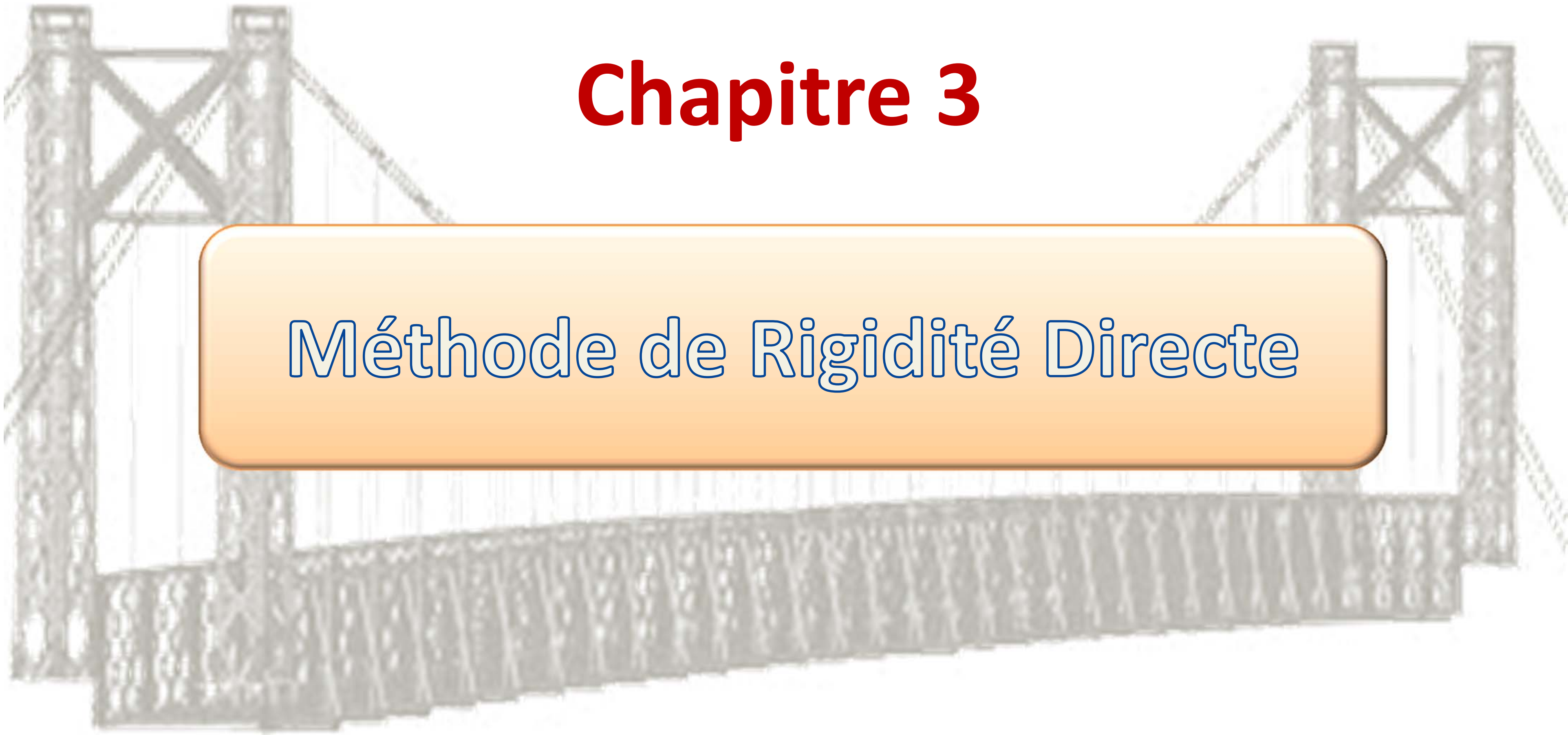
Université d'Abou bekr Belkaid
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Master 1 Voies et Ouvrages d'Art, Semestre 2
Cours de Méthode des éléments finis
2019-2020



