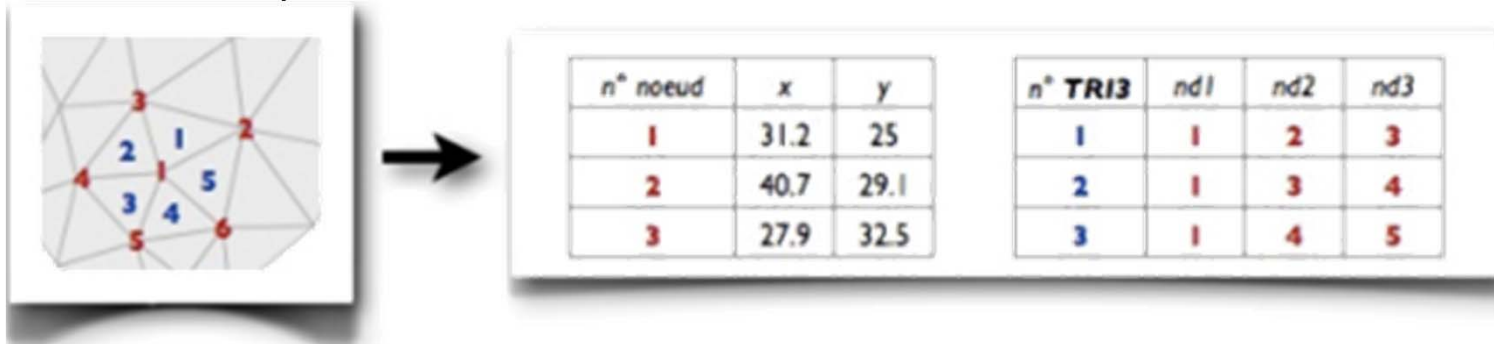
Quelques types d'éléments bidimensionnels courants

II. Méthode des éléments finis...

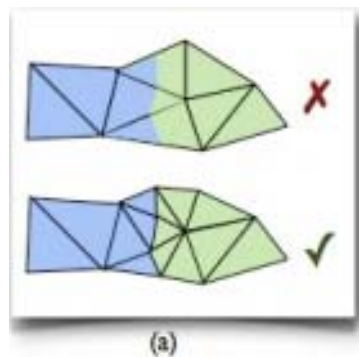
II.5 Définition des nœuds et des éléments

Un **nœud** est un point numéroté, défini par ses coordonnées dans un repère choisi (cartésien, cylindrique ou sphérique).

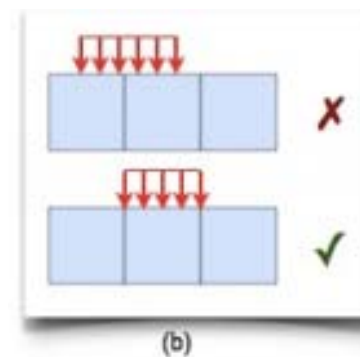
Un **élément** est défini par ses connectivités.



A chaque changement physique ou mécanique de la structure un nœud doit être positionné.



Changement physique

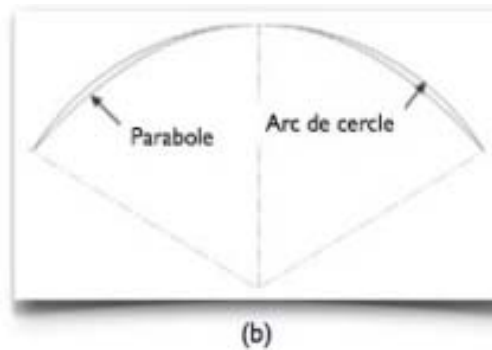
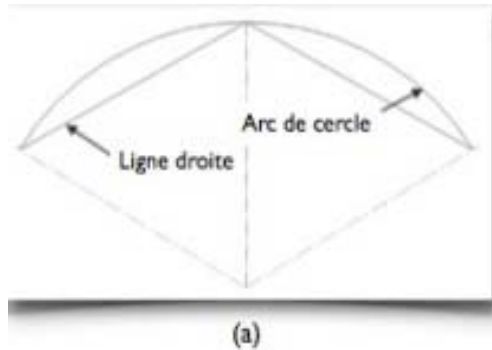


