الدفعات المتساوية بفائدة مركبة

1- تعريف:

- الدفعات المتساوية هي مجموعة من المبالغ المالية المتساوية التي تدفع دوريا في فترات متساوية.
- يطلق على المبلغ الذي يدفع دوريا **بمبلغ الدفعة a** [غالبا ما تدفع الدفعة سنويا فتسمى دفعة سنوية وقد تدفع كل نصف سنة فتسمى دفعة نصف سنوية أو شهريا فتسمى دفعة شهرية].
- يطلق على المدة التي تفصل بين دفعتين متتاليتين **بفترة أو مدة الدفعة** [وقد تكون هذه المدة سنوية، سداسية، ثلاثية، شهرية أو مدة أخرى].

مميزات الدفعات المتساوية:

بصفة عامة تتميز الدفعات المتساوية بما يلي:

1. قيمة الدفعات المقدمة دوريا (**a**) متساوية.
2. الفترة الفاصلة بين دفعة وأخرى متساوية.
3. معدل الفائدة متساوي ($\mathbf{t_p}$) [ومتجانس مع مدة الدفعة].
4. عدد الدفعات n.
5. تحديد أول وآخر دفعة.

- أنواع الدفعات المتساوية: تنقسم **الدفعات المتساوية إلى نوعين** انطلاقا:

أ\ **دفعات نهاية المدة**: وتسمى أيضا بالدفعات العادية أو دفعات السداد، وتدفع هذه الأخيرة في نهاية كل فترة سداد ويكون هدفها غالبا تسديد دين (قرض) أو تغطية التزام.

ب\ **دفعات بداية المدة**: وتسمى أيضا بدفعات الاستثمار أو دفعات التوظيف، وتدفع هذه الأخيرة في بداية كل فترة سداد ويكون هدفها غالبا تكوين رأس مال.

- تقسيم آخر لأنواع الدفعات المتساوية: يوجد **نوعين** من **الدفعات المتساوية** انطلاقا من مدة دفع الدفعة ومدة رسملة الفائدة:

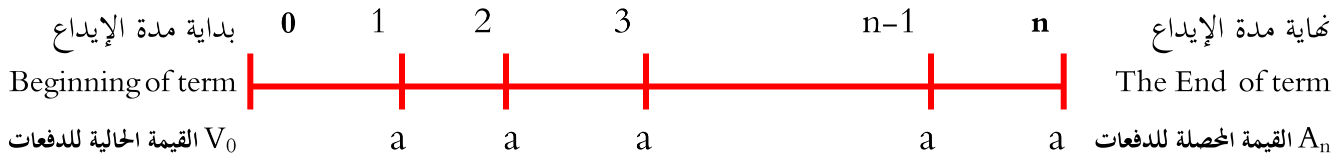
أ\ **الدفعات المتساوية البسيطة**: تكون فيها فترة دفع الدفعة مساوية لفترة رسملة الفوائد [**مثال**: كأن تدفع الفوائد كل 6 أشهر بمعدل سنوي 10% (رسملة سداسية)]، وهذه حالة الدفعات التي تحدثنا عنها سابقا.

ب\ **الدفعات المتساوية العامة**: تكون فيها فترة دفع الدفعة مختلفة عن فترة رسملة الفوائد [**مثال2**: كأن تكون الدفعات شهرية ورسملة الفائدة سداسية، الدفعة شهرية بمعدل سنوي 10% (رسملة سداسية)]، في هذه الحالة يتم البحث عن معدل الفائدة المكافئ لفترة دفع الدفعة ليتماشى هذا المعدل مع فترة السداد، وبعد ذلك تطبق قوانين الدفعات المتساوية البسيطة.

في حالة المثال 2: نبحث عن المعدل الشهري المكافئ لمعدل سداسي 5%، ثم نطبق قوانين الدفعات المتساوية البسيطة.