# Chapitre 3

# Méthode de Rigidité Directe

Chargée de la matière : Dr. Z.BENADLA
contact : zbenadla@gmail.com

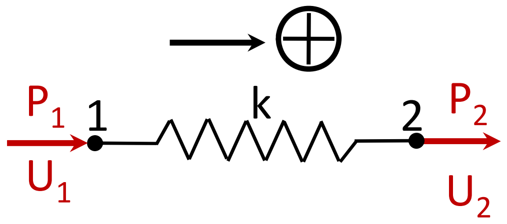
# Plan

1. Système à un ressort linéaire
2. Système à plusieurs ressorts linéaires
    1. Matrice de rigidité de 2 ressorts
    2. Assemblage
    3. Conditions aux limites
    4. Réactions d'appuis
    5. Les efforts dans les ressorts
3. Notion de degrés de liberté
4. Exemple d'application
5. Exercices

# 1/ Système à un ressort linéaire

## 1.1/ Matrice de rigidité d'un ressort

On considère le ressort linéaire de raideur « k » de la figure ci dessous




Le déplacement $U_1$ et $U_2$ des 2 extrémités du ressort correspond à l'application des forces axiales $P_1$ et $P_2$.

Si le ressort est en équilibre statique, la somme des forces est nulle:

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = 0 \Rightarrow P_1 = -P_2$$

Le déplacement du ressort soumis à ces forces est égale à ($U_2$ - $U_1$), et est proportionnel à la force appliquée:

$$P_1 = k(U_1 - U_2) \qquad P_2 = k(U_2 - U_1)$$

Vecteur force élémentaire.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

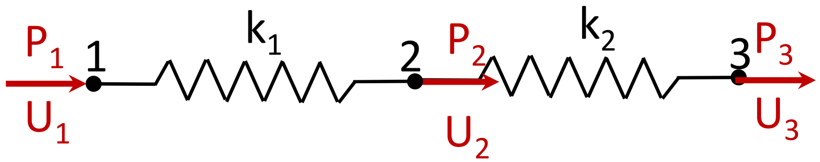
Matrice de rigidité élémentaire

# 2/Système à plusieurs ressorts linéaires

## 2.1/ Matrice de rigidité de 2 ressorts

$\longrightarrow \oplus$

Considérons maintenant le système de 2 ressorts :




L'équilibre statique au nœud 1 impose que la force appliquée $P_1$ soit égale à la force de tension du ressort 1

$$P_1 = k_1(U_1 - U_2)$$

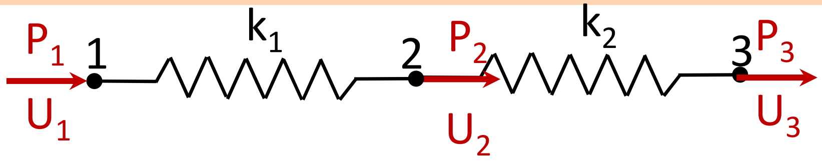
De même pour le nœud 2, la force extérieure est égale à la somme des forces de tension des ressorts 1 et 2 :

$$P_2 = k_1(U_2 - U_1) + k_2(U_2 - U_3)$$

Pour le nœud 3, on obtient :

$$P_3 = k_3(U_3 - U_2)$$

# 2/Système à plusieurs ressorts linéaires…




$P_1=k_1(U_1-U_2)$ $\qquad$ $P_2=k_1(U_2-U_1)+k_2(U_2-U_3)$ $\qquad$ $P_3=k_3(U_3-U_2)$

## 2.2/ Assemblage

Ces 3 équations forment un système linéaire de (3 x 3) de la forme :

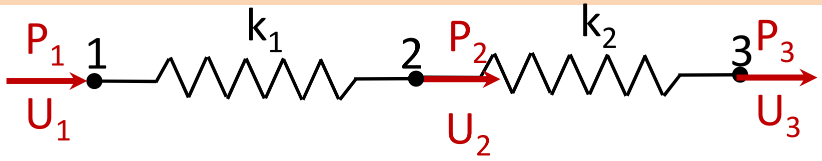
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Ceci est appelé **assemblage** et la matrice obtenue est **la matrice de rigidité de tout le système** (formé dans ce cas de 02 éléments ressorts) ;

Elle est obtenue par assemblage des matrices élémentaires de chaque ressort.