Changement mécanique

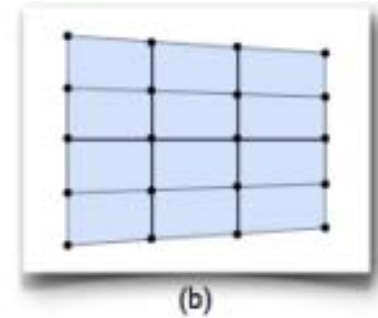
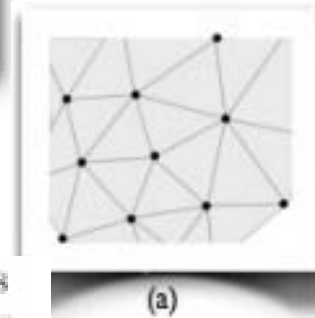
II. Méthode des éléments finis...

II.5 Définition des nœuds et des éléments...

Choix de l'élément est déterminant pour la qualité des résultats.



Sa forme

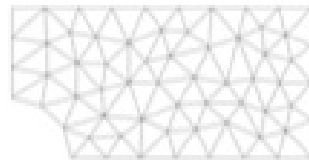


Son nombre

22 elts - 18 nds



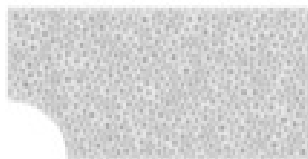
102 elts - 65 nds



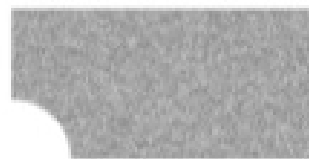
399 elts - 228 nds



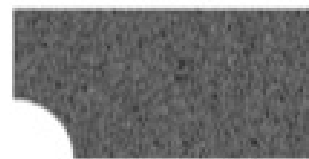
1547 elts - 831 nds



6192 elts - 3212 nds



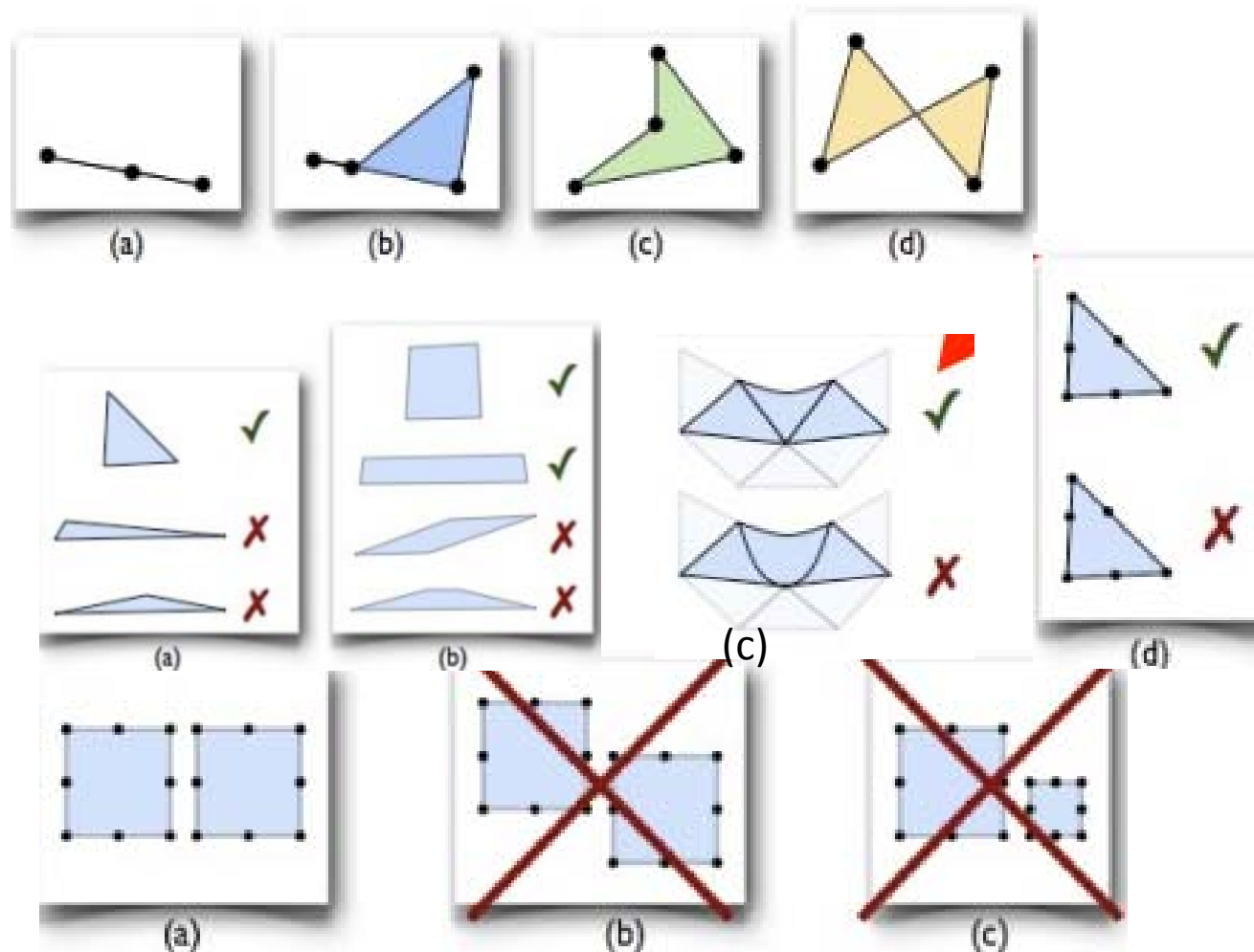
24829 elts - 12647 nds



II. Méthode des éléments finis...

II.5 Définition des nœuds et des éléments...

