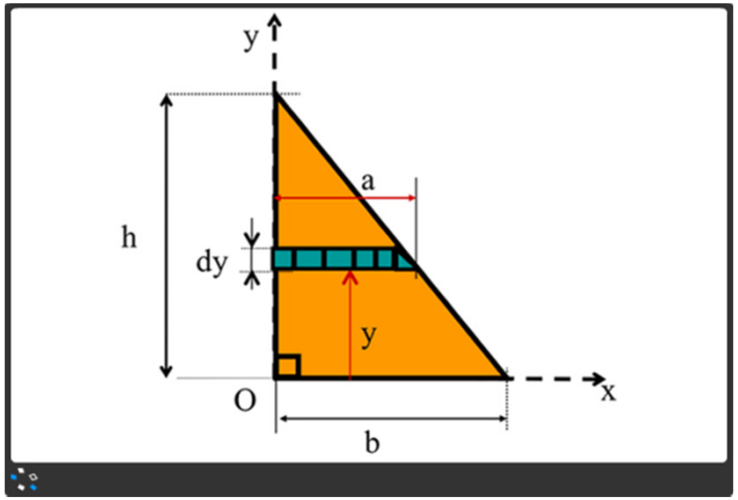
Université Abou Bakr Belkaïd
Tlemcen

Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

Résistance des Matériaux

CHAPITRE IV

Caractéristiques géométriques des sections planes



A.N.GHENIM

Introduction

Afin de pouvoir calculer les contraintes et les déformations des solides étudiés, il est nécessaire de savoir déterminer un certain nombre de caractéristiques géométriques des sections planes :

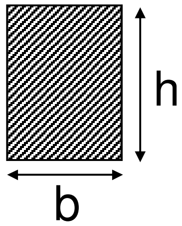
- Centre de gravité,
- Moment statique,
- Moments d’inertie ou quadratiques

1. Aire d'une section

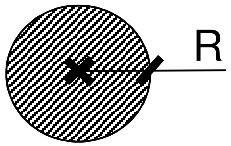
Notée généralement **A** (ou S)

Unité **mm^2, cm^2, dm^2, m^2 etc ...**

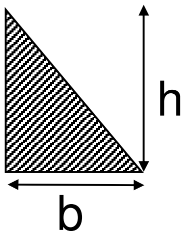
<u>Rappel des valeurs courantes :</u>



$$A = b \cdot h$$



$$A = \pi \cdot R^2$$



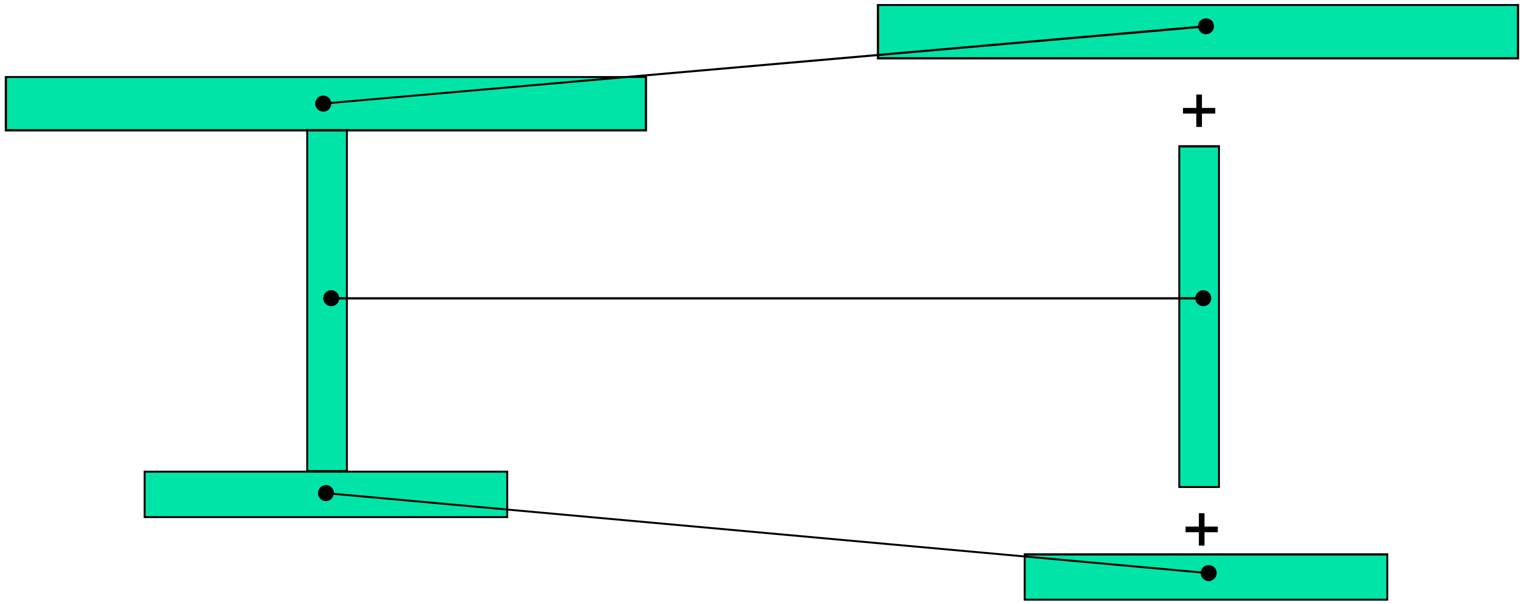
$$A = b \cdot h / 2$$

1. Aire d'une section

Dans le cas d 'une section « complexe » :

