Chapitre 3

Intégration complexe

On s'intéresse au problème des primitives de fonctions holomorphes.

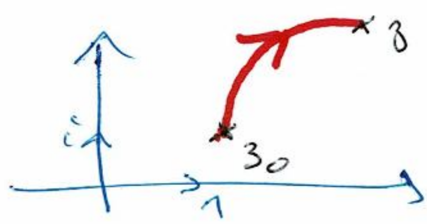
si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (variable réelle)

et disant continues, pour trouver une primitive de f on fixe x_0 et on définit

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

on essaye de faire la même chose pour les fcts complexes, on fixe $z_0 \in U$, on choisit γ un chemin passant z_0 à z et on calcule

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$



⚠ Tout irait bien si cette intégrale ne dépend pas du chemin γ (le choix de γ).

Déf (paramétrisation)

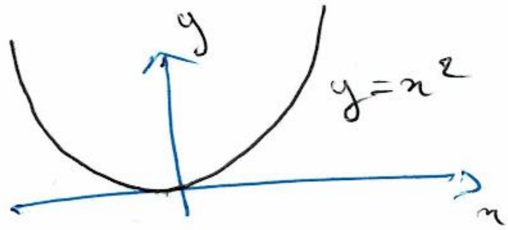
Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux fcts réelles de t alors l'ensemble de points S vérifiant

$$z(t) = x(t) + i\, y(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

st appelé une paramétrisation de S

Exp : $z(t) = t^3 + i\, t^6 \longrightarrow y = t^6 = (t^3)^2 = x^2$

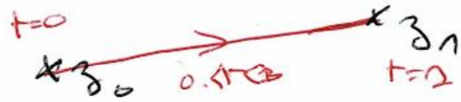
$\hookrightarrow S = \{ (x,y) ,\ y = x^2 \}$



Un segment : (قطعة مستقيمة)

un segment de droite d'extrémités z_0 et z_1 st paramétrisé par

$$z(t) = z_0(1-t) + t z_1 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$



$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

Un cercle : un cercle de centre z_0 et de rayon r st paramétrisé par

$$z(t) = z_0 + r e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z - z_0 = r e^{it}$$

$$\Rightarrow |z - z_0| = |r e^{it}| = r \Rightarrow z \in C(z_0, r)$$

Déf : (Arc chemin) Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, on appelle arc dans $\mathbb{C}$ une application continue

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$
$$t \longmapsto \gamma(t)$$

$\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés origine et extrémité de l'arc γ.

La réunion d'arcs est encore une application continue dite chemin

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$$

⚠ on décrit les points de l'arc au moyen de l'équation

$$z(t) = x(t) + i\, y(t), \qquad a \leq t \leq b$$

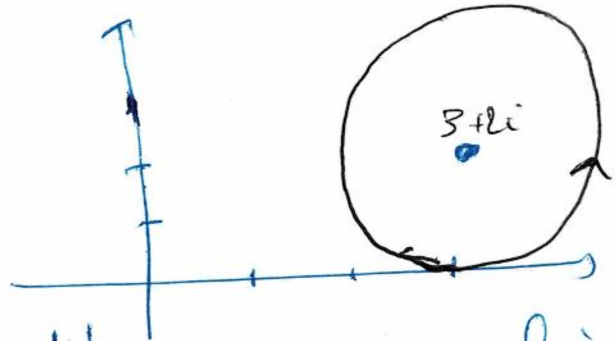
Exp : Les segments orientés sont des arcs

$$\gamma(t) = z_0(1-t) + z_1 t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

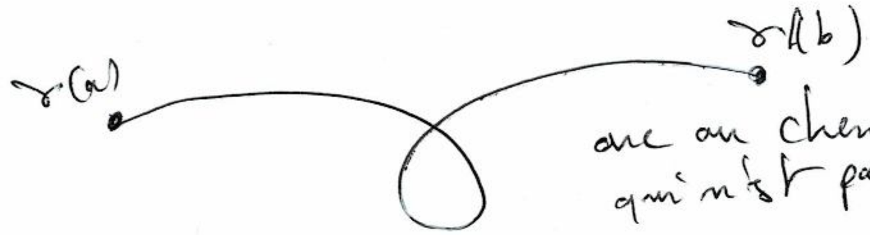
Déf (Lacet) : Un arc est dit fermé (contour, Lacet) si l'origine coïncide avec l'extrémité

Exp : Le cercle de centre $3+2i$ et de rayon 2 est un arc fermé

$\gamma(t) = 3+2i + 2e^{it}$



Déf : Un arc est dit simple s'il ne coupe pas lui même



arc ou chemin qui n'est pas simple

Déf : (Longueur d'un chemin)

Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$ avec $a \leq t \leq b$ une paramétrisation qui décrit l'arc γ.

