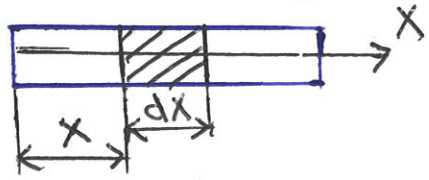
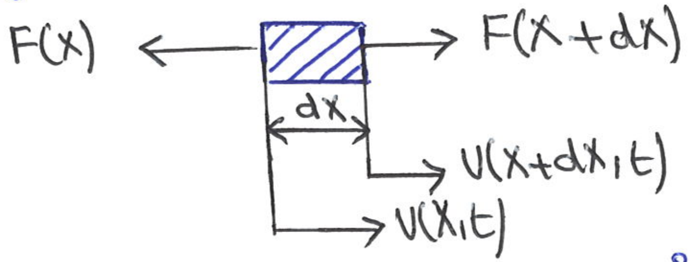
Vibration longitudinale des poutres.

Soit une masse soumise à un mouvement longitudinal. en isolant un élément de longueur dx



en portant sur cet élément les déplacements et les forces sur ses surfaces (faces) :



- $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow -F(X) + F(X+dX) = \rho S\, dX \dfrac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow -F(X) + F(X) + \frac{\partial F(X)}{\partial X} dX = \rho S \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} dX$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \rho S \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}} \qquad (1)$$

- $\sigma = \varepsilon E = \dfrac{F(X)}{S} \Rightarrow F(X) = \varepsilon E S = ES \dfrac{\partial U(X,t)}{\partial X}$

$$\Rightarrow \boxed{F(X) = ES \frac{\partial U(X,t)}{\partial X}} \qquad (2)$$

(2) dans (1) $\Rightarrow ES \dfrac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} = \rho S \dfrac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}} \qquad (3)$$

- Résolution de l'équation (3) par la méthode de séparation des variables : $U(X,t) = U(X) \cdot f(t)$ (4)

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = U(X) \cdot \dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} = f(t) \cdot \dfrac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \end{cases} \qquad (5)$$

(5) dans (3) $\Rightarrow f(t) \cdot \dfrac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} = \dfrac{\rho}{E} U(X) \cdot \dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \left(\frac{\rho}{E}\right)^{-1} \frac{1}{U(X)} \frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} = -W^2 = \text{cste} \quad (6)$$

(6) $\Rightarrow$ 2 équations indépendantes : $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + W^2 f(t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} + W^2 \dfrac{\rho}{E} U(X) = 0 \end{cases}$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont :

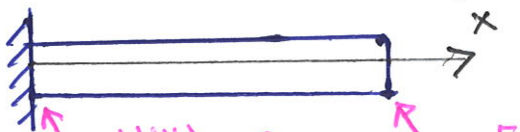
$$\begin{cases} f(t) = A \sin Wt + B \cos Wt \\ U(X) = C \sin\left(W\sqrt{\frac{\rho}{E}}X\right) + D \cos\left(W\sqrt{\frac{\rho}{E}}X\right) \end{cases}$$

Donc : $\boxed{U(X,t) = (A \sin Wt + B \cos Wt) \cdot \left(C \sin W\sqrt{\tfrac{\rho}{E}}X + D \cos W\sqrt{\tfrac{\rho}{E}}X\right)}$ (7)

les constantes (A, B, C et D) sont déterminées à partir des conditions initiales (C.I).