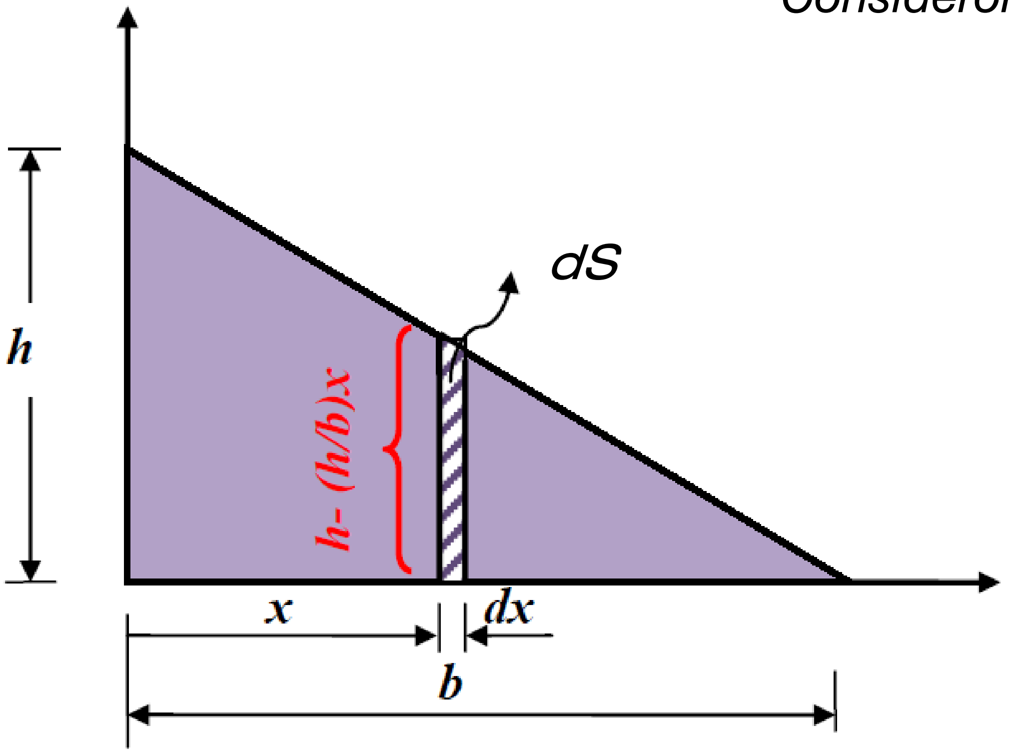
1 - décomposer en sections élémentaires simples,

2 - additionner toutes ces aires élémentaires.



1. Aire d'une section - Exemple

Soit la surface triangulaire plane montrée par la figure ci-dessous.



Considérons une surface élémentaire telle que :

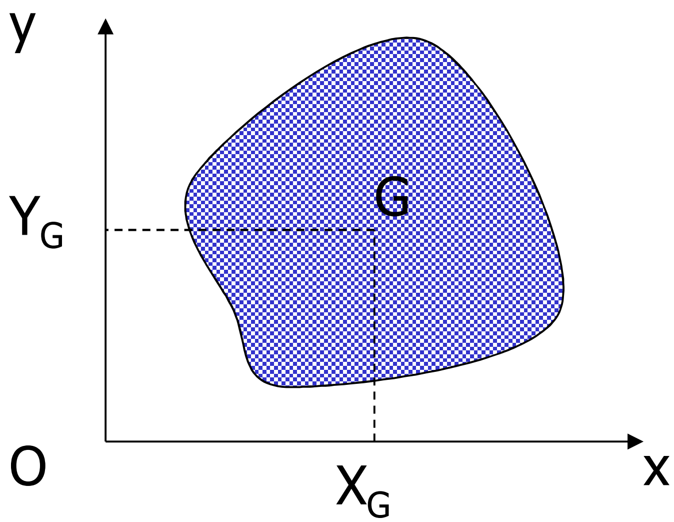
$$dS = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) dx$$

$$S = \int_S dS = \int_0^b h\left(1 - \frac{x}{b}\right) dx = \frac{bh}{2}$$

2. Centre de gravité

<u>Définition :</u> Le centre de gravité (G) d'une section est le point tel que le **moment statique** de la section, par rapport à n'importe quel axe passant par ce point, est **nul**.

Soit une section plane d'aire S définie dans un repère orthonormé Oxy.



Les coordonnées du centre de gravité G sont définies par :

$$X_G = \frac{\iint_S x.dS}{S} \qquad Y_G = \frac{\iint_S y.dS}{S}$$

2. Centre de gravité

Remarques :