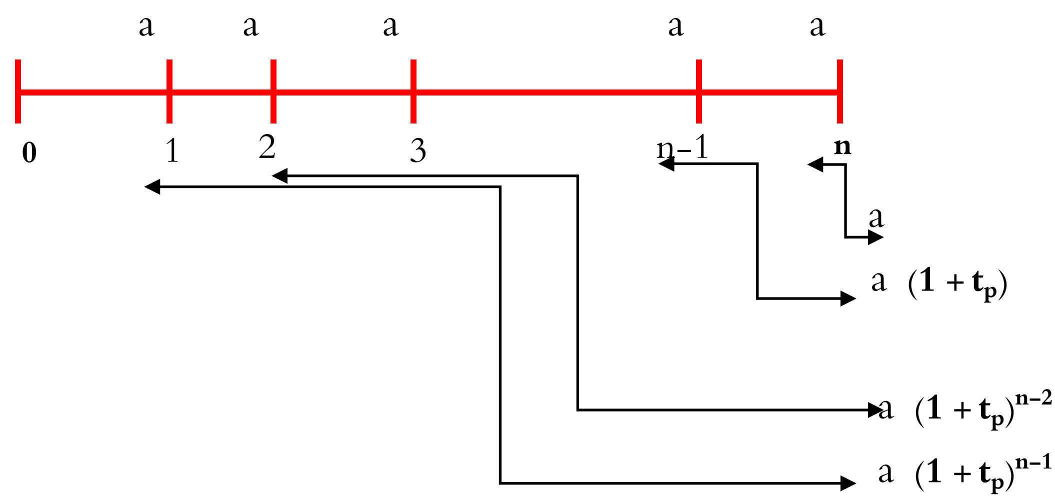
2- دفعات نهاية المدة:

– تدفع هذه الدفعات في نهاية كل فترة سداد، كما تحسب قيمتها المحصلة عند آخر دفعة، بينما تحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات فترة قبل أول دفعة.



أ\ القيمة المحصلة لدفعات نهاية المدة (أو الجملة) : وهي مجموع القيم المحصلة لكل الدفعات بتاريخ تسديد آخر دفعة.

- ✓ **a**: قيمة الدفعة.
- ✓ A_n: القيمة المحصلة للدفعات مجتمعة.
- ✓ t_p: معدل الفائدة المركبة.
- ✓ V_0: القيمة الحالية للدفعات مجتمعة.
- ✓ **n**: عدد الدفعات أو عدد الفترات الزمنية.



مجموع هذه الحدود = $A_n \Leftrightarrow A_n = a + a(1+t_p) + a(1+t_p)^2 + \dots + a(1+t_p)^{n-2} + a(1+t_p)^{n-1}$

نلاحظ أن القيمة المكتسبة أو المحصلة تمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول a، وأساسها $(1+t_p)$، وعدد حدودها n:

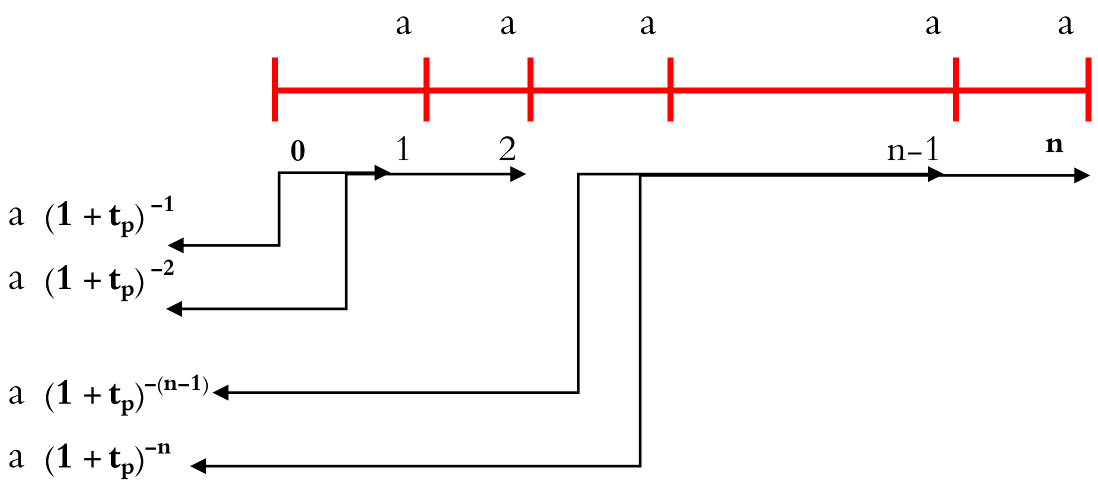
الحد الأول — عدد الحدود

$$A_n = a\,\frac{(1+t_p)^n - 1}{(1+t_p) - 1}$$

الأساس

$$A_n = a\,\frac{(1+t_p)^n - 1}{t_p}$$

ب\ القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة: وهي مجموع القيم الحالية لكل الدفعات في بداية الفترة.