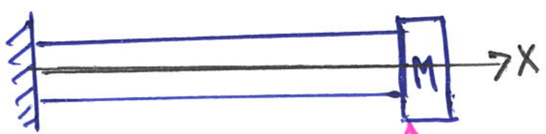
✓ Les conditions aux limites le plus fréquement rencontrées sont :

1)



$U(X) = 0$ $F(X) = 0$ (même pour le cas appuyé)

2)



M : masse concentrée à l'extrémité

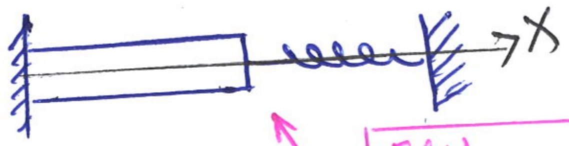
$F(X) = -M \dfrac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow ES \frac{\partial U(X,t)}{\partial X} = -M \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow ES\, f(t) \cdot \frac{\partial U(X)}{\partial X} = -M\, U(X) \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow ES\, f(t) \frac{\partial U(X)}{\partial X} = M W^2 U(X) \cdot f(t) \Rightarrow ES \frac{\partial U(X)}{\partial X} = M W^2 U(X)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(X) = M W^2 U(X)}$$

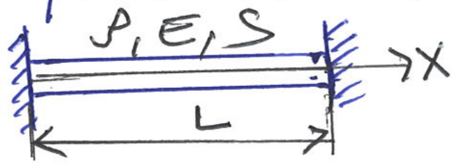
3) 

extrémité retenue par un ressort.

$$\boxed{F(x) = -K\,U(x)}$$

Exemples

- Déterminer les pulsations propres d'une barre bi-encastrée (E-E), en supposant que les paramètres physiques et géométriques sont connus.



En utilisant l'éqt (7) :

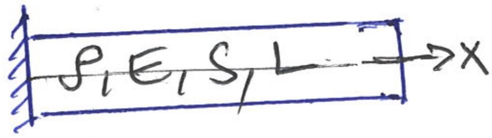
à $X = 0 \Rightarrow U(0,t) = f(t) \cdot D = 0 \Rightarrow D = 0$

à $X = L \Rightarrow U(L,t) = f(t) \cdot \left[C \sin \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L + D \cos \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L\right] = 0$

$\Rightarrow C \sin \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = 0 \Rightarrow \sin \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = 0 \Rightarrow \omega_n\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = n\pi$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

- La même question posée pour une poutre encastrée-libre (E-L).



$U(x,t) = U(x) \cdot f(t)$

$F(x,t) = ES \dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}$

$U(x) = C \sin \alpha x + D \cos \alpha x$ avec $\alpha = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$

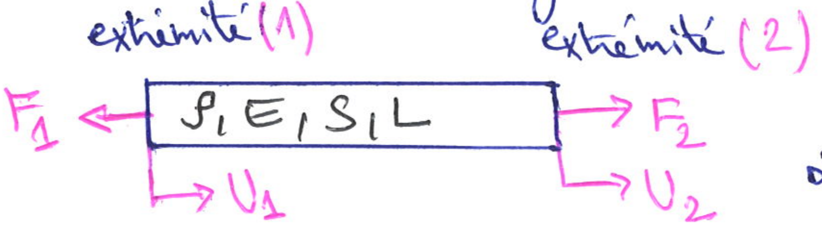
$F(x) = ES\alpha\,(C \cos \alpha x - D \sin \alpha x)$

$$C.L : \begin{cases} U(0) = 0 \\ F(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ ES\alpha C \cos \alpha L = 0 \Rightarrow \cos \alpha L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha L = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{2n+1}{2L}\pi\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Calcul des pulsations propres par la méthode des matrices de transfert (MMT)

Soit la poutre en mouvement longitudinal suivante :



$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

On a : $U(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x$

$$F(x) = ES\frac{\partial U(x)}{\partial x} = ES\alpha\left[C\cos\alpha x - D\sin\alpha x\right]$$

à $x = 0$: $\begin{cases} U(0) = U_1 = D & (1) \\ F(0) = ESC\alpha = F_1 & (2) \end{cases}$