# 2/Système à plusieurs ressorts linéaires…

## 2.3/ Conditions aux limites




$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Ce système linéaire n'admet, pas tel quel, de solutions uniques, puisque la solution est définie à une translation arbitraire suivant l'axe « Ox »

Pour rendre la solution unique, il faut imposer au moins une condition aux limites sur le déplacement en 1 ou en 3.
Par exemple si le système est fixé en 1, le déplacement est nul, et le système admet une solution unique. Il s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \{P\}=[K]^{-1}\{U\}$$

Le système d’équations obtenu peut être déterminé en utilisant une méthode de résolution des systèmes linéaires soit directes (Gauss, LU, …) ou indirectes (Gauss-Seidel; Jacobi…)

# 2/Système à plusieurs ressorts linéaires…

## 2.4/ Réactions d'appuis

La force de réaction en 1 est évidement obtenue après résolution par la relation :

$$R_1 = k_1(0 - U_2)$$

## 2.5/ Les efforts dans les ressorts

L'effort dans chaque ressort est exprimé ainsi : $F = \mathrm{k}\left(U_j - U_j\right)$

Avec $U_i$ représente le déplacement au nœud origine « i »;
$U_j$ représente le déplacement au nœud extrémité « j ».

L'effort dans le ressort 1-2 :

$$F_1 = -R_1 = k_1(U_2 - 0)$$

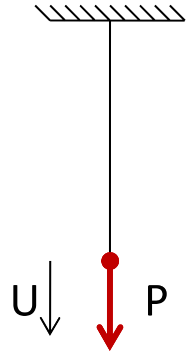
L'effort dans le ressort 2-3 :

$$F_2 = k_2(U_3 - U_2)$$

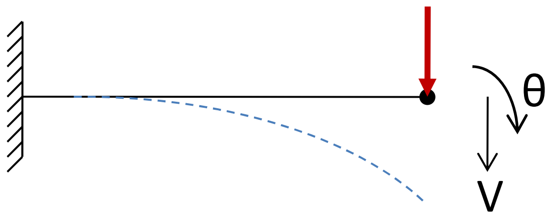
# 3/Notion de degré de liberté

Notation : DDL (DOF en anglais) « Degrees Of Freedom »

- La possibilité d'une structure de se déplacer.



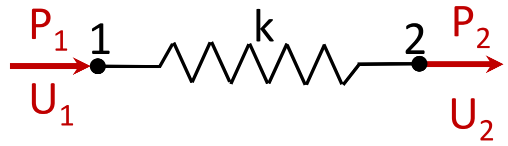

Système à 1 DDL




Système à 2 DDL

- Le nombre de degrés de liberté, (NDDL) est défini par le nombre total des possibilités des déplacements des nœuds.

# 3/Notion de degré de liberté…




Système à 1 DDL

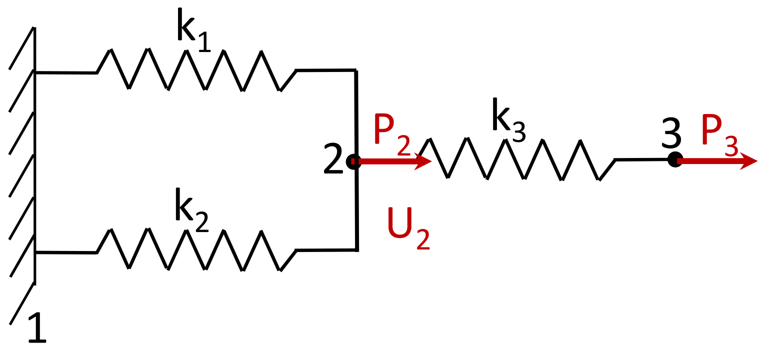
- Dans le cas des ressorts, nous avons un seul DDL; il s'agit du déplacement axial « U »
- La taille de la matrice de rigidité en dépend; elle est donnée par

(NDDL x Nombre de nœuds)