- si la section possède un axe de symétrie, le CdG est situé sur cet axe,

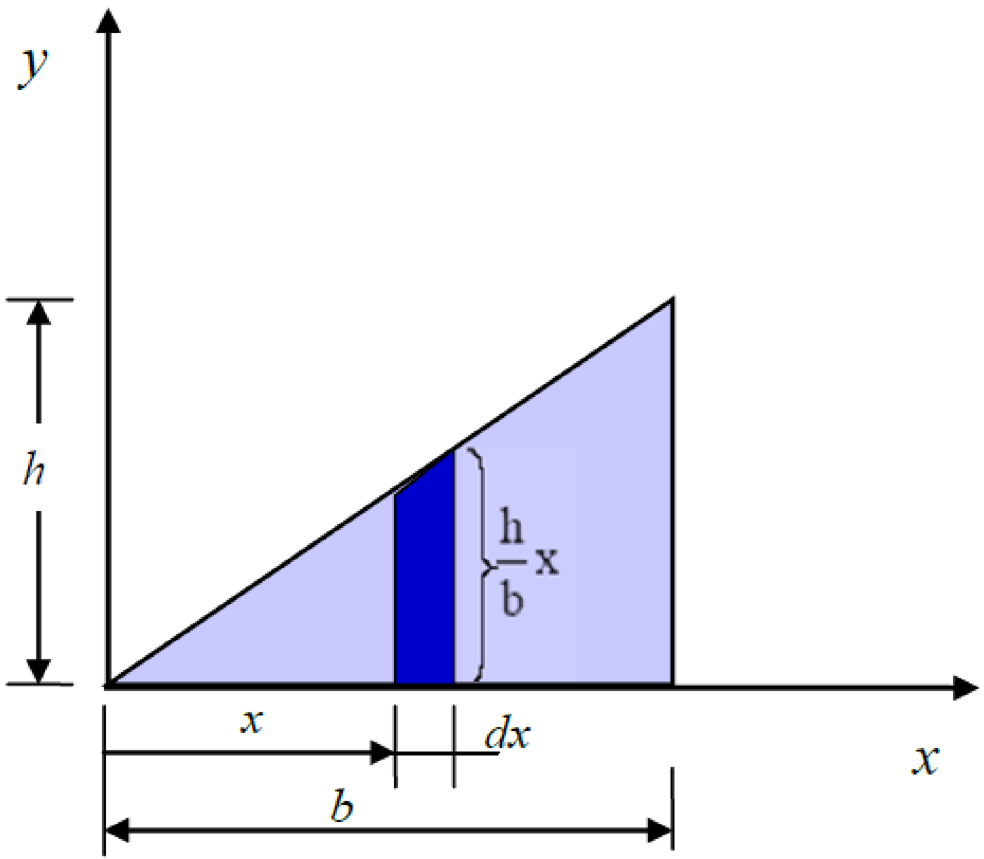
- si la section possède 2 axes de symétrie, le CdG est à l 'intersection de ces 2 axes.

Si la section S peut être décomposée en n sous-sections simples, d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} (S_i . x_{Gi})}{S} \qquad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} (S_i . y_{Gi})}{S}$$

2. Centre de gravité – Exemple1

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section triangulaire ci-dessous.



$$X_G = \frac{\int_S \; xdS}{\int_A \; dS} = \frac{\int_0^b x\left(\frac{h}{b}xdx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}xdx}$$

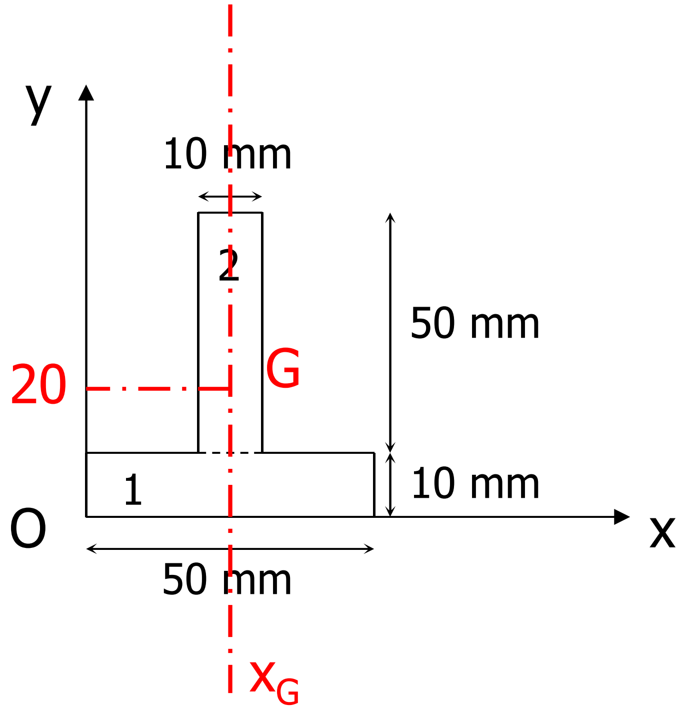
$$X_G = \frac{2}{3}b$$

$$Y_G = \frac{\int_S \; ydS}{\int_A \; dS} = \frac{\int_0^b \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}x\right)\left(\frac{h}{b}xdx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}xdx}$$

$$Y_G = \frac{1}{3}h$$

2. Centre de gravité – Exemple2

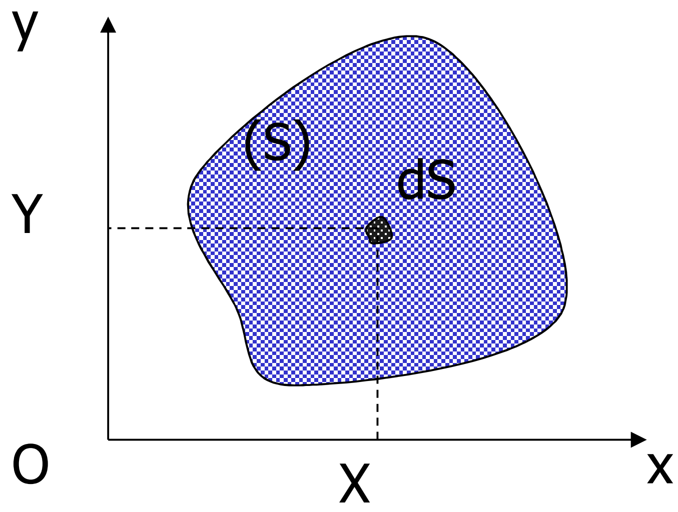
Exemple :



3. Moment statique

Définition : Le moment statique d'une section, par rapport à un axe, est égal au **produit de l'aire** de la section par la **distance** entre son centre de gravité et l 'axe considéré.