à $x = L$: $\begin{cases} U(L) = U_2 = C\sin\alpha L + D\cos\alpha L & (3) \\ F(L) = F_2 = ES\alpha\left[C\cos\alpha L - D\sin\alpha L\right] & (4) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow D = U_1 \\ (2) \Rightarrow C = \dfrac{F_1}{ES\alpha} \end{array}\right\}$ on les remplace dans (3) et (4)

$$U_2 = \frac{\sin\alpha L}{ES\alpha} F_1 + U_1\cos\alpha L \quad (5)$$

$$F_2 = ES\alpha\left[\frac{\cos\alpha L}{ES\alpha} F_1 - U_1\sin\alpha L\right] \quad (6)$$

(5) et (6) sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} U_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{ES\alpha} \\ -ES\alpha\sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ F_1 \end{pmatrix}}$$

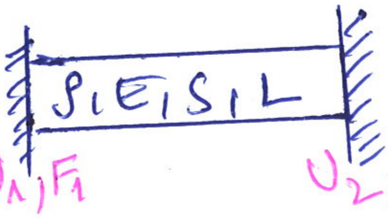
$\begin{pmatrix} U_2 \\ F_2 \end{pmatrix}$ → vecteur d'état du point 2 (V_2)

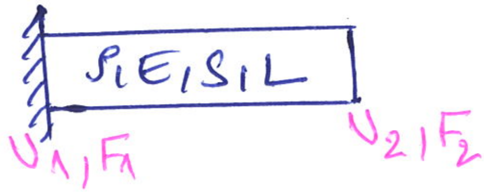
matrice de transfert du Mvt longitudinal $[T]$

$\begin{pmatrix} U_1 \\ F_1 \end{pmatrix}$ → vecteur d'état du point 1 (V_1)

Exemples

- Déterminer les pulsations propres des deux poutres suivantes en Mvt longitudinal par la MMT.

1) 

2) 

On a
$$\begin{pmatrix} U_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{ES\alpha} \\ -ES\alpha \sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ F_1 \end{pmatrix}$$
avec $\alpha = \omega\sqrt{\dfrac{\rho}{E}}$.

1)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{ES\alpha} \\ -ES\alpha \sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\sin\alpha L}{ES\alpha} F_1 \Rightarrow \sin\alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = n\pi$$

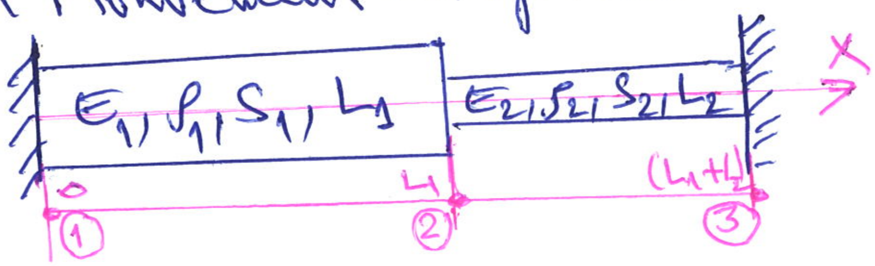
$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

2)
$$\begin{pmatrix} U_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{ES\alpha} \\ -ES\alpha \sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \cos\alpha L \cdot F_1 \Rightarrow \cos\alpha L = 0 \Rightarrow \alpha l = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{2n+1}{2L}\pi\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

EXERCICE : Déterminer les pulsations propres du système suivant composé de deux éléments poutres (poutre étagée) en Mouvement longitudinal :



$1^{\text{ère}}$ Méthode

$$\begin{cases} U_1(X) = C_1 \sin\alpha_1 X + D_1 \cos\alpha_1 X & \text{avec } \alpha_1 = W\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \\ U_2(X) = C_2 \sin\alpha_2 (X-L_1) + D_2 \cos\alpha_2 (X-L_1) & \text{avec } \alpha_2 = W\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \\ F_1(X) = E_1 S_1 \alpha_1 (C_1 \cos\alpha_1 X - D_1 \sin\alpha_1 X) \\ F_2(X) = E_2 S_2 \alpha_2 \left[C_2 \cos\alpha_2 (X-L_1) - D_2 \sin\alpha_2 (X-L_1)\right] \end{cases}$$