# 4/Exemple d'application

$k_1$= 100 KN/ml
$k_2$ = 150 KN/ml
$k_3$ = 200 KN/ml

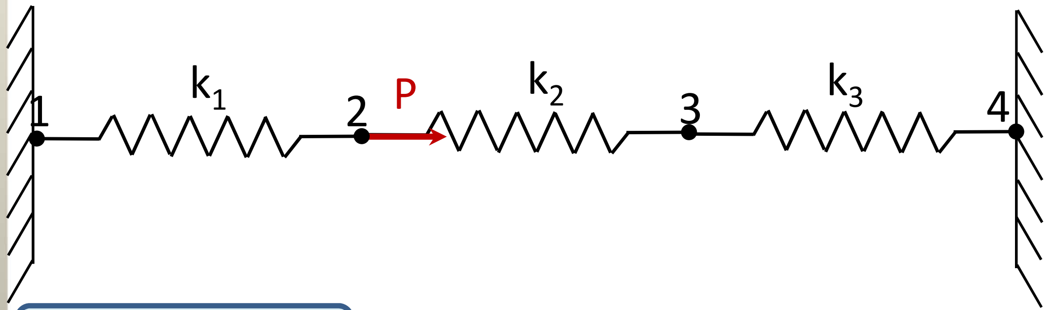
$P_2$= 2 KN
$P_3$ = 1 KN




1. Ecrire les matrices de rigidité élémentaires;
2. Faire l'assemblage;
3. Calculer les déplacements aux nœuds,
4. Calculer les efforts dans les ressorts.

# 5/Exercices

## 5.1/ Exercice 1




**Données :**

$k_1$= 200 KN/ml

$k_2$= 150 KN/ml

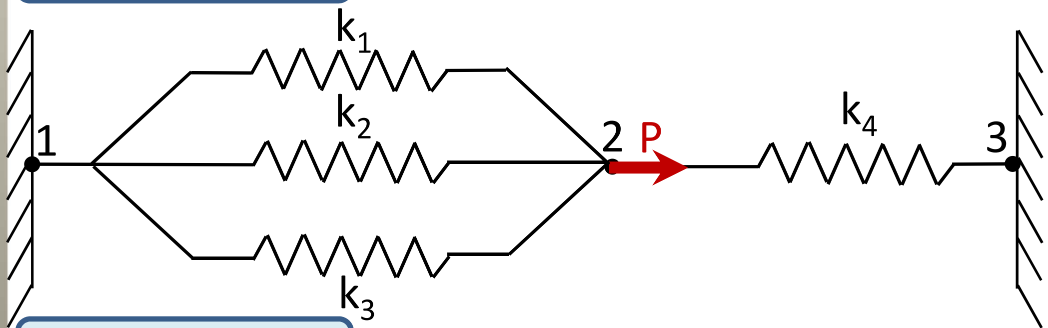
$k_3$=200 KN/ml

P= 20 KN

**Calculer :**

- Les déplacements du système
- Les efforts dans les ressorts

## 5.2/ Exercice 2




**Données :**

$k_1$= 200 KN/ml

$k_2$= 100 KN/ml

$k_3$=150 KN/ml

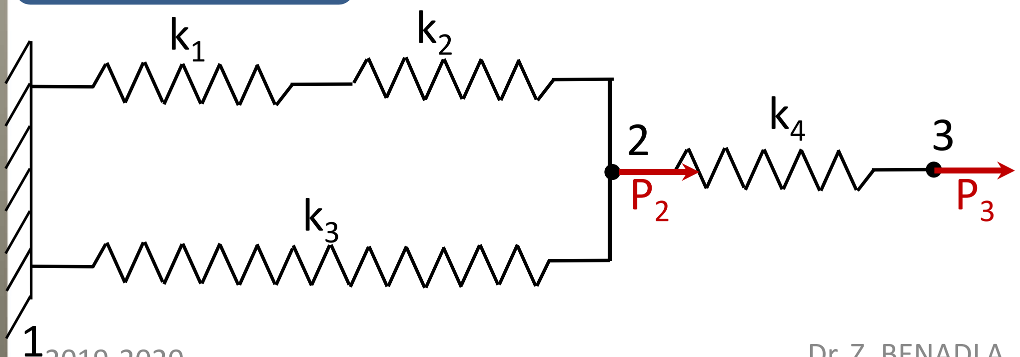
$k_4$= 200 KN/ml

P= 10 KN

**Calculer :**

- Le déplacement au nœud 2.
- Les réactions d'appuis.

## 5.3/ Exercice 3




**Données :**

$k_1$= 200 KN/ml

$k_2$= 100 KN/ml

$k_3$=100 KN/ml

$k_4$= 200 KN/ml

$P_2$= 2 KN

$P_3$= 1 KN

**Calculer :**

- Les déplacements du système