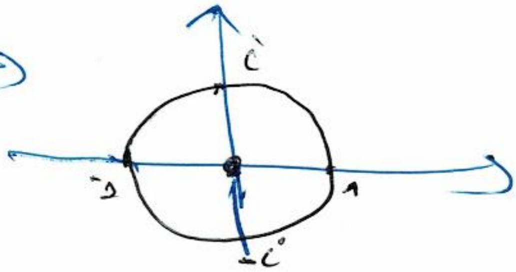
Si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe et est continue sur $[a,b]$ alors la longueur de γ est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

avec $|z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

⚠ La longueur ne dépend pas de la paramétrisation.

Exp : $z(t) = e^{it}$ $\longrightarrow$
$0 \leq t \leq 2\pi$



on a

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'(t) = -r\sin t \\ y'(t) = r\cos t \end{cases}$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}}\, dt = 2\pi r.$$

Déf : Soit $f(t) = u(t) + i\,v(t)$, $a \leq t \leq b$ avec $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions réelles continues. On définit l'intégrale de f de a à b par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

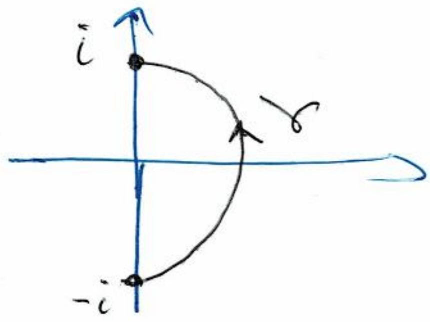
Déf. Soit D un domaine de $\mathbb{C}$

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ un chemin. Si $\gamma'(t)$ existe et continue sur $[a,b]$, on définit l'intégrale curviligne de f sur le chemin γ par

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Exp :

① $\int_\gamma \bar{z}\, dt$



on a

$\gamma(t) = e^{it}$ avec $\frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

de plus $\gamma'(t) = i e^{it}$

donc $\int_\gamma \bar{z}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overline{e^{it}}\, i e^{it}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it}\, i e^{it}\, dt = i\pi$

② $\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i e^{it}\, dt = 2\pi i$.

Propriétés

1) si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

2) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = - \int_\gamma f(z)dz$ où γ^- est le chemin opposé (inverse de γ)

si $\gamma(t)$ est un chemin avec $a \leq t \leq b$, alors $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ et on $\gamma^-(a) = \gamma(b)$
$\gamma^-(b) = \gamma(a)$

3) $\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M\, L(\gamma)$ où $M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$

Déf : Soit D un domaine de $\mathbb{C}$

si $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et

$$F'(z) = f(z)$$

alors F est dite primitive de f et on note

$$F(z) = \int f(z)\,dz .$$

Prop : Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Si f admet une primitive dans D, alors pour tout chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particulier, si γ est fermé alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Exp : ① $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ avec γ le cercle de centre z_0 et de rayon r

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = 2\pi i \neq 0$$

on peut conclure que $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C} / \{z_0\}$.

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, $n \neq 1$ toujours le même chemin

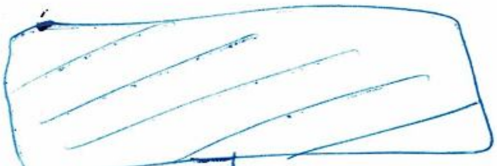
$$= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^n}\,dt = ie^{-n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}\,dt = 0$$

Intégration des fonctions analytiques

Déf : Soit D un domaine de $\mathbb{C}$. Le bord δD du ~~Chemin~~ domaine se répartira comme suit :

- Une courbe extérieure
- $k-1$ courbes intérieures $(k \geq 1)$

- Lorsque $k=1$, on dit que le domaine est simplement connexe
- Lorsque $k>1$, on dit que le domaine est multiplement connexe.



simplement connexe

multiplement connexe.

⚠ Un domaine simplement connexe ne comporte aucun trou.