Il faut respecter quelques directives pour bien choisir les éléments

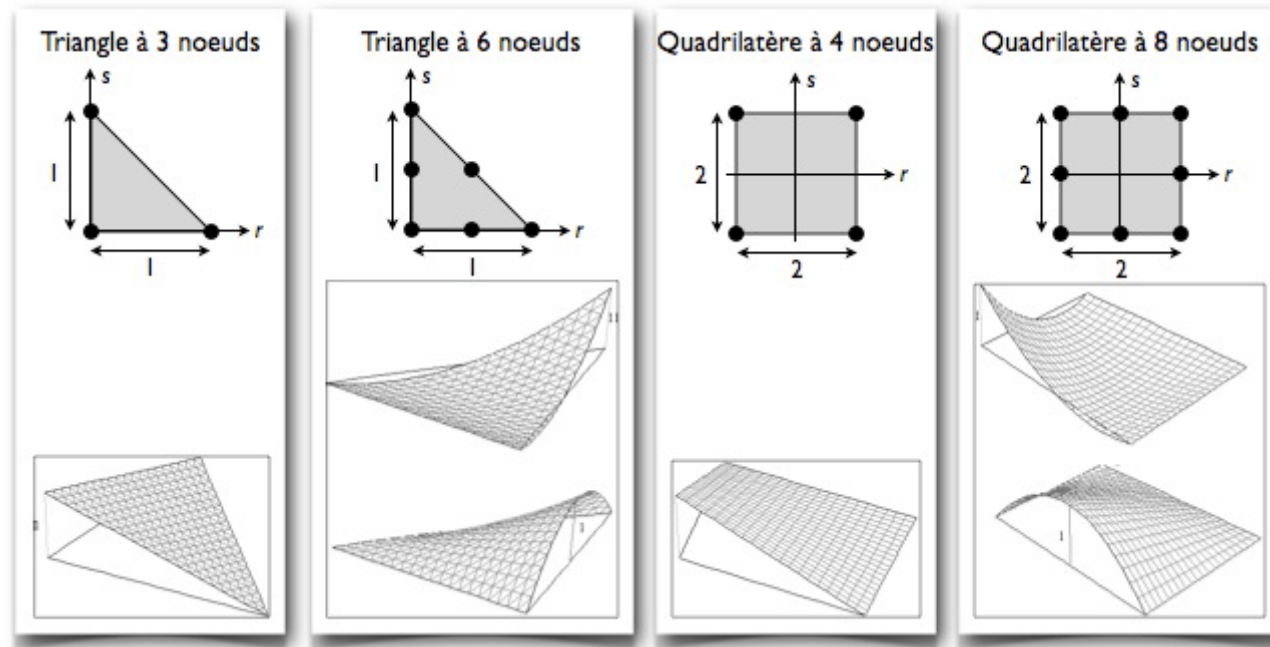


III. Fonctions de forme

III.1 Définition

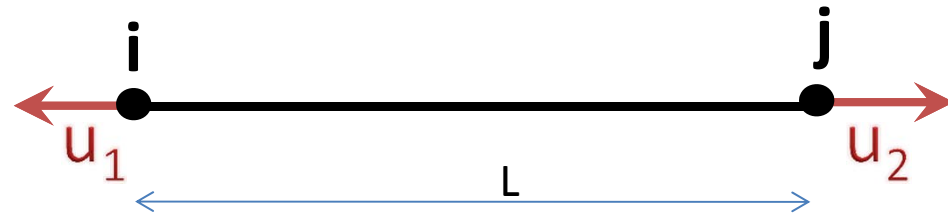
But: Exprimer les déplacements en un point quelconque de l'élément via les déplacements connus en ses nœuds. Mais aussi pour modéliser la géométrie.

Elles peuvent changer d'un élément à un autre



III. Fonctions de forme...

III.2 Barre soumise à la traction



La variation est linéaire entre les deux nœuds : $u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow u(x) = u_1 \\ x = L \rightarrow u(x) = u_2 \end{array} \right. \Rightarrow u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^2 N_k(x) u_k = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

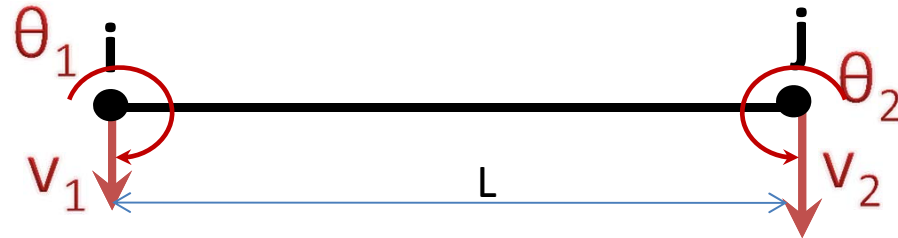
Et

$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$

Fonctions de forme

III. Fonctions de forme...

III.2 Barre soumise à la flexion



La variation n'est pas linéaire entre les deux nœuds, elle est de la forme :

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

$$\theta(x) = du(x)/dx = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow v(x) = v_1 \text{ et } \theta(x) = \theta_1 \\ x = L \rightarrow v(x) = v_2 \text{ et } \theta(x) = \theta_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = \theta_1 \\ \alpha_3 = -\frac{(2\theta_1 + \theta_2)}{L} - \frac{3(v_1 - v_2)}{L^2} \\ \alpha_4 = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{L^2} + \frac{2(v_1 - v_2)}{L^3} \end{array} \right.$$