Pour un élément dS, de coordonnées X et Y, le moment statique élémentaire **par rapport à l'axe Ox** est, par définition, la quantité :



$$d\mu_x = Y.dS$$

Ce qui donne pour l'ensemble de la section :

$$\mu_x = \iint_S y.dS \qquad \text{soit} \quad \mu_x = S.Y_G$$

De même:

$$\mu_y = \iint_S x.dS \qquad \text{soit} \quad \mu_y = S.X_G$$

3. Moment statique

Remarques :

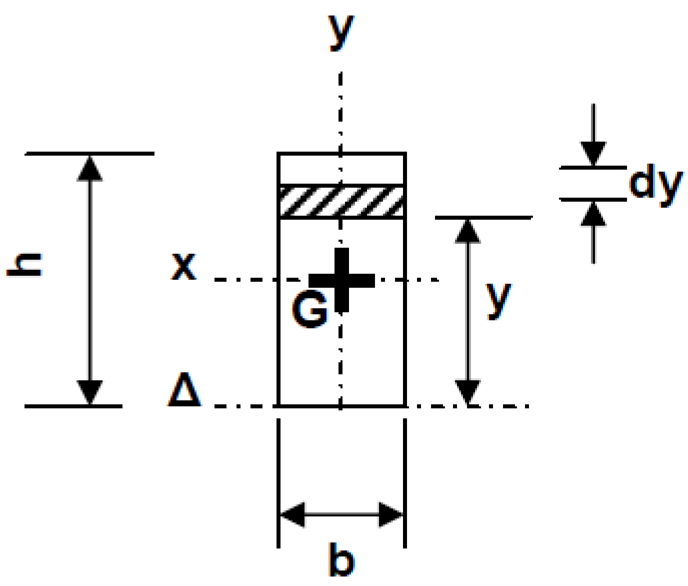
➢ **pour tout axe passant par le centre de gravité, le moment statique par rapport à cet axe est nul.**

➢ **si la section S peut être décomposée en n sous-sections simples, d'aires connues S_i et de C.d.G connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :**

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_x &= \sum_{i=1}^{n}\left(S_i . y_{Gi}\right) \\ \mu_y &= \sum_{i=1}^{n}\left(S_i . x_{Gi}\right)\end{aligned}}$$

3. Moment statique - Exemple

Calculer le moment statique par rapport à l'axe Δ pour le rectangle de la figure suivante.



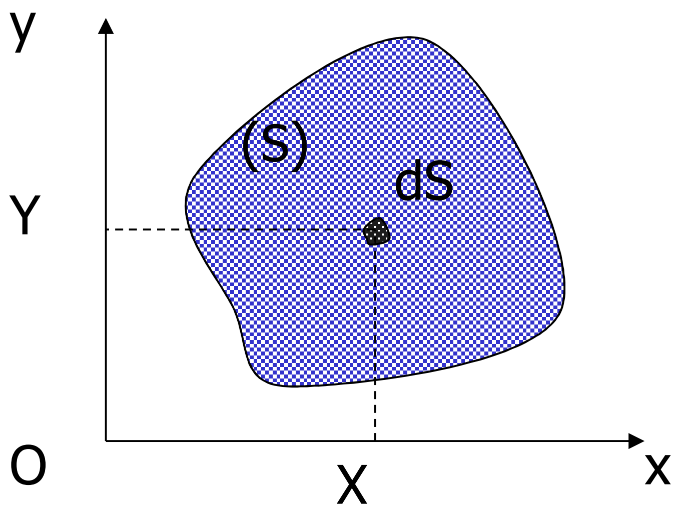
$$S_\Delta = \int_S y dS$$

$$S_\Delta = \int_0^h ybdy = b\left[\frac{1}{2}h^2\right] = \frac{bh^2}{2}$$

4. Moments d'inertie ou quadratiques

4.1 Moment d'inertie par rapport à un axe : Le moment d'inertie d'une section infiniment petite par rapport à un axe éloigné de la surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l 'axe.

Pour un élément dS, de coordonnées X et Y, le moment d'inertie élémentaire **par rapport à l'axe Ox** est, par définition, la quantité :