$$V_0 = \sum a\ (1+t_p)^{-i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, (n-1), n$$

$$V_0 = a\ (1+t_p)^{-1} + a\ (1+t_p)^{-2} + \ldots + a\ (1+t_p)^{-(n-1)} + a\ (1+t_p)^{-n}$$

نلاحظ أن **القيمة الحالية** تمثل مجموع **متتالية هندسية** حدها الأول $a\ (1+t_p)^{-1}$، وأساسها $(1+t_p)^{-1}$، وعدد حدودها $\mathbf{n}$.

$$V_0 = a\ (1+t_p)^{-1} \frac{(1+t_p)^{-n}-1}{(1+t_p)^{-1}-1} \Rightarrow V_0 = a \frac{1}{(1+t_p)} \cdot \frac{(1+t_p)^{-n}-1}{(1+t_p)^{-1}-1}$$

بالنشر في المقام:

$$2/ \qquad V_0 = a \frac{(1+t_p)^{-n}-1}{-t_p} \Rightarrow V_0 = a \frac{1-(1+t_p)^{-n}}{t_p}$$

مثال:

وظف شخص 12 دفعة سنوية متساوية، قيمة كل واحدة 6000 وذلك بمعدل فائدة مركبة سنوي 7 % (رسملة سنوية).

1. أوجد جملة هذه الدفعات عند آخر دفعة.
2. أوجد جملة هذه الدفعات خمس سنوات من آخر دفعة إذا لم يتم سحب رأس المال المكون.
3. أوجد جملة هذه الدفعات عند آخر دفعة، إذا علمت أن هذا الشخص استمر بتوظيف نفس الدفعة لخمسة سنوات أخرى.

الحل:

1. حساب الجملة عند آخر دفعة:

$$A_n = a \frac{(1+t_p)^n-1}{t_p} \Rightarrow A_n = 6000 \frac{(1.07)^{12}-1}{0.07}$$

$$A_n = (6000) . (17.888451) \qquad \boxed{A_n = 107330.706\ DA}$$

2. حساب جملة الدفعات بعد خمس سنوات من آخر دفعة (مع عدم سحب رأس المال المكون):

$$A_n = a\,\frac{(1+t_p)^n - 1}{t_p}\,(1+t_p)^5 \Rightarrow A_n = 6000\,(1.07)^5\,\frac{(1.07)^{12} - 1}{0.07}$$

$$A_n = (6000).(1.402552).(17.888451) \qquad \boxed{V_0 = 150536.896\ DA}$$

3. حساب الجملة عند آخر دفعة في حالة استمرار الشخص بتوظيف نفس الدفعة لخمس سنوات أخرى:

$$A_n = a\,\frac{(1+t_p)^n - 1}{t_p} \Rightarrow A_n = 6000\,\frac{(1.07)^{17} - 1}{0.07}$$

$$A_n = (6000).(30.840217) \qquad \boxed{A_n = 185041.302\ DA}$$

* حساب القيمة المحصلة (أو الجملة) بتغير معدل الفائدة وقيمة الدفعات:

كما سبقت الإشارة فإنه يمكن اعتبار مجموعة من الدفعات على أنها مجموعة دفعات متساوية إذا تحققت فيها الشروط التالية:

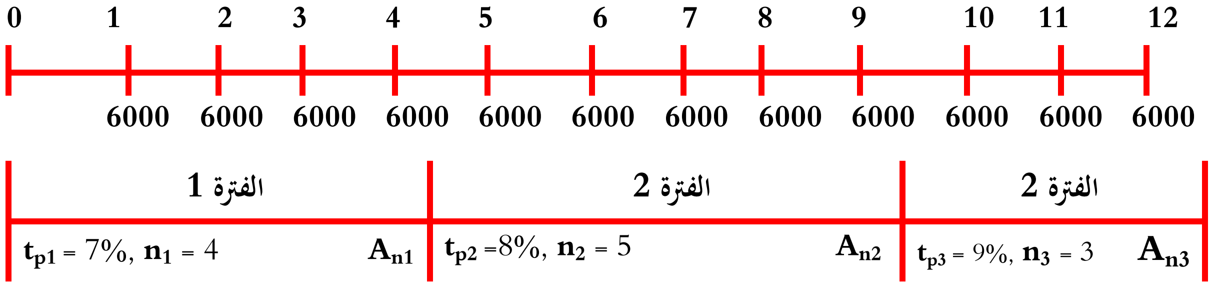
- ✓ قيمة الدفعة متساوية.
- ✓ الفترة بين كل دفعتين متتاليتين متساوية.
- ✓ معدل الفائدة متساوي.

وفي حال اختل أحد هذه الشروط تتحول المجموعة الكلية للدفعات إلى مجموعات جزئية من الدفعات بحيث تتوفر في كل مجموعة جزئية الشروط السابقة.

مثال:

بالعودة إلى المثال السابق،

1. أوجد جملة الدفعات الاثني عشر عند آخر دفعة. علما أن معدل الفائدة بعد تسديد الدفعة الرابعة 8 %، ثم بعد تسديد الدفعة التاسعة يصبح 9 %.



$$A_n = A_{n1}\,(1+t_{p2})^5\,(1+t_{p3})^3 + A_{n2}\,(1+t_{p3})^3 + A_{n3}$$

$$A_n = 6000\,\frac{(1.07)^4 - 1}{0.07}\,(1.08)^5\,(1.09)^3 + 6000\,(1.09)^3\,\frac{(1.08)^5 - 1}{0.08} + 6000\,\frac{(1.09)^3 - 1}{0.09}$$

$$A_n = 50690.5372 + 45584.5106 + 19668.6 \Rightarrow A_n = 115943.648 \text{ DA}$$

2. أوجد جملة الدفعات الاثني عشر عند آخر دفعة. علما أن قيمة الدفعة بلغت 6000 دج للدفعات الأربعة الأولى، 8000 دج للدفعات الخمسة الموالية، 10000 دج للدفعات الباقية.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	6000	6000	6000	6000	8000	8000	8000	8000	8000	10000	10000	10000

الفترة 1	الفترة 2	الفترة 2
$t_p = 7\%,\ n_1 = 4$ A_{n1}	$t_p = 7\%,\ n_2 = 5$ A_{n2}	$t_p = 7\%,\ n_3 = 3$ A_{n3}

$$A_n = A_{n1}(1+t_{p2})^5(1+t_{p3})^3 + A_{n2}(1+t_{p3})^3 + A_{n3}$$

$$A_n = 6000\,\frac{(1.07)^4 - 1}{0.07}\,(1.07)^8 + 8000\,\frac{(1.07)^5 - 1}{0.07}\,(1.07)^3 + 10000\,\frac{(1.07)^3 - 1}{0.07}$$

$$A_n = 45771.8879 + 56359.2205 + 32149 \Rightarrow A_n = 134280.1079 \text{ DA}$$

أوجد جملة الدفعات الاثني عشر عند آخر دفعة. علما أن قيمة الدفعة بلغت 6000 دج للدفعات الأربعة الأولى بمعدل فائدة مركبة سنوي 7 % (رسملة سنوية)، 8000 دج للدفعات الخمسة الموالية وبمعدل فائدة سنوي 8 %، 10000 دج للدفعات الباقية وبمعدل فائدة 9 %.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	6000	6000	6000	6000	8000	8000	8000	8000	8000	10000	10000	10000

الفترة 1	الفترة 2	الفترة 2
$t_{p1} = 7\%,\ n_1 = 4$ A_{n1}	$t_{p2} = 8\%,\ n_2 = 5$ A_{n2}	$t_{p3} = 9\%,\ n_3 = 3$ A_{n3}

