Notations

Notations générales

Symbole	Signification
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Element de $I\!R^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$\alpha \wedge \beta$	$\max\{\alpha,\ \beta\}$
$D_i u = \partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	Dérivée partielle de u par aport a x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$	Deuxième dérivée partielle de u par rapport a x_i, x_j
$Du = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradient de u
$D^2 u = (D_{ij} u)$	Matrice Hessienne de u
Δu	Laplacien de u
$\Delta_p u = \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$	p Laplacien de u
p'	Exposent conjugué de p, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
$\partial \Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$\|A\|$	mesure de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in I\!R^N$
ω_N	mesure de la sphère unité dans $I\!R^N$
$\omega_N^{'}$	mesure de la boule unité de $I\!R^N$

Symbole	Signification
X'	Espace dual de X
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
δ_{ij}	symbol de Kronecker
δ_{x_0}	Delta de Dirac en x_0
$p.p.$	presque pour tous les points
$s.c.i.$	Semi continue inferierement
$s.c.s.$	Semi continue superierement
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V, 0)$
V^-	Partie negative de la fonction V, $V^- = \max(-V, 0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ó $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Fonctions continues dans Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Fonctions continues dans Ω a support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Fonctions Hölder continues dans Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Fonctions Hölder continues de classe k dans Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ a support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Fonctions indéfiniment differentiables dans Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a support compacte
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ non négatives
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c.a.d espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!\!R \mid u$ mesurable, $\int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!\!R \mid u$ mesurable et $\exists C$ tel que $\lvert u(x)\rvert \leq C$ dans p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace zero
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\mathcal{D}^{1,2}(I\!\!R^N)$	Completion de $\mathcal{C}_0^\infty(I\!\!R^N)$ par apport a la norme $\lvert\lvert\phi\rvert\rvert_{\mathcal{D}^{1,2}(I\!\!R^N)} \equiv \int\limits_{I\!\!R^N} \lvert\nabla\phi\rvert^2 dx$
$\mathcal{D}_{-\gamma}^{-1,p'}$	Espace dual $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}$

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

I-Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \exists g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \textit{tels que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, N \Big\},$$

on note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad si \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = \infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif si $1 < p < \infty$, il est séparable si $1 \leq p < \infty$.
On pose $\quad H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Pour tout entier $m > 1$, on définit

$$W^{m,p}(\Omega) = \Bigg\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \forall \alpha \text{ multi-indice} \quad avec \quad |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad tel\ que$$
$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Bigg\},$$

un multi-indice α est une suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ avec $\alpha_i \geq 0$ entier ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \qquad et \qquad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi,$$

et on note $D^\alpha u = g_\alpha$.

Notons que par récurrence, on a

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, 3, \cdots, N \right\}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha u, D^\alpha v \Big)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note $\quad H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Il s'avère très utile de savoir comment caractériser les éléments des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 0.0.1 *Étant donné $v \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $v \in W^{1,p}(\Omega)$

(b) Il existe une constante $C > 0$ tel que pour n'importe quel direction $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$(\forall \xi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \left| \int_\Omega v \, \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \, dx \right| \leq C \, \|\xi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

(c) Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ on a

$$(\forall h \in \mathbb{R}^N : |h| < dist(\partial\omega, \partial\Omega)) : \; \|\tau_h v - v\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|,$$

ou $\tau_h v(x) = v(x+h)$.

Noter qu'on peut prendre $C = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$ dans (b) et (c).

Le Théorème suivant permet de prolonger une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ en une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ce prolongement nécessite que le domaine Ω soit de classe C^1.

Theorem 0.0.2 *On considère Ω un domaine borné de classe C^1 ou bien $\Omega := \mathbb{R}_+^N$. Alors il existe un opérateur linéaire*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

en plus, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a :

1) $Pu_{|\Omega} = u$,

2) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \; \|u\|_{L^p(\Omega)}$,

3) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \; \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dans le cas où Ω est un domaine borné dans une direction(c.à.d il existe $a > 0$ et $i \in \{1, 2, ..., N\}$ tel que $|x_i| \leq a$ pour tout $x \in \Omega$,) on a l'inégalité suivante :

Théorème 0.1 **(Inégalité de Poincaré)** *Soit Ω un domaine borné dans une direction, $1 \leq p$. Alors il existe une constante $C := C(\Omega, p)$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p.$$

En particulier la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 0.2 *(Inégalité de Sobolev)*
Soit $1 \leq p < N$, il existe une constante $S \equiv S(p, N)$ telle que $\forall u \in W^{1,p}(I\!R^N)$, on a

$$S\|u\|_{L^{p^*}(I\!R^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(I\!R^N)},$$

avec $p^* := \frac{p\,N}{N-p}$.