$$dI_{Ox} = Y^2.dS$$

4. Moments d'inertie ou quadratiques

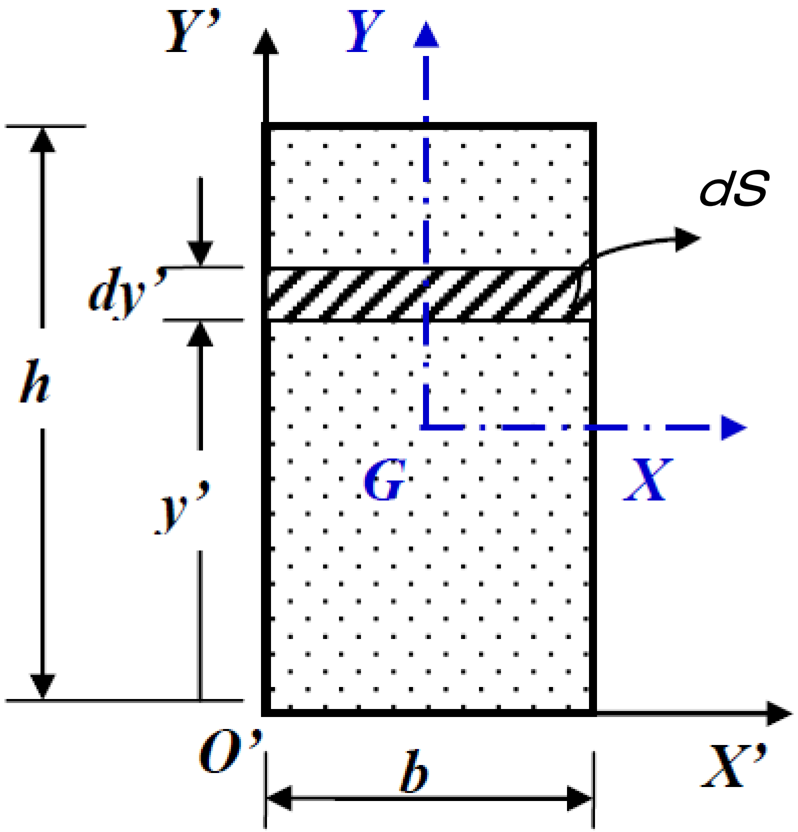
Ce qui donne pour l'ensemble de la section :

$$\boxed{I_{Ox} = \iint_S y^2.dS} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{Oy} = \iint_S x^2.dS}$$

N.B : Le moment d'inertie est toujours positif

4. Moments d'inertie ou quadratiques – Exemple1:

Calculer les moments d'inertie par rapport aux axes O'X' et O'Y' pour le rectangle de la figure suivante.



$$I_{x'} = \int_S y'^2 \, dS$$

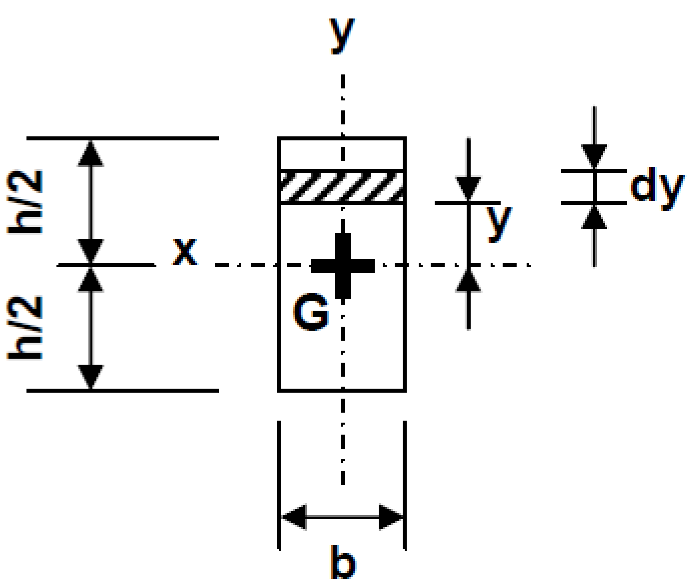
$$I_{x'} = \int_0^H y'^2 \, b dy' = \frac{bh^3}{3}$$

De la même manière :

$$I_{y'} = \int_0^H x'^2 \, h dx' = \frac{hb^3}{3}$$

4. Moments d'inertie ou quadratiques – Exemple2:

Calculer les moments d'inertie par rapport aux axes GX et GY (passant par le C.d.G) pour le rectangle de la figure suivante.



$$I_x = \int_S y^2\, dS$$

$$I_x = \int_{\frac{-H}{2}}^{\frac{+H}{2}} y^2\, b dy \quad = \left[\frac{bh^3}{24} - \frac{-bh^3}{24}\right] = \frac{bh^3}{12}$$

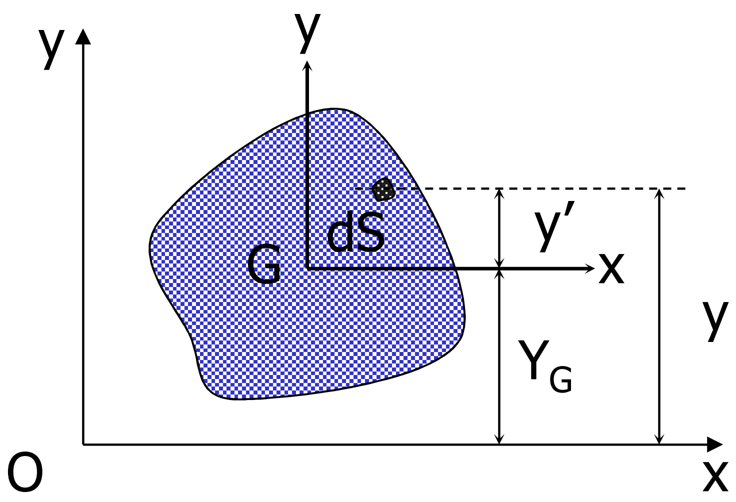
De la même manière:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

4. Moments d'inertie ou quadratiques

4.2 Translation d'axes : Théorème de Huygens

Soit un élément dS de S dans le repère Oxy, et soit le repère Gxy qui passe par le centre de gravité G de S et dont les axes sont parallèles à Ox et Oy.



$$I_{Ox} = \iint_S y^2.dS \qquad \text{avec } y = Y_G + y'$$

Soit : $$I_{Ox} = \iint_S (Y_G{}^2 + 2.Y_G.y' + y'^2).dS$$

Ce qui donne :

$$I_{Ox} = Y_G{}^2.\underbrace{\iint_S dS}_{=S} + 2.Y_G.\underbrace{\iint_S y'dS}_{\text{= moment statique/Gx = 0}} + \iint_S y'^2 dS$$