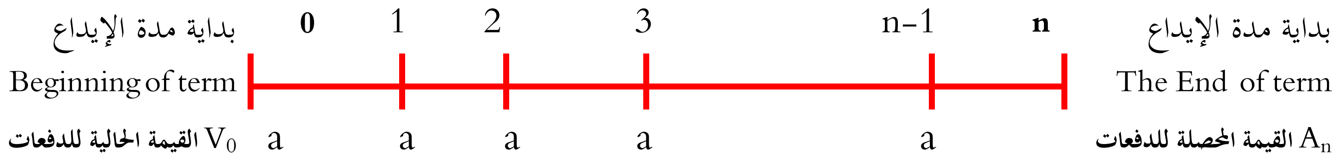
$$A_n = A_{n1}(1+t_{p2})^5(1+t_{p3})^3 + A_{n2}(1+t_{p3})^3 + A_{n3}$$

$$A_n = 6000\,\frac{(1.07)^4 - 1}{0.07}\,(1.08)^5(1.09)^3 + 8000\,(1.09)^3\,\frac{(1.08)^5 - 1}{0.08} + 10000\,\frac{(1.09)^3 - 1}{0.09}$$

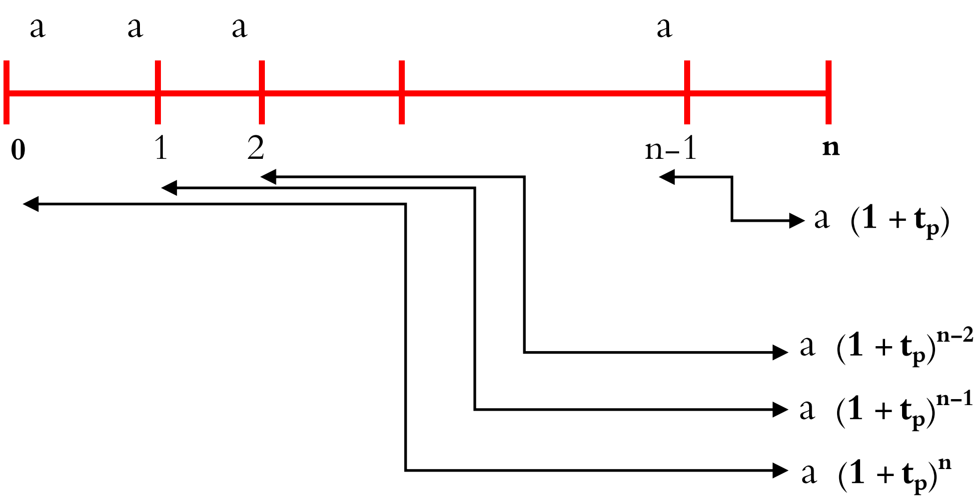
$$A_n = 50690.5372 + 60779.3474 + 32781 \Rightarrow A_n = 144250.8846 \text{ DA}$$

3– دفعات بداية المدة:

– تدفع هذه الدفعات في بداية كل فترة سداد، كما تحسب قيمتها المحصلة فترة بعد آخر دفعة (The End of term of the annuity)، بينما تحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات عند أول دفعة (The Beginning of term)،



أ\ القيمة المحصلة لدفعات بداية المدة:



$$A_n = a\,(1+t_p) + a\,(1+t_p)^2 + \dots + a\,(1+t_p)^{n-1} + a\,(1+t_p)^n \Leftrightarrow A_n = \text{مجموع هذه الحدود}$$

نلاحظ أن القيمة المحصلة تمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول $a\ (1+t_p)$، وأساسها $(1+t_p)$، وعدد حدودها n:

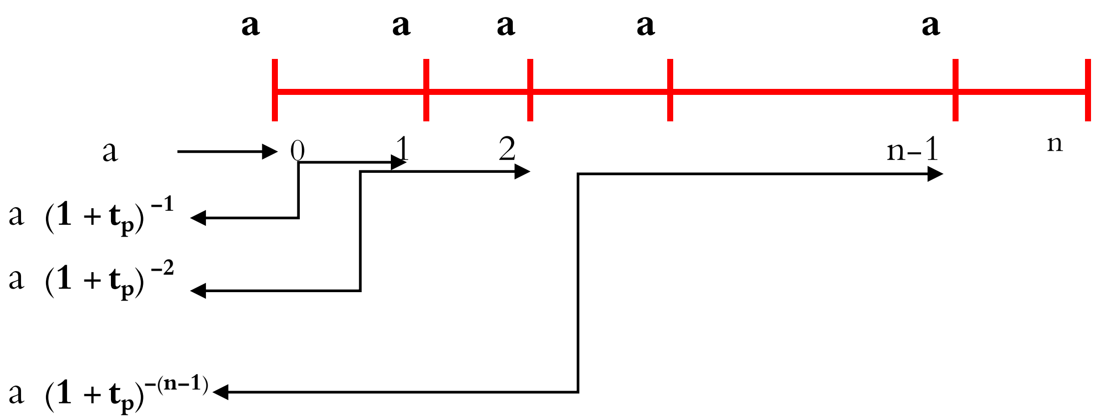
الحد الأول   عدد الحدود

$$A_n = a\,(1+t_p)\,\frac{(1+t_p)^n - 1}{(1+t_p) - 1} \Rightarrow A_n = a\,(1+t_p)\,\frac{(1+t_p)^n - 1}{t_p}$$

الأساس

القيمة المحصلة
لدفعات نهاية المدة
$(1+t_p)$ *

ب\ القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:



$$V_0 = \sum a\ (1+t_p)^{-i} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

$$V_0 = a + a\ (1+t_p)^{-1} + a\ (1+t_p)^{-2} + \ldots + a\ (1+t_p)^{-(n-1)}$$

نلاحظ أن **القيمة الحالية** تمثل مجموع **متتالية هندسية** حدها الأول a، وأساسها $(1+t_p)^{-1}$، وعدد حدودها **n**.

$$V_0 = a\ \frac{(1+t_p)^{-n} - 1}{(1+t_p)^{-1} - 1} \Rightarrow V_0 = a\ \frac{(1+t_p)^{-n} - 1}{(1+t_p)^{-1} - 1} \cdot \frac{(1+t_p)}{(1+t_p)}$$

$$V_0 = a\ (1+t_p)\ \frac{(1+t_p)^{-n} - 1}{-t_p} \Rightarrow V_0 = a\ (1+t_p)\ \frac{1 - (1+t_p)^{-n}}{t_p}$$

القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة $* (1+t_p)$

تمرين 1:

وظف شخص 10 دفعات متساوية، قيمة كل واحدة 10000 دج وهذا في بداية كل سنتين وبمعدل فائدة سنوي 8.5 % (رسملة سنوية).

1. أوجد جملة هذه الدفعات عند آخر دفعة.
2. أوجد القيمة الحالية لهذه الدفعات عند أول دفعة.
3. أوجد رصيد هذا الشخص بعد سنتين من آخر دفعة.

- **فترة الدفعة** (سنتين) $\neq$ فترة رسملة الفائدة (سنة).
- بما أن الدفعة كل سنتين لا بد من البحث عن **المعدل** الذي يدفع كل سنتين t_{p2} و**المكافئ** للمعدل السنوي t_{p1}.

$$(1+t_{p2})^{(1/2)} = (1+t_{p1})^{1} \Rightarrow (1+t_{p2})^{1} = (1+t_{p1})^{2} \Rightarrow 1 + t_{p2} = (1.085)^2$$

$$\Rightarrow t_{p2} = (1+t_{p1})^2 - 1 \Rightarrow t_{p2} = (1.085)^2 - 1 \Rightarrow t_{p2} = 17.7225\%$$

1. حساب الجملة عند آخر دفعة: (الجملة لدفعات نهاية المدة):

$$\mathbf{A_n} = \mathbf{a}\ \frac{(\mathbf{1}+\mathbf{t_{p2}})^{\mathbf{n}}-\mathbf{1}}{\mathbf{t_{p2}}} \Rightarrow A_n = 10000\ \frac{(1.177225)^{10}-1}{0.177225}$$

$$A_n = (10000)\ .\ (23.202404)$$

$$\boxed{\mathbf{A_n = 232024.04\ DA}}$$

2. حساب القيمة الحالية لهذه الدفعات عند أول دفعة: ($\mathbf{V_0}$ لدفعات بداية المدة):

