Chapitre 3 : Analyse du variogramme

3.1. Le variogramme

Le variogramme est défini pour toute fonction aléatoire intrinsèque et dépendant uniquement de l'interdistance h, alors que la fonction de covariance ne l'est que pour le cas d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2. De plus, l'estimation du variogramme n'est pas biaisée par la moyenne, au contraire de la covariance.

L'étude de la structure par le variogramme consiste à suivre l'évolution de « variation quadratique moyenne » de l'accroissement de la fonction *Z(x)* en fonction de h d'amplitudes, croissante, où h est le vecteur reliant deux points dans *D*. On obtient ainsi le variogramme dans une direction donnée.

On suppose habituellement que l'espérance des accroissement est stationnaire et nulle. Dans le cas de l'hypothèse intrinsèque, la fonction semi- variogramme $\gamma(h)$ est définie par la relation :

$$\gamma(x+h,\ x) = \gamma(h) = \frac{1}{2}\, E(|Z(x+h) - Z(x)|^2)\ \forall\, x \text{ (\textit{Équation 14})}$$

Et

$$Var\ (Z(x+h) - Z(x)) = E(|Z(x+h) - Z(x)|^2) = 2\gamma(h)\ \forall\, x \text{ (\textit{Équation 15})}$$

Pour des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux le variogramme est borné et peut être calculé à partir de la fonction de covariance (la variance à priori est finie C(0)) :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\, E(|Z(x) - \mu|^2) = C(0) - C(h)\ \ \forall\, x \text{ (\textit{Équation 16})}$$

Où :

C(h) : est la covariance stationnaire

C(0) : est la variance stationnaire $C(0) = Var\ (Z(x))$

Noter que h est un vecteur. Les fonctions C(h) et γ(h) dépendant et de sa longueur (distance entre x et x+h) et de sa direction. Quand elles ne dépendent que de sa longueur, ces fonctions sont dites isotropes.

Conditions limites :

$$C(h) \to 0 \qquad\qquad |h| \to \infty$$

$$\gamma(h) \to C(0) \qquad\qquad |h| \to \infty$$

On peut également calculer une fonction de corrélation entre deux V. A. séparées par la distance h, qu'on appelle Corrélogramme ρ(h) :

$$\rho(h) = \frac{Cov\left(Z(x),Z(x+h)\right)}{\sqrt{Var\left(z(x)\right)*Var\left(z(x+h)\right)}} = \frac{C(h)}{C(0)} = \frac{C(0)-\gamma(h)}{C(0)} \quad (\textit{Équation 17})$$

$$\rho(h) = 1 - \frac{\gamma(h)}{C(0)} \quad (\textit{Équation 18})$$

Si pour tout couple : $Z(x+h),\ Z(x)$, la covariance existe et ne dépend que de la distance h. Le variogramme n'est pas borné et est pour cela préférable à la fonction de covariance :

$$Cov\left(Z(x),Z(x+h)\right) = C(h) = E[(Z(x+h)-\mu)(Z(x)-\mu)]\ \forall x \quad (\textit{Équation 19})$$

Le variogramme théorique sert d'une part à l'analyse structurale du phénomène étudié (effet de pépite, portée, existence de palier,…) et d'autre part à aborder certains problèmes de variabilité spatiale et d'estimation. En principe, pour estimer le variogramme théorique $\gamma(h)$ à partir des données disponibles, on utilise la formule suivante :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[Z(x_i+h) - Z(x_i)\ ]^2 \quad (\textit{Équation 20})$$

Dans laquelle N représente le nombre de couples de valeurs de $Z(x_i)$ mesurées en des points distincts de h.

Le variogramme expérimental étant obtenu, on détermine le variogramme théorique qui s'ajuste le mieux aux points du variogramme expérimental. On calcule le variogramme expérimental à l'aide de :

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(x_i+h) - Z(x_i)\ ]^2 \quad (\textit{Équation 21})$$

où N nombre de paires dont les points sont espacés de h et $Z(x_i+h) - Z(x_i)$ et l'écart entre leur valeur.

À titre d'exemple, la portée du variogramme dans la direction verticale est en général différente de celle obtenue dans la direction horizontale.

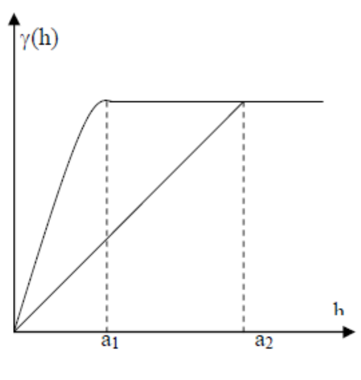

Figure 4 : Ajustement du variogramme- Modèle théorique.