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 N_k(\mathbf{x}) v_k = N_1(\mathbf{x}) v_1 + N_2(\mathbf{x}) \theta_1 + N_3(\mathbf{x}) v_2 + N_4(\mathbf{x}) \theta_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x) = \frac{(2x^3 - 3Lx^2 + L^3)}{L^3} \\ N_2(x) = \frac{(x^3 - 2Lx^2 + L^2x)}{L^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N_3(x) = -\frac{(2x^3 - 3Lx^2)}{L^3} \\ N_4(x) = \frac{(x^3 - Lx^2)}{L^2} \end{array} \right.$$

IV. Avantages et inconvénients de la MEF

Avantages :

- Simples,
- Adaptées au calcul

Inconvénients :

- Approchées

C'est la méthode numérique de référence mais pas l'unique!

V. Analyse par éléments finis

A quoi sert l'analyse par EF?

- ❑ Réduire le nombre d'essais sur les prototypes
 - ❑ La simulation par ordinateur permet de tester rapidement et efficacement de multiples scénarii de type "Et si...?".
- ❑ Simuler des modèles qui ne conviennent pas à des tests sur prototypes.
 - ❑ Exemple : Implants chirurgicaux, tel qu'un genou artificiel

Avantages

- ❑ Gains de coûts
- ❑ Gains de temps... réduire le temps préalable à la mise sur le marché !
- ❑ Création de modèles plus sûrs et de meilleure qualité

VI. Algorithme de la MEF

