TP N° 5 Intégration numérique

1. Introduction

L'intégrale I d'une fonction $f(x)$ entre les deux bornes x_0 et x_1 est donné par la formule suivante :

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

Lorsqu'i s'agit d'une forme simple de la fonction f(x), cet intégrale peut se fait analytiquement et nous n'avons pas besoin d'utiliser les méthodes numériques pour calculer cet intégrale. Tandis que lorsque la formule de la fonction f(x) devient un peu compliquée ou dans le cas ou nous avons juste des mesures discrètes et aucune formule mathématique qui relie ces mesures, l'intégrale I est calculé numériquement. Autrement dit, les méthodes numériques interviennent lorsque la fonction devient compliquée ou dans le cas d'une mesure expérimentale.

Il est nécessaire de signaler que calculer une intégrale numériquement revient à calculer la surface délimitée par l'axe des abscisses, les deux droites $y = x_0$ et $y = x_1$ et la portion de la courbe cernée entre ces deux droites.

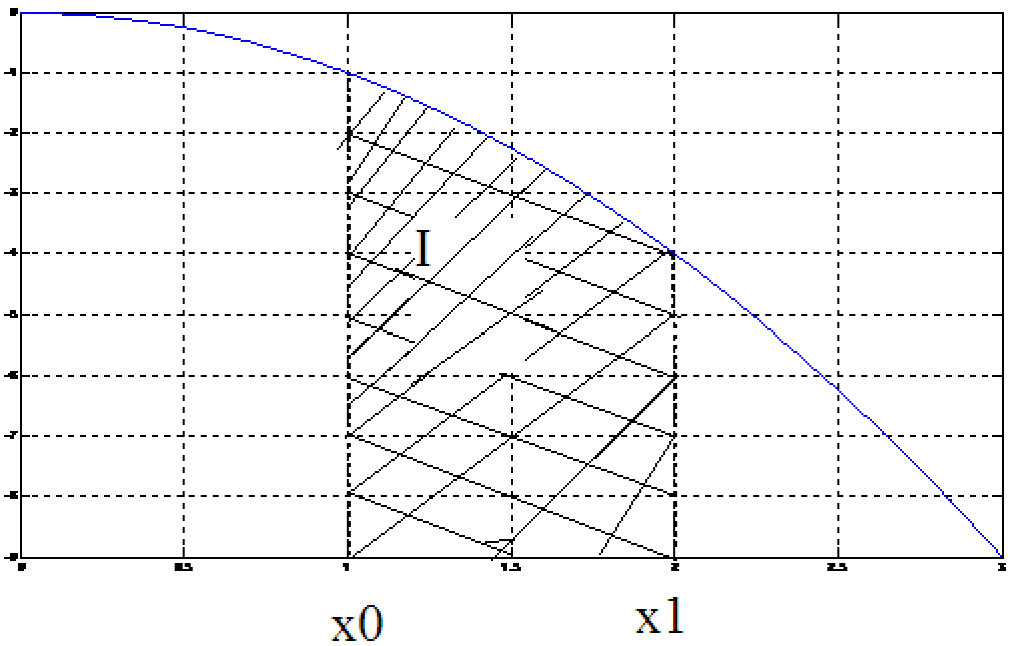

Figure 1 *interprétation graphique de l'intégration*

2. Méthodes des trapèzes

2.1 la surface d'un trapèze.

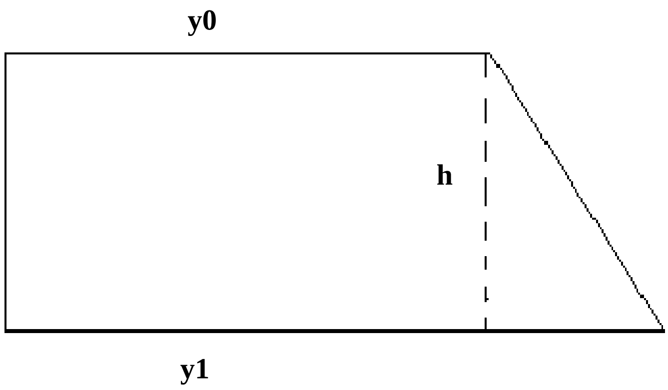

Figure 2. *La surface d'un trapèze*

La surface d'un trapèze est donnée par la formule suivante :

$$s = (y_1 + y_2)\frac{h}{2}$$

2.2 La méthode des trapèzes

La première étape de cette méthode consiste à subdiviser la surface S ; délimitée par l'axe des abscisses, les deux droites $y = x_0$ et $y = x_1$ et la portion de la courbe cernée entre ces deux droites ; en plusieurs trapèzes. Par la suite en calcule la somme des surfaces des trapèzes obtenus.