Exp : $C(0,r) \longrightarrow$ simplement connexe

$C(r_1,r_2) = \{ z \mid r_1 < |z| < r_2 \}$
n'est pas simplement connexe

couronne

Théorème de Cauchy :

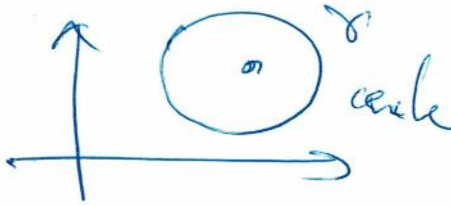
introduction : Nous avons vu que l'intégrale $\int f(z)dz$ dépend en général de γ. Existe-t-il une classe de fonctions dont l'intégrale suivant un chemin ne dépend que des extrémités ?

Théorème (de Cauchy)

Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 ,$$

où γ est un chemin fermé (Lacet) quelconque inclus dans D.

Exp $\int_\gamma e^z\,dz$ avec 

$= 0$ car e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration du Théorème de Cauchy :

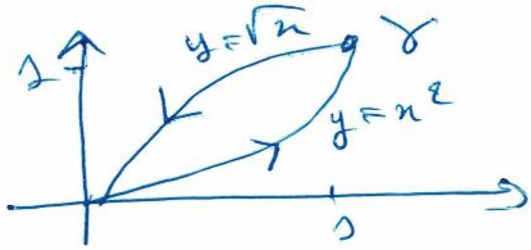
Nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème de Green : soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ borné par un chemin simple et fermé γ orienté positivement. Soient P et Q deux fcts de C^1 dans D alors on a

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy .$$

Exp : Vérifier la formule de Green pour l'intégrale

$$\int_\gamma 2xy - x^2 \, dx + (x+y^2) \, dy$$



On a $P(x,y) = 2xy - x^2$

$Q(x,y) = x + y^2$

* $$\iint_D 1-2x \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1-2x \, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{30}$$

* $$I = \int_\gamma 2xy - x^2 \, dx + (x+y^2) \, dy = \int_{\gamma_1} \cdots + \int_{\gamma_2} \cdots$$

Sur γ_1 : $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x \, dx$

Sur γ_2 : $y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$

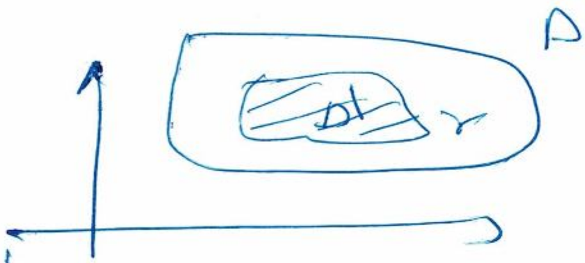
donc

$$I = \int_0^1 2x^3 - x^2 \, dx + (x+x^4) \, 2x \, dy + \int_0^1 (2x\sqrt{x} - x^2) \, dx + (x+x) \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{30}$$

Nous allons démontrer le Thm de Cauchy

Soit $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$
holomorphe dans D



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \big(u(x,y) + i\,v(x,y)\big)(dx + i\,dy)$$

$$= \int_\gamma (u(x,y))\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

Soit $D' \subset D$ de frontière γ et supposons que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ existent et sont continues dans D'

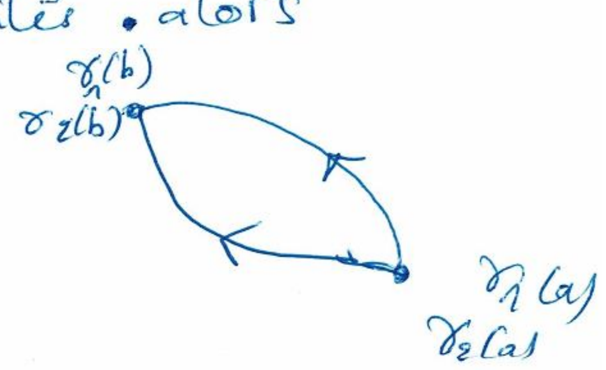
$$\underset{\text{Green}}{\xRightarrow{\text{Thm}}} \int_\gamma f(z)\,dz = \iint_{D'} \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy + i\iint_{D'} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy$$

$$= 0$$

car u et v vérifient les C.C.R.

Prop : Soit f une fct holomorphe sur un domaine simplement connexe D. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans D ayant les mêmes origines et extrémités. alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$



L'intégrale dépend des extrémités.