Comme conséquent l'espace $W^{1,p}(I\!R^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, p^*]$.

Remarque 0.1

- *Pour le cas $p = N$, $W^{1,p}(I\!R^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(I\!R^N)$ pour $q \in [N, \infty[$.*

- *Pour le cas $p > N$, $W^{1,p}(I\!R^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(I\!R^N)$ pour $q \in [N, \infty]$. Dans ce cas particulier, chaque élément de $W^{1,p}(I\!R^N)$ admet un représentant continu.*
- *Lorsque Ω est borné toutes les injections précédentes (en remplaçant $I\!R^N$ par Ω) restent valables. Notons que dans ce cas l'inégalité de Sobolev devient $\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$.*

Un cadre général des injections précédentes est fourni par le théorème suivant.

Théorème 0.3 *Soit Ω un ouvert régulier de $I\!R^N$, soient $m \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$. On a :*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $q \in [p, +\infty[$ (mais pas dans*

  L^∞ si $p > 1$).

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$; dans ce cas si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas entier alors $W^{m,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$ avec $k := \left[m - \frac{N}{p}\right]$.*

Sans l'hypothèse de régularité de Ω, les injections précédentes restent valables localement. Elles restent globalement vraies pour $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Un résultat particulièrement important est le théorème de Rellich-Kondrachov, qui concerne l'injection compacte des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ dans certains espaces $L^q(\Omega)$.

On a besoin de la définition suivante.

Définition 0.1 *(Opérateur compact) Soient E, F deux espaces de Banach et $A : E \to F$ un opérateur continu (pas forcément linéaire). On dit que A est un opérateur compact si l'image de tout borné de E par A est relativement compacte dans F. En d'autres termes, si $\{u_n\}_n \subset E$ est une suite bornée, alors la suite $\{v_n = A(u_n)\}_n \subset F$ admet une sous-suite convergente dans F.*

Dans le cas où $E \subset F$, on peut considérer l'application identité $\mathbb{I}$ de E dans F. Il est clair que $\mathbb{I}$ est injective. Si $\mathbb{I}$ est continue, on dit que l'injection de E dans F est continue et on note $E \hookrightarrow F$. Si en plus, $\mathbb{I}$ est compacte, on dit alors que l'injection de E dans F est compacte et on note $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$.

Le théorème suivant concerne la compacité de l'injection des espaces de Sobolev dans certains espaces L^q. Il est d'une grande importance dans l'application des méthodes variationnelles.

Théorème 0.4 (Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un domaine bornée de classe $\mathcal{C}^1$, on a les injections compactes suivantes :*

- *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*
- *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.*
- *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Remarque 0.2 *Les injections précédentes sont vraies pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ seulement si Ω est borné.*

Remarque 0.3

- *Pour le cas $q = p^*$, l'injection n'est pas compacte, ce défaut est dû à l'invariance de la norme du gradient dans L^p et la norme de u dans L^{p^*} par le changement de variable suivant : $v \mapsto v_1$, où $v_1(x) = \mu^{-\frac{p^*}{p}} v(\frac{x}{\mu}), \mu > 0$.*
- *Si Ω n'est pas borné alors l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ n'est en général pas compacte ; comme le démontre le contre exemple suivant : Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ telle que $\phi \geq 0$, on pose $\phi_n(x) = \phi(x + ne), e = (1, 1, 1..., 1)$, il est facile de voir que $\phi_n \to 0$ p.p et $||\phi_n||_{L^q} = ||\phi||_{L^q} > 0$.*

0.1 Travaux dirigés :

Exercice 1 :

1-Soit $H : I\!R \to I\!R$ une function de classe $C^1(I\!R)$ telle que $H(0) = 0$ et $|H'(s)| \leq C\ \forall s \in I\!R$.

a-Montrer que $|H(s)| \leq C|s|\ \forall s \in I\!R$.

b-Soit $u \in W^{1,p}(I\!R^N)$ ou $1 \leq p < N$. Montrer que $H(u) \in W^{1,p}(I\!R^N)$.(On peut utiliser le fait que $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ est dense dans $W^{1,p}(I\!R^N)$).

c-Donner deux exemples de H.

