Méthodes Numériques

TP N 4 résolution de l'équation f(x) = 0 par la méthode du Newton

---

Partie 1 : Principe de la méthode.
Partie2 : Interprétation graphique da la méthode.
Partie3 : Test d'arrêt.
Partie4 : Implémentation de la méthode
Partie5 : Influence de la solution initiale.
Partie6 : Vitesse de convergence

1- Principe de la méthode

La méthode de Newton-Raphson utilise un processus itératif pour calculer ; à partir d'une solution initiale $\boldsymbol{x_0}$ **;** une suite de terme général $\boldsymbol{x_n}$ donnée par :

$$\boldsymbol{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \qquad \textbf{(1)}$$

Telle que f′ représente la dérivée de la fonction f.

Mais d'où vient l'expression $\boldsymbol{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$ **?**

La méthode de Newton-Raphson est basée sur l'effet que la fonction f(x) est égale à sa tangente au voisinage de sa racine **r** (**r** est la solution de l'équation f(x)=0). Autrement dit, que f(x) est égale à son développement limité en **r.**

Utilisant le développement limité, on peut écrire f(x) au voisinage de la solution initiale $\boldsymbol{x_0}$ comme suite :

$$\boldsymbol{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \qquad \text{Avec } \boldsymbol{,\ x \rightarrow x_0}$$

Si on suppose que $\boldsymbol{x_1}$ est une première approximation de la solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ alors,

$$f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

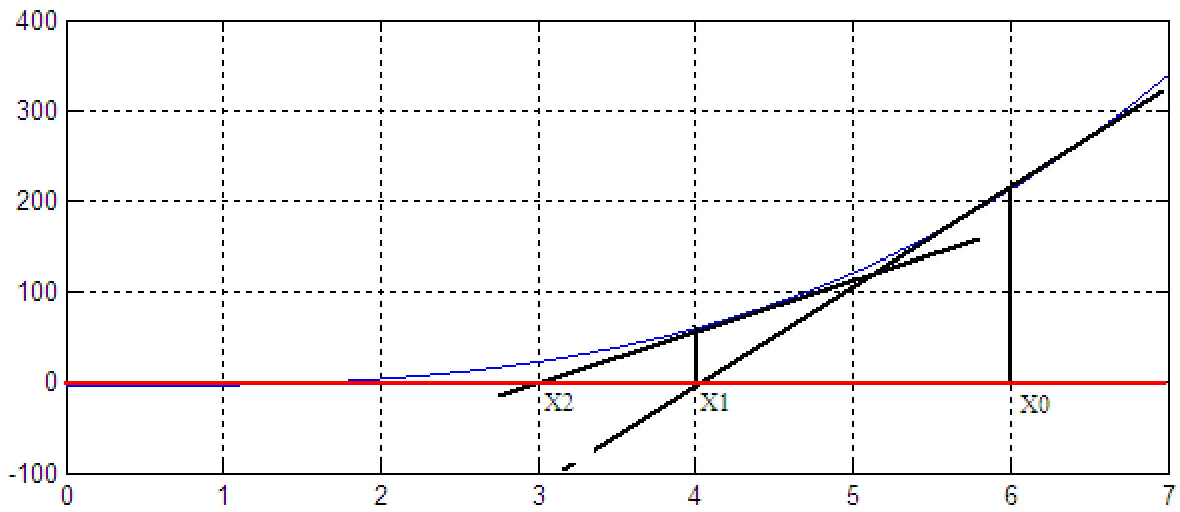
$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Donc, à partir d'une solution initiale x_0 , on peut calculer une autre solution $\mathbf{x_1}$ et qui serait plus proche à la solution recherchée. Ce processus est répété jusqu'à ou on atteindra la précision demandée. C'est-à-dire, on va calculer les termes : $\mathbf{x_2}$ $\mathbf{x_3}$ $\mathbf{x_4}$,. … … … … , x_n en utilisant à chaque fois l'expression (1).

2- Interprétation graphique da la méthode :

On considère la tangente à la courbe représentative de f en (x_0,f(x_0)). Soit x_1 l'abscisse de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses. On peut remarquer que x_1 donne une meilleure estimation d'une solution de l'équation f(x)=0 que x_0. Partant de x_1, on trace la tangente de f en (x_1,f(x_1)) . On note x_2 l'abscisse de l'intersection de cette deuxième tangente avec l'axe des abscisses. x_2 estime mieux la solution de l'équation f(x)=0 que x_1 . On répète cette procédure jusqu'à ou on atteint la précision demandée.



3- Test d’arrêt :

On veut trouver une solution approchée pour l’équation *f(x)=0* avec une précision ε donnée en utilisant la méthode de Newton. On termine les itérations lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \varepsilon$$

4- Implémentation de la méthode

La méthode de Newton s’implémente comme suite :

1. Entrer la formule de f.
2. Entrer la formule de sa dérivée.
3. Donner une solution initiale x_1 qui doit être proche de la solution recherchée. Dans cette étape on peut tracer la courbe de f et on donne une estimation de x_1.
4. Calculer les termes $\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{x_{n-1}} - \frac{\boldsymbol{f(x_{n-1})}}{\boldsymbol{f'(x_{n-1})}}$

EXERCISE I

Donner une valeur approchée de la $\sqrt{2}$.

Avec $\varepsilon = 10^{-4}$

EXERCISE II

Soit l’équation suivante

$$e^{(x - 3)} = - x + 2$$

Ecrire un programme Matlab qui permet d’estimer une solution approchée de cette équation.

Avec $\varepsilon = 10^{-4}$

5- Influence de la solution initiale

Le choix de la solution initiale a une grande importance lorsqu'on calcule la solution d'une équation par la méthode de Newton.

EXERCISE III

Soit l'équation suivante

$$x^5 - 7x^3 + 20 = 0$$

1- Ecrire un Matlab script qui permet de tracer la fonction f(x).
2- D'après le graphe obtenu, quelles sont les deux solutions de l'équation précédente.
3- Ecrire un Matlab script qui permet de résoudre l'équation précédente par la méthode de Newton.
4- Remplissez le tableau suivant :

Solution initiale	4	3 .5	3	2.5	2.3	2.1	2	1	0.9	0
Solution finale										
Nombre d'itérations										

5- Que peut-on conclure ?

Indication $\varepsilon = 10^{-4}$

6- Vitesse de convergence

Soit l'équation suivante

$$\boldsymbol{x^2 - x = 0}$$

1- Trouver une solution approchée de l'équation précédente par la méthode du point fixe.
2- Trouver une solution approchée de l'équation précédente par la méthode de Newton
3- Comparer le nombre d'itération. Conclure sur la vitesse de convergence.

Indication :

- la solution initiale est égale à 0.9
- $\varepsilon = 10^{-6}$