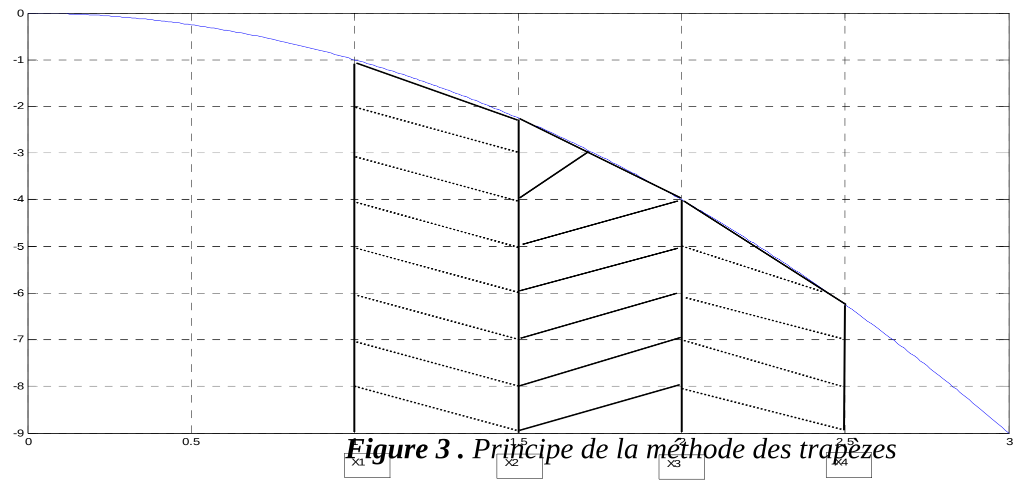

Figure 3 . *Principe de la méthode des trapèzes*

Une valeur approchée de la surface S est obtenue en calculant la somme des surfaces des trapèzes :

$$S \approx \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$S \approx I_1 + I_2 + I_3$$

$$S \approx (y_1 + y_2)\frac{h}{2} + (y_2 + y_3)\frac{h}{2} + (y_3 + y_4)\frac{h}{2}$$

$$S \approx \frac{h}{2}[(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + (y_3 + y_4)]$$

$$S \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i + y_{i+1})$$

Exercice I

Ecrire un programme Matlab qui permet de calculer l'intégrale suivant :

$$I = \int_{1}^{2.5} -x^2 dx$$

Exercice II

Calculer l'intégrale suivant :

$$I = \int_{0}^{1} 1/(1 + x^2)dx$$

3. La méthode de Simpson 1/3

Dans la méthode des trapèzes, les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ….(x_n, y_n) sont reliés en utilisant un polynôme de premier degré. Dans la méthode de Simpson en utilisant un polynôme de degré 2. En utilisant cette méthode, l'intégrale de f(x) est donné par :

$$I = \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

Exercice III

Calculer par la méthode de Simpson l'intégrale suivant :

$$I = \int_0^1 1/(1+x^2)dx$$

4. Méthode de Simpson composée.

Afin d'avoir plus de précision sur la valeur calculée de l'intégrale, la méthode de Simpson peut être répétée Sur les intervalles $[x_i \quad x_{i+1}]$. Cette méthode est appelée la méthode de Simpson composée. La valeur de l'intégrale est donnée par la formule suivante :

$$I = \frac{h}{3}[\, y_1 + 4\sum_{i=2}^{n/2} y_{2i-1} + 2\sum_{i=2}^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} y_{2i} + y_n]$$

Exercice III

Calculer par la méthode de Simpson composée l'intégrale suivant :

$$I = \int_0^1 1/(1+x^2)dx$$