Exercice 2 :

Soit $\Omega = \{x \in I\!R^N : |x| > a > 0\}$, on pose

$$u(x) = \arctan(|x|^k), k > 0.$$

1-Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

2-Trouver les valeurs de k, p tel que $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

3-On suppose que $\Omega = B(0,1)$ et $k \geq 1$. Montrer que $u \in W^{1,p}(\Omega), \forall p \geq 1$.

4- Soit $u(x) = \log(\log(1 + \frac{1}{|x|}))$. Montrer que $u \in W^{1,N}(B_1)$ ou $B_1 = B_1(0) \subset I\!R^N$.

Exercice 3 :

Soit $0 < a < 1$, pour $x \in B(0,a) \subset I\!R^N$, on pose

$$u(x) = \Big(- \log(|x|^2) \Big)^k, k > 0.$$

1-Montrer que $u \in L^N(B(0,a))$ pour tout $k > 0$.

2-Trouver les valeurs de k tel que $u \in W^{1,N}(B(0,a))$.

3-Déduire que $W^{1,N}(B(0,a)) \nsubseteq L^\infty((B(0,a))$.

4-On suppose que $\Omega = B(x_0, a)$ ou $x_0 = (1, 1, 1, ..., 1)$ et $a < 1$. Montrer que $\forall p > 1$, on a $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 4 :(Inégalité de Hardy)

Soit $p \in (1, \infty)$ et $f \in L^p(0, \infty)$. Pour $x \in (0, \infty)$, on pose $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

On suppose que $f \in \mathcal{C}_0(0, \infty)$(c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $(0, \infty)$),

(a) Montrer $F \in C^1(]0, \infty[) \cap L^p(0, \infty)$ et que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

(b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \infty[$. Montrer que

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1} f(x)dx$$

(faire une intégration par parties)

(c) Montrer que $||F||_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} ||f||_{L^p}$.

Exercice 5 :

Soit $]a, b[$ un intervalle de $I\!R$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et $\phi \in \mathcal{C}^1[a, b]$.

1- Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ϕ telle que

$$\forall t \in]a, b[, |\phi(t)| \leq C(||\phi||_{L^2} + ||\phi'||_{L^2}).$$

En déduire que $H^1(]a, b[) \hookrightarrow L^\infty(]a, b[)$ et que l'injection est continue(on pourra admettre la densité de $\mathcal{C}^1[a, b]$ dans $H^1(]a, b[)$).

2-Choisir un example de fonction de type $u(x) = (-\log|x|)^\alpha (\alpha \in I\!R$ à déterminer) pour prouver que l'injection de $H^1(B)$ dans $L^\infty(B)$ est fausse en dimension deux, ici $B = B(0, \frac{1}{2})$. (On Rappelle que $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{r|\log r|^\beta} dr < \infty$ ssi $\beta > 1$.)

3- Soit D une partie bornée de $H^1(]a, b[)$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de D telle que :

$$\forall \phi \in D,\ \forall t, t' \in]a, b[, |\phi(t) - \phi(t')| \leq C|t - t'|^{\frac{1}{2}}.$$

4-En déduire que l'injection de $H^1(]a,b[)$ dans $L^\infty(]a,b[)$ est compacte (on utilisera le Théorème d'Ascoli : de toute suite bornée et équicontinue dans $\mathcal{C}[a,b]$, on peut extraire une sous-suite convergente).

Exercice 6 :(*Inégalité de Pincaré-Wirtinger*)

Soit $I=]a,b[$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On fixe $1\leq p<\infty$ et on considère

$$V := \left\{ u \in W^{1,p}(I) \text{ tel que } \int_a^b u = 0 \right\}.$$

1- Monter que V est un espace de Banach par rapport à $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$.