Démonstration

Posons $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ alors γ est un chemin fermé, donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0. \quad \text{CQFD}$$

Prop : Soit f une fct holomorphe sur un domaine simplement connexe D, alors f admet une primitive F

$(F'(z) = f(z))$

dans D et pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to D$

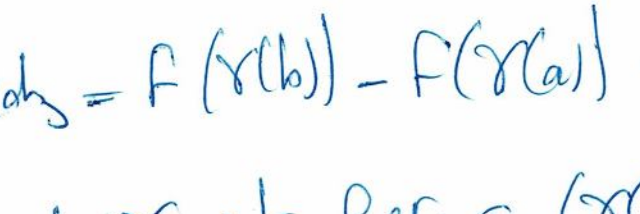
on a $$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est fermé $(\gamma(a) = \gamma(b))$ alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Théorème (Généralisation du Théorème de Cauchy)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine borné par un nombre fini de chemins $\partial D = \gamma \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i\right)$



Si f est holomorphe dans D et continue sur $D \cup \partial D$ alors

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

et on a $$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

Théorème (Formule intégrale de Cauchy)

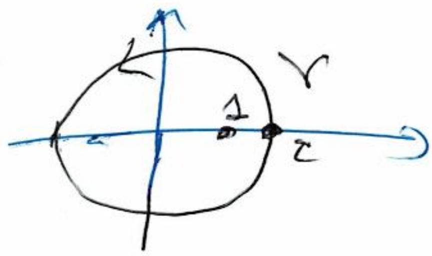
Soit f st fct holomorphe sur un domaine simplement connexe D, et $z_0 \in D$. Alors, on a pour tout chemin simple et fermé γ orienté positivement et entourant z_0

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

De plus :

$$\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(z_0).$$

Exp : 1) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}$ avec $\gamma : |z|=2$



$f(z)=e^z$ st holomorphe dans $\mathbb{C}$

$z_0=1$ st entourée par γ

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i\, e.$$

2) $\int_\gamma \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz = 2\pi i\, f(-i)$, $\quad \gamma : |z|=2$

avec $f(z)=z^2-4z+4 \Longrightarrow f(-i)=3+4i$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz = 2\pi i\,(3+4i)$$

3) $\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz$ avec $\gamma : |z|=1$

$$= \int_\gamma \frac{z+1}{z^3(z+2i)}\,dz = \int_\gamma \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\, f''(0)$$

avec $f(z) = \dfrac{z+1}{z+2i}$

$f''(z) = \dfrac{-2(2i-1)}{(z+2i)^3}$, $f'(z) = \dfrac{2i-1}{(z+2i)^2}$

Ainsi, $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^3(z+2i)}\,dz = \left(\frac{2i-1}{4}\right)\pi$.

Conséquences et applications

Théorème de Moréra : Soit f une fct continue dans un domaine simplement connexe D. Si $\int_\gamma f(z) = 0$ pour tout γ chemin fermé dans D, alors

f est holomorphe dans D.

Théorème de Liouville : Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $|f| \leq M$ alors f est constante.

Preuves Soit $z \in \mathbb{C}$ et γ cercle de centre z_0 et de rayon r $(|\zeta - z_0| = r)$. On a

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \; 2\pi r$$

$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \dfrac{n!}{r^n} M$; pour $n=1$ on a

$|f'(z)| \leq \dfrac{M}{r}$ et si $r \longrightarrow +\infty \Rightarrow f'(z) = 0$

donc f est constante

Théorème de d'Allembert

Si P est un polynôme de degré n, alors l'équation $P(z)=0$ admet n racines dans $\mathbb{C}$.

Preuve :

Posons $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n>0$ et $a_n \neq 0$

supposons par l'absurde que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$, alors $h(z) = \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de plus

$$\lim_{|z|\to\infty} h(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{a_n z^n + \dots + a_0} = 0$$

$\Rightarrow$ $h(z)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.

$\xRightarrow{\text{Liouville}}$ $h(z)$ est constante et ainsi $P(z)$.

c'est une contradiction

Donc, $P(z)$ admet au moins une racine $z_1 \in \mathbb{C}$. D'où $P(z)$ s'écrit $P(z) = (z - z_1)\,\varphi(z)$ avec $\deg(\varphi(z)) = n-1$.

ainsi on peut montrer par récurrence que $P(z)$ admet n racines dans $\mathbb{C}$.