C.L :
$$\begin{cases} U_1(0) = 0 \\ U_2(L_1+L_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ C_2 \sin\alpha_2 L_2 + D_2 \cos\alpha_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

conditions de continuité (C.C) :

$$\begin{cases} U_1(L_1) = U_2(L_1) \\ F_1(L_1) = F_2(L_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \sin\alpha_1 L_1 = D_2 \\ E_1 S_1 \alpha_1 \left[C_1 \cos\alpha_1 L_1 - \underbrace{\cancel{D_1 \sin\alpha_1 L_1}}_{0}\right] \\ \quad = E_2 S_2 \alpha_2 C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ C_2 \sin\alpha_2 L_2 + D_2 \cos\alpha_2 L_2 = 0 \\ C_1 \sin\alpha_1 L_1 = D_2 \\ E_1 S_1 \alpha_1 \left[C_1 \cos\alpha_1 L_1 - \underbrace{\cancel{D_1 \sin\alpha_1 L_1}}_{0}\right] = E_2 S_2 \alpha_2 C_2 \end{cases}$$

Si on prend: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $E_1 = E_2 = E$ et $S_1 = 2S_2$
$L_1 = L_2 = L$

on trouve:

$$\begin{cases} C_2 \sin\alpha L + D_2 \cos\alpha L = 0 \\ C_1 \sin\alpha L - D_2 = 0 \\ 2C_1 \cos\alpha L - C_2 = 0 \end{cases}$$

et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha L & \cos\alpha L \\ \sin\alpha L & 0 & -1 \\ 2\cos\alpha L & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \sin\alpha L \cdot 2\cos\alpha L - \cos\alpha L \sin\alpha L = 0$

$\Rightarrow -3\sin\alpha L \cos\alpha L = 0 \Rightarrow \sin\alpha L \cos\alpha L = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha L = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha L = 0$

$$\Rightarrow 2\alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

2ème Méthode (par MMT)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} U_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 L_1 & \dfrac{\sin\alpha_1 L_1}{E_1 S_1 \alpha_1} \\ -E_2 S_2 \alpha_1 \sin\alpha_1 L_1 & \cos\alpha_1 L_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ F_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_3 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 L_2 & \dfrac{\sin\alpha_2 L_2}{E_2 S_2 \alpha_2} \\ -E_2 S_2 \alpha_2 \sin\alpha_2 L_2 & \cos\alpha_2 L_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ F_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

pour le premier élément

pour le deuxième élément

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_3 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 L_2 & \dfrac{\sin\alpha_2 L_2}{E_2 S_2 \alpha_2} \\ -E_2 S_2 \alpha_2 \sin\alpha_2 L_2 & \cos\alpha_2 L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 L_1 & \dfrac{\sin\alpha_1 L_1}{E_1 S_1 \alpha_1} \\ -E_1 S_1 \alpha_1 \sin\alpha_1 L_1 & \cos\alpha_1 L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

Si on prend $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $L_1 = L_2 = L$ et $S_1 = 2S_2$.

Et pour les C.L ($U_1 = 0$ et $U_3 = 0$) : Encastements.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{E S_2 \alpha} \\ -E S_2 \alpha \sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{2 E S_2 \alpha} \\ -2 E S_2 \sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\cos\alpha L \cdot \frac{\sin\alpha L}{2 E S_2 \alpha} + \frac{\sin\alpha L}{E S_2 \alpha} \cdot \cos\alpha L\right) F_1$$

$$\Rightarrow 3 \cos\alpha L \sin\alpha L = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha L = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha L = 0 \Rightarrow 2\alpha L = n\pi$$

$$\Rightarrow \alpha L = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$