3.2. Modèles

Différents modèles théoriques ont été élaborés pour tenir compte des traits caractéristiques du comportement du variogramme. Les composantes sont définies par un palier *C* et éventuellement une portée *a* et des paramètres de formes. On distingue les modèles sans paliers et modèles avec palier. Les composantes γ_i les plus fréquemment utilisées sont :

Effet de pépite : $\gamma(h) = 0$ si h = 0

$\gamma(h) = C_0$ si h> 0

Sphérique : $\gamma(h) = C[1.5\frac{h}{a} - 0.5\left(\frac{h}{a}\right)^3]$ si 0 < h < a

$\gamma(h) = C$ si $h \geq a$

Gaussien : $\gamma(h) = C[1 - \exp(-3(\frac{h^2}{a}))]$

Exponentiel : $\gamma(h) = C[1 - \exp(-3(\frac{h}{a})]$

Puissance : $\gamma(h) = C\ h^b$ 0 < b < 2 (linéaire : b = 1)

3.3. Propriétés du variogramme

Le variogramme est une fonction paire, à valeurs positives. Il est souvent une fonction croissante bornée. La figure ci-dessous représente une courbe de la variation typique du variogramme en fonction de la distance h. Ainsi, pour les modèles de variogramme montrant un seuil, on a :

- Portée a : On nomme *portée* la distance à partir de laquelle le variogramme atteint, respectivement, son palier ; la *portée pratique* (parfois *facteur d'échelle*) est la distance à partir de laquelle le variogramme reste dans un intervalle de 5 % autour de son palier. La *norme* est le rapport de la portée sur la portée pratique. La portée représente la distance où deux observations ne se ressemblent plus du tout en moyenne, elles ne sont plus liées (covariance nulle) linéairement. À cette distance, la valeur du variogramme correspond à la variance de la variable aléatoire.

- Palier : la limite du variogramme à l'infini. $\sigma^2 = C_o + C$: Variance de la variable aléatoire. (Var(Z(x))

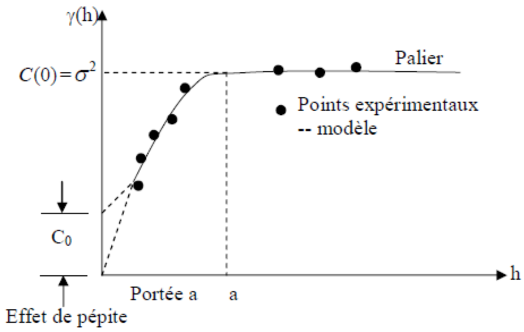

Figure 5 : Exemple de variogramme.

- Effet de pépite : C_0: Variation à très courte échelle, erreurs de localisation, erreurs d'analyse et précision analytique.

Le variogramme croit avec h. ceci provient du fait que plus les points sont éloignés, plus les valeurs des paramètres en ces points ont des chances d'être différentes. En absence de dérive et lorsque la capacité de dispersion du milieu est finie, le variogramme se stabilise autour d'une valeur limite $\gamma(\infty)$ pour des distances h supérieures à une certaine limite à appeler portée.

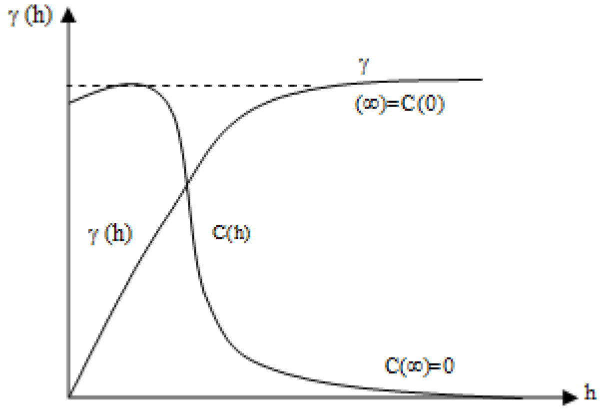

Figure 6 : Propriétés du variogramme.

Lorsque :h = 0

$$\gamma(0) = \frac{1}{2} Var\ (Z\ (x +\ h) -\ Z\ (x)) = 0\ (\textit{Équation 22})\ \text{et non pas}\ C_0$$

3.4. Variance d'estimation et de dispersion

En fait la vraie valeur de la variable Z n'est comme qu'en certains points où l'on dispose de mesures ponctuelles par des sondages. Pour connaître la vraie valeur de Z en tout autre point, on doit procéder à une estimation à partir des données disponibles. Il convient alors de connaître l'erreur commise lorsqu'on utilise la valeur estimée Z* en un point au lieu de la vraie valeur Z inconnue. Pour caractériser cette erreur, on fait appel aux notions de variance d'estimation et de variance de dispersion.