2- Montrer qu'il existe une constante $C>0$ tel que

$$(\forall u \in V)\ \|u\|_{L^p(I)} \leq\ C\ \|u^{'}\|_{L^p(I)}.$$

3- Que puisse t-on dire sur :

$$\begin{aligned} \rho : & V \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \longmapsto \rho(v) = \|v^{'}\|_{L^p(I)}. \end{aligned}$$

4- Montrer que $W^{1,p}(I) = \tilde{\mathbb{R}} \oplus V$.

(*Ici la notation* $\tilde{\mathbb{R}}$ *désigne l'ensemble des fonctions constantes de* $I \mapsto \mathbb{R}$.)

5- Déduire ?

Exercice 7

Soit $(a,b)\subset I\!R$ tel que $|a|,|b|<\infty$. Pour $C\in I\!R$, on définit l'espace V par

$$V_C(a,b) = \left\{ u \in W^{1,2}(a,b) \text{ tel que } u(1) = C\,u(0) \right\}.$$

1-Montrer que $V_C(a,b)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $W^{1,2}(a,b)$.

2-On suppose que $C=0$. Montrer qu'il existe une constante $M>0$ telle que $\forall u\in V_0(a,b)$, on a

$$||u||_\infty \leq M||u'||_{L^2(a,b)}.$$

3-Déduire que $||u'||_{L^2(a,b)}$ est une norme sur $V_0(a,b)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,2}(a,b)$.

4-L'affirmation de la question 3 est-elle vraie dans l'espace $V_1(a,b)$?

Exercice 8

1-Soit $u \in W^{1,p}(I\!R)$, montrer que pour tout $p > 1$,

$$|u(x)|^p \leq p||u||_p^{p-1}||u'||_p \ \ p.p \text{ pour } x \in I\!R.$$

(on peut utiliser la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R)$ dans $W^{1,p}(I\!R)$ et que la fonction $G(s) = |s|^{p-1}s$ est de classe C^1 pour tout $p > 1$.)

2-Déduire que $u \in L^\infty(I\!R)$ et que

$$||u||_\infty \leq C||u||_{W^{1,p}}$$

où C est une constante universelle (indépendante de p).

Exercice 9 :

A-Soit $u : I\!R^N \to I\!R$, $N \geq 3$, une fonction radiale de classe $C^2(I\!R^N)$ $(u(x) \equiv u(r)$, $r = |x|)$.

1-Donner l'expression de Δu en coordonnées hypersphériques.

2-Pour $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{(\frac{1}{n} + |x|)^\alpha} = \dfrac{1}{(\frac{1}{n} + r)^\alpha}$ où $\alpha \in (0, N-2)$. Montrer que

$$-\Delta u_n \geq C(\alpha, N)\frac{u_n(x)}{(|x| + \frac{1}{n})^2} \text{ où } C(\alpha, N) > 0 \text{ dépend seulement de } \alpha \text{ et de } N.$$

B- Soit $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné de $I\!R^N$ et

$$\phi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega}) \equiv \Big\{\phi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \text{ et } \phi \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}.$$

1-Montrer que $\dfrac{\phi^2}{u_n}$ est bien définie dans $\bar{\Omega}$ et que

$$\nabla\left(\frac{\phi^2}{u_n}\right) = 2\left(\frac{\phi}{u_n}\right)\nabla\phi - \left(\frac{\phi^2}{u_n^2}\right)\nabla u_n.$$

2- En appliquant la formule de Green (la formule d'intégration par parties), montrer que

$$\int_\Omega (-\Delta u_n)(\frac{\phi^2}{u_n})dx = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(\frac{\phi^2}{u_n})dx.$$

3-Prouver que $\int_\Omega f_n(x)\phi^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx$ où f_n est une fonction à déterminer.

4-Montrer qu'il existe une constante $C \equiv C(\Omega, N, \alpha) > 0$ tel que $\forall x \in \Omega, \forall n \geq 1$ on a $f_n(x) \geq C$ et déduire que

$$C\int_\Omega \phi^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx \text{ (Inégalité de Poincaré.)}$$