Finalement, on obtient : $$\boxed{I_{Ox} = I_{Gx} + S.Y_G{}^2}$$

De même : $$\boxed{I_{Oy} = I_{Gy} + S.X_G{}^2}$$

4. Moments d'inertie ou quadratiques

Théorème :

Le moment d'inertie par rapport à un axe est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

Calcul pratique :

Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments quadratiques connus I_{Ox_i} et I_{Oy_i}, alors:

$$\boxed{I_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} I_{Ox_i}} \qquad \boxed{I_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} I_{Oy_i}}$$

4. Moments d'inertie ou quadratiques

Remarque :

Généralement, pour le calcul des contraintes et des déformations, nous avons besoin de connaître le moment d'inertie de la section par rapport à son centre de gravité.

Donc si la section peut être décomposée en n sous-sections S_i de centres de gravité G_i et de moments d'inertie I_{G_ix} ou I_{G_iy} connus:

$$\boxed{I_{Gx} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{G_i x} + S_i.(Y_{Gi} - Y_G)^2 \right)}$$

$$\boxed{I_{Gy} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{G_i y} + S_i.(X_{Gi} - X_G)^2 \right)}$$

4. Moments d’inertie ou quadratiques

4.3 Moment d’inertie par rapport à un couple d’axe

Ce moment d’inertie est aussi appelé **moment produit**.

Pour un élément dS, le moment produit élémentaire par rapport aux axes Ox et Oy est par définition la quantité:

$$dI_{Oxy} = X.Y.dS$$

Ce qui donne pour l’ensemble de la section:

$$I_{Oxy} = \iint_S x.y.dS$$

Théorème de Huygens:

$$\boxed{I_{Oxy} = I_{Gxy} + S.X_G.Y_G}$$

Remarques:

- **Le moment produit est une grandeur algébrique.**
- **Si un des deux axes est un axe de symétrie pour la section alors $I_{Oxy}=0$**

4. Moments d'inertie ou quadratiques

Calculs pratiques :

➢ Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments produits connus I_{Oxyi}, alors:

$$\boxed{I_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} I_{Oxy_i}}$$

➢ Si on cherche le moment produit d'une section par rapport à son centre de gravité et que celle-ci peut être décomposée en n sous-sections de c.d.g. G_i connus et de moments produits par rapport à leur c.d.g. connus $I_{G_i xy}$, alors:

$$\boxed{I_{Gxy} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{G_i xy} + S_i . (X_{Gi} - X_G) . (Y_{Gi} - Y_G) \right)}$$

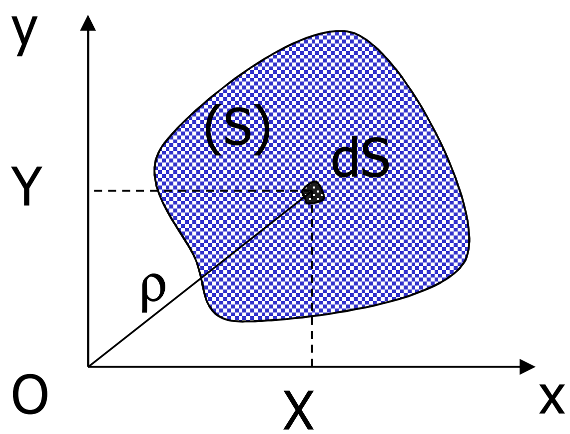
4. Moments quadratiques

4.4 Moment quadratique par rapport à un point

Ce moment quadratique est aussi appelé **moment quadratique (ou d'inertie) polaire**.

Pour un élément dS, à une distance ρ de O,le moment quadratique polaire élémentaire par rapport à ce point est par définition la quantité:

$$dI_o = \rho^2 . dS$$



Ce qui donne pour l'ensemble de la section:

$$\boxed{I_o = \iint_S \rho^2 . dS}$$

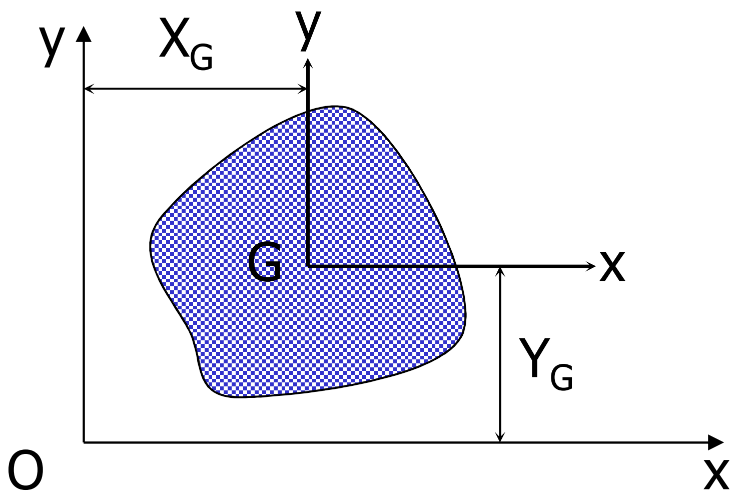
Remarque: on peut écrire $\rho^2 = x^2 + y^2$ soit: $I_o = \iint_S x^2 . dS + \iint_S y^2 . dS$

Finalement, on obtient: $\boxed{I_o = I_{Ox} + I_{Oy}}$

4. Moments quadratiques

4.4 Moment quadratique par rapport à un point

Changement d'origine (Théorème de Huygens)



$$\boxed{I_o = I_{Ox} + I_{Oy}}$$

Soit:

$$I_o = \left(I_{Gx} + S.Y_G{}^2\right) + \left(I_{Gy} + S.X_G{}^2\right)$$

ou:

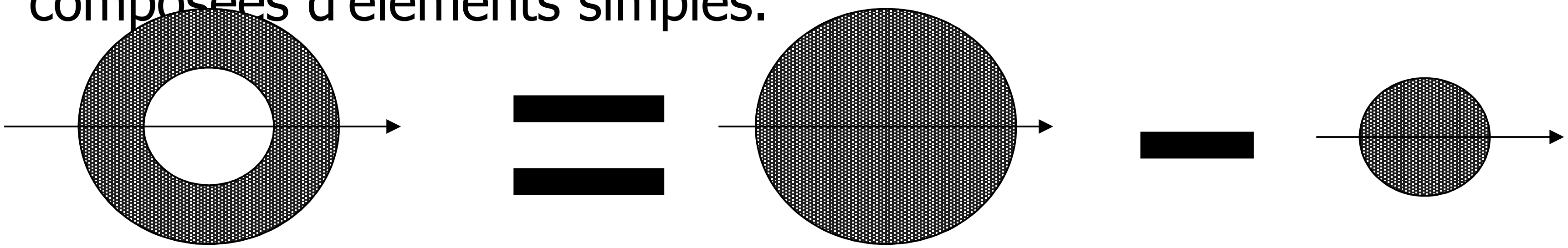
$$I_o = I_{Gx} + I_{Gy} + S.\left(X_G{}^2 + Y_G{}^2\right)$$

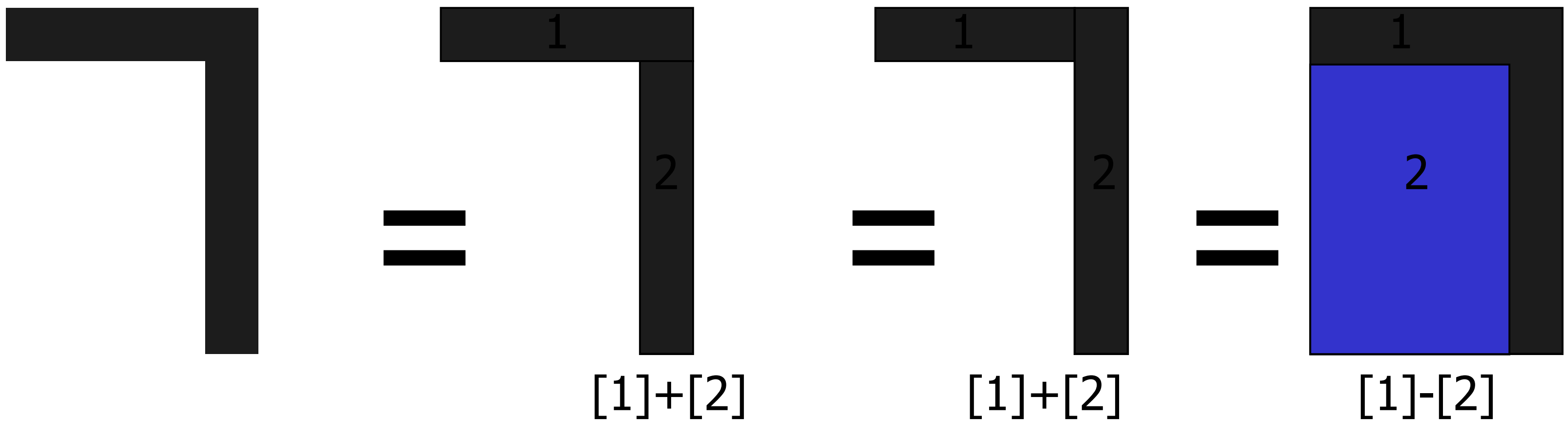
Finalement, on obtient: $\boxed{I_O = I_G + S.(OG)^2}$

4. Moments quadratiques

4.5 Remarques pratiques concernant le calcul des moments quadratiques

Les moments quadratiques s’ajoutent et se retranchent. Cette propriété permet une détermination aisée dans le cas de surfaces composées d’éléments simples.



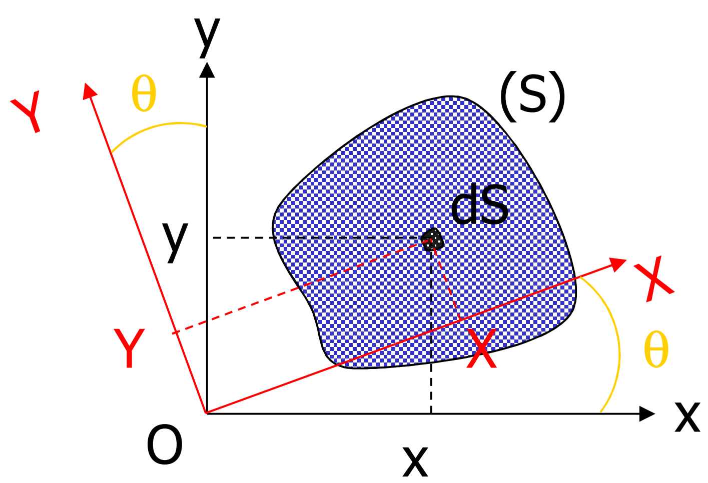


4. Moments quadratiques

4.6 Moments quadratiques d'axes concourants

4.6.1 Rotations d'axes

Soit la section plane S, et deux systèmes d'axes Oxy et OXY obtenu par une rotation d'angle θ.