$$\mathbf{V_0} = a\ (\mathbf{1}+\mathbf{t_{p2}})\ \frac{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\mathbf{t_{p2}})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{t_{p2}}} \Rightarrow V_0 = 10000\ (1.177225)\ \frac{1-(1.177225)^{10}}{0.177225}$$

$$V_0 = (10000)\ .\ (1.177225).\ (4.538770)$$

$$\boxed{\mathbf{V_0 = 53431.5331\ \ DA}}$$

أو بطريقة أخرى:

$$\mathbf{V_0} = \mathbf{A_n}\ (\mathbf{1}+\mathbf{t_{p1}})^{-18} = 232024.04\ (1.085)^{-18} = 232024.04\ \ (0.23285)$$

$$\mathbf{V_0} = \mathbf{A_n}\ (\mathbf{1}+\mathbf{t_{p2}})^{-9} = 232024.04\ (1.177225)^{-9} = 232024.04\ \ (0.23285)$$

$$\boxed{\mathbf{V_0 = 53431.5331\ DA}}$$

3. حساب رصيد هذا الشخص بعد سنتين من آخر دفعة.

$$\mathbf{A^*_n} = \mathbf{A_n}\ (\mathbf{1}+\mathbf{t_{p1}})^2 = 232024.04\ (1.085)^2$$

$$\mathbf{A^*_n} = \mathbf{A_n}\ (\mathbf{1}+\mathbf{t_{p2}})^1 = 232024.04\ (1.177225)^1$$

$$\boxed{\mathbf{A^*_n = 273144.5\ \ DA}}$$

اهتلاك القروض العادية (القروض غير المجزأة)

1- عموميات:

- القرض العادي أو غير المجزأ هو قرض يحتوي على مقرض واحد فقط.
- هناك مجموعة من الطرق لتسديد هذا النوع من القروض، نذكر منها:

أ/ تسديد القرض مرة واحدة في نهاية مدة القرض مع فوائده المتراكمة.

ب/ تسديد فوائد القرض دوريا وتسديد أصل القرض في نهاية المدة.

ج/ وهناك طرق تسديد جزئي لأصل القرض مع فوائده، وتتمثل في تسديد القرض على دفعات، وهنا نجد نوعين من الدفعات: دفعات ثابتة ومتناقصة:

*/ اهتلاك القرض بدفعات ثابتة.

**/ اهتلاك القرض باهتلاكات ثابتة (بدفعات متناقصة).

- عادة ما يتم تسديد القرض العادي بدفعات نهاية المدة بحيث تحتوي كل **دفعة a** على:

1- جزء من أصل الدين أو ما يسمى **بالاهتلاك A**.

2- فائدة الدين المتبقي في كل فترة، ومنه **الدفعة (a) = الاهتلاك (A) + الفائدة (I)**.

* **بعض الرموز والاختصارات:**

الرمز	المعنى	الرمز	المعنى
V_0	- أصل القرض	$a_1, a_2, a_3,..., a_n$	- الدفعات المتتالية (ثابتة أو غير ثابتة (متناقصة))
t_p	- معدل الفائدة أو معدل القرض	$A_1, A_2, A_3,..., A_n$	- الاهتلاكات المتتالية (متزايدة أو ثابتة)
n	- عدد الدفعات أو عدد الاهتلاكات أو عدد الفترات	$V_1, V_2, V_3,..., V_n$	- الديون المتبقية المتتالية بعد تسديد الدفعات المتتالية.

* **جدول اهتلاك القروض:** هذا الجدول صحيح مهما كانت طبيعة الاهتلاكات والدفعات:

الدين المتبقي في نهاية الفترة V_i	الدفعة a_i	الاهتلاك A_i	الفائدة I_i	الدين المتبقي في بداية الفترة V_{i-1}	الفترة i
$V_1 = V_0 - A_1$	$a_1 = I_1 + A_1$	A_1	$I_1 = V_0 \cdot t_p$	V_0	1
$V_2 = V_1 - A_2$	$a_2 = I_2 + A_2$	A_2	$I_2 = V_1 \cdot t_p$	V_1	2
					⋮
$V_p = V_{P-1} - A_P$	$a_p = I_P + A_P$	A_p	$I_p = V_{p-1} \cdot t_p$	V_{p-1}	P
$V_{p+1} = V_p - A_{p+1}$	$a_{p+1} = I_{p+1} + A_{p+1}$	A_{p+1}	$I_{p+1} = V_p \cdot t_p$	V_p	P+1
					⋮
$V_n = V_{n-1} - A_n = 0$	$a_n = I_n + A_n$	A_n	$I_n = V_{n-1} \cdot t_p$	V_{n-1}	n