Les relations liant les coordonnées dans les deux repères sont:

$$X = x.\cos\theta + y.\sin\theta$$
$$Y = -x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

Calculons le moment quadratique / OX :

$$I_{OX} = \iint_S Y^2.dS = \iint_S (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)^2.dS$$

$$I_{OX} = \iint_S (x^2.\sin^2\theta - 2.xy.\sin\theta.\cos\theta + y^2.\cos^2\theta).dS$$

4.6.1 Rotations d'axes

$$I_{OX} = \sin^2\theta \iint_S x^2.dS + \cos^2\theta \iint_S y^2.dS - 2\sin\theta\cos\theta \iint_S xy.dS$$

Ce qui nous donne :

$$I_{OX} = \sin^2\theta.I_{Oy} + \cos^2\theta.I_{Ox} - 2.\sin\theta.\cos\theta.I_{Oxy}$$

En passant à l'angle double :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \sin\theta.\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

On obtient :

$$\boxed{I_{OX} = \frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2} + \frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\cos 2\theta - I_{Oxy}.\sin 2\theta}$$

4. Moments quadratiques

4.6.1 Rotations d'axes

De même, pour le moment quadratique / OY, on obtient :

$$\boxed{I_{OY}=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}-\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\cos 2\theta+I_{Oxy}.\sin 2\theta}$$

Calcul du moment produit :

$$I_{OXY}=\iint_S XY.dS=\iint_S (x.\cos\theta+y.\sin\theta).(-x.\sin\theta+y.\cos\theta).dS$$

$$I_{OXY}=\sin\theta.\cos\theta.\left(\iint_S y^2.dS-\iint_S x^2.dS\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\iint_S x.y.dS$$

Soit :

$$\boxed{I_{OXY}=\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\sin 2\theta+I_{Oxy}.\cos 2\theta}$$

4. Moments quadratiques

4.6.2 Recherche des directions principales

Il s'agit des directions donnant les moments quadratiques extrêmes (maximal et minimal). Pour les trouver , dérivons I_{OX} et I_{OY} / θ et annulons ces dérivées:

$$\frac{dI_{OX}}{d\theta}=-2.\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\sin 2\theta-2.I_{Oxy}.\cos 2\theta=0$$

$$\frac{dI_{OY}}{d\theta}=2.\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\sin 2\theta+2.I_{Oxy}.\cos 2\theta=0$$

Ces deux expressions s'annulent pour :

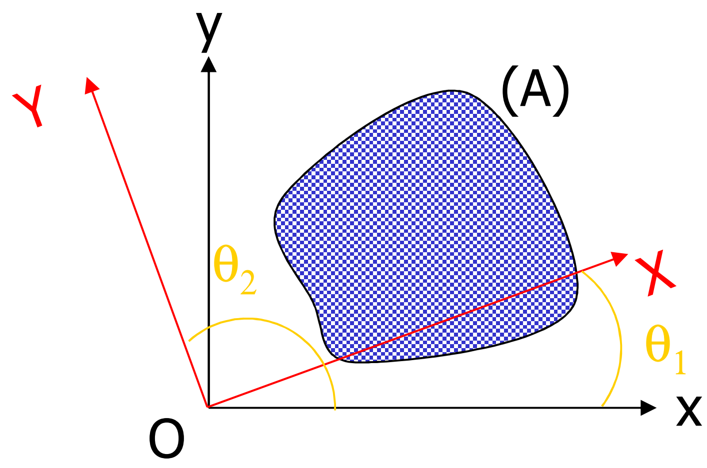
$$\boxed{\tan(2\theta)=\frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox}-I_{Oy}}}$$

4.6.2 Recherche des directions principales

Cette expression nous donne deux directions conjuguées définies par les angles: $\boxed{\theta_1 \text{ et } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}}$

Les directions ainsi déterminées s'appellent les **directions principales** (ou **axes principaux**), elles sont orthogonales et définies par la relation:

$$\boxed{\tan(2\theta) = \frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox} - I_{Oy}}}$$



Remarques:

- Pour les directions principales, I_{OXY} est nul.
- Tout axe de symétrie, est axe principal d'inertie.
- Tout axe perpendiculaire à un axe de symétrie est également axe principal d'inertie.

4.6.3 Expression des moments quadratiques principaux

Pour connaître les expressions des moments quadratiques principaux (I_{maxi} et I_{mini}), il suffit de remplacer, dans les formules donnant I_{OX}, I_{OY} et I_{OXY}, la valeur de θ par les solutions de l'équation:

$$\tan(2\theta)=\frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox}-I_{Oy}}$$

On obtient ainsi:

$$I_{maxi}=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I^2_{Oxy}}$$

$$I_{mini}=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I^2_{Oxy}}$$

4.6.4 Représentation graphique – Cercle de Mohr

Reprenons les expressions donnant I_{OX} et I_{OXY}

$$I_{OX}-\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}=\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\cos 2\theta-I_{Oxy}.\sin 2\theta$$

$$I_{OXY}=\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\sin 2\theta+I_{Oxy}.\cos 2\theta$$

Effectuons la somme des carrés, on obtient:

$$\left(I_{OX}-\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{OXY}{}^2=\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{Oxy}{}^2$$

Ce qui correspond à l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R

$$x_c=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2} \quad \text{et} \quad R=\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{Oxy}{}^2}$$

4.6.4 Représentation graphique – Cercle de Mohr

$$x_c = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2}\right)^2 + I_{Oxy}{}^2}$$