* **علاقات عامة فيما يخص تسديد القروض بدفعات سواء كانت الدفعات ثابتة أم لا:**

1/ $$\boxed{V_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

2/ $$V_n = 0 \Rightarrow V_{n-1} - A_n = 0 \Rightarrow V_{n-1} = A_n$$

$$a_n = I_n + A_n = V_{n-1} \cdot t_p + A_n = A_n \cdot t_p + A_n$$

$$\boxed{a_n = A_n \cdot (1 + t_p)}$$

3/ **العلاقة بين الدفعات والاهتلاك**

نعلم: $[V_p = V_{P-1} - A_P \Rightarrow V_p - V_{P-1} = A_P]$

وبالتالي:

$$a_{p+1} - a_p = A_{p+1} - A_p + A_p \cdot t_p$$

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = A_{p+1} - A_p\,(1 + t_p) \quad \dots(^*)}$$

$$a_{p+1} - a_p = (I_{p+1} + A_{p+1}) - (I_P + A_P)$$

$$a_{p+1} - a_p = (V_p \cdot t_p + A_{p+1}) - (V_{p-1} \cdot t_p + A_P)$$

$$a_{p+1} - a_p = (A_{p+1} - A_p) + (V_p \cdot t_p - V_{p-1} \cdot t_p)$$

$$a_{p+1} - a_p = (A_{p+1} - A_p) + (V_p - V_{p-1}) \cdot t_p$$

2- اهتلاك القروض بدفعات ثابتة:

✓ عند اهتلاك القروض بدفعات ثابتة تكون الفائدة متناقصة والاهتلاكات متزايدة:

على اعتبار أن **الدفعات ثابتة**، **فإن:**

$$a_{p+1} = a_p \Leftrightarrow a_{p+1} - a_p = 0$$

وعليه: $A_{p+1} = A_p\,(1 + t_p)$ $\Leftrightarrow$ $(^*)$: $a_{p+1} - a_p = A_{p+1} - A_p\,(1 + t_p) = 0$

لأن الدفعات ثابتة فإن: $a = a_1 = .. = a_n \Leftrightarrow a = A_n (1 + t_p) \Leftrightarrow a_n = A_n (1 + t_p)$

* حساب V_0:

1/ أصل القرض = مجموع القيم الحالية للدفعات $\Rightarrow V_0 = a \dfrac{1-(1+t_p)^{-n}}{t_p}$ (1)

2/ $a = V_0 . t_p + A_1$ أول سطر من جدول اهتلاك القروض $\Rightarrow V_0 = \dfrac{a - A_1}{t_p}$ (2)

3/ $V_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$

$= A_1 + A_1 (1+t_p) + A_1 (1+t_p)^2 + \dots + A_1 (1+t_p)^{n-1}$

$$V_0 = A_1 \frac{(1+t_p)^n - 1}{t_p} \quad (3)$$

* بعض العلاقات الأخرى:

$I_p - I_{p+1} = A_{p+1} - A_p \Rightarrow$ مثال: $I_2 - I_3 = A_3 - A_2$

$$(1 + t_p) = \frac{I_n}{I_{n-1} - I_n}$$

* اهتلاك القروض باهتلاكات ثابتة:

$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n \Rightarrow V_0 = A_1 . n \Rightarrow A_1 = V_0 / n$

$a_{p+1} - a_p = A_{p+1} - A_p (1+t_p) = A_p - A_p (1+t_p) \Leftrightarrow a_{p+1} - a_p = -A_p t_p = -A t_p$

$\Leftrightarrow a_{p+1} = a_p - A t_p$

$\Leftrightarrow a_{p+1} = a_p - (V_0 / n) t_p$

الدفعات تشكل حدود متتالية حسابية متناقصة للأساس $[(-V_0 / n) t_p]$ حدها العام:

$$a_i = a_1 + (i-1)(-V_0 / n) t_p$$