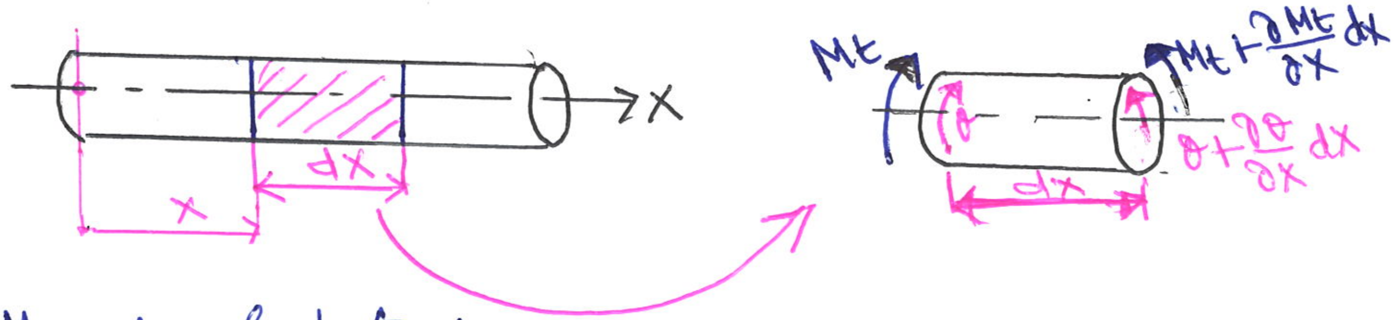
Vibration de torsion des arbres.

Soit un arbre en M^{vt} de torsion ; pour étudier son mouvement, en prenant un élément de longueur :



M_t : Couple de torsion.
θ : Angle de torsion (Déplacement angulaire).
J_0 : Inertie de masse par unité de longueur.
J_p : Moment d'inertie polaire

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{M} = J_0 \ddot{\vec{\theta}} \Rightarrow J_0 dx \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t = \frac{\partial M_t}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow J_0 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial M_t}{\partial x} \quad ; \quad \boxed{M_t = G J_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}}$$

$$\Rightarrow J_0 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[G J_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = G J_p \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}}$$

Dans le cas des sections droites circulaires $\boxed{J_0 = \rho J_p}$

par la méthode de séparation des variables :

$$\theta(x,t) = \theta(x) \cdot f(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + \omega^2 f(t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{J_0}{G J_p} \theta(x) = 0 \end{cases}$$

les solutions de ces 2 éq^ts différentielles sont :

$$f(t) = A\sin wt + B\cos wt$$

$$\theta(x) = C\sin\left(w\sqrt{\frac{J_0}{GJ_p}}\,x\right) + D\cos\left(w\sqrt{\frac{J_0}{GJ_p}}\,x\right)$$

Dans le cas des sections droites circulaires.

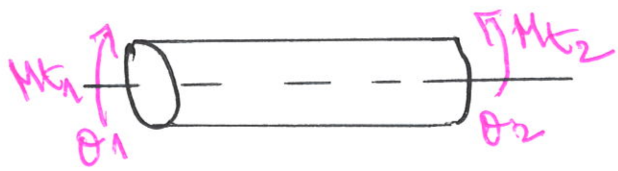
$$\boxed{\theta(x,t) = (A\sin wt + B\cos wt)\cdot\left[C\sin w\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,x + D\cos w\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,x\right]}$$

- les Conditions aux limites les plus utilisées :
  1) Extrémité encastrée $\rightarrow \theta = 0$.
  2) Extrémité libre $\rightarrow M_t = 0$. (la m̂ chose pour le cas appuyé).
  3) Extremité liée à un ressort $\rightarrow M_t = -K\theta$
  4) Disque de moment d'inertie I_d à une extrémité $\rightarrow M_t = I_d W^2 \theta(x)$

- Matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ M_{t2}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{GJ_p\alpha}\\ -GJ_p\alpha\sin\alpha L & \cos\alpha L\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ M_{t1}\end{pmatrix}$$

avec $\alpha = w\sqrt{\frac{\rho}{G}}$



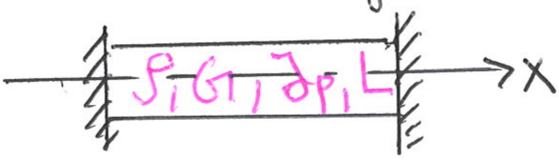
$$\theta(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x \quad \rightarrow \quad \theta(0) = \theta_1,\ \theta(L) = \theta_2$$

$$M_t(x) = GJ_p\alpha\left[C\cos\alpha x - D\sin\alpha x\right] \quad \rightarrow \quad M_t(0) = M_{t1},\ M_t(L) = M_{t2}$$

Remarque : vous pouvez appliquer cette méthode (MMT) si vous avez plus qu'un élément.

Exemples

- Déterminer les pulsations propres d'un arbre bi-encastré (E–E) en Mouvement de Torsion. En supposant que les propriétés mécaniques et géométriques sont connues.



On a $\theta(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x$ avec $\alpha = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}$

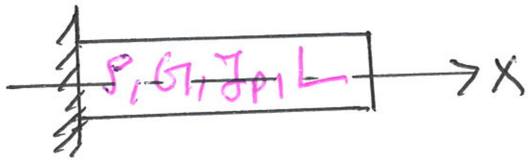
$$\text{C.L :} \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ C\sin\alpha L = 0 \Rightarrow \sin\alpha L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$

- La même question est posée pour un arbre encastré-libre (E–L).

$$M_t(x) = GJ_p \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$$



$\theta(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x$ avec $\alpha = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}$

$$\text{C.L :} \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ M_t(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ GJ_p\alpha C\cos\alpha L = 0 \Rightarrow \cos\alpha L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha L = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{2n+1}{2L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$

- Deuxième cas par MMT (c-à-d le cas E–L).

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ M_{t2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \frac{\sin\alpha L}{GJ_p\alpha} \\ -GJ_p\alpha\sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ M_{t1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

$$\text{C.L :} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha L & \frac{\sin\alpha L}{GJ_p\alpha} \\ -GJ_p\alpha\sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_{t1} \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \cos\alpha L \cdot M_{t1}$$

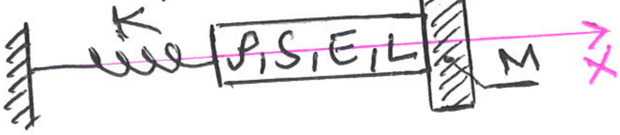
$$\Rightarrow \cos\alpha L = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{2n+1}{2L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$

EXERCICE (M^{vt} longitudinal)

Soit une poutre en M^{vt} longitudinal donnée par la figure ci-dessous, elle a une extrémité attachée à un ressort de raideur K et porte à l'autre extrémité une Masse M.

- Déterminer analytiquement l'expression qui permet de calculer les pulsations propres de cette poutre en M^{vt} longitudinal. Sachant que les paramètres mécaniques et géométriques E, ρ, S et L de la poutre sont connus avec $K = ES/L$.



Solution

Soit le déplacement longitudinal :

$$U(X) = C\sin\alpha X + D\cos\alpha X \quad \text{avec } \alpha = W\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

à $X=0$: $\begin{cases} U(0) = D \\ F(0) = ES\left.\dfrac{\partial U(X)}{\partial X}\right|_{X=0} = K\,U(0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(0) = D \\ ES\alpha\left[C\cos\alpha X - D\sin\alpha X\right]_{X=0} = K\,U(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(0) = D \\ ES\alpha C = KD \quad (1) \end{cases}$$

à $X=L$: $\begin{cases} U(L) = C\sin\alpha L + D\cos\alpha L \\ F(L) = ES\alpha\left[C\cos\alpha L - D\sin\alpha L\right] = MW^2 U(L) \quad (2) \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow ES\alpha\left[C\cos\alpha L - D\sin\alpha L\right] - MW^2\left[C\sin\alpha L + D\cos\alpha L\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[ES\alpha\cos\alpha L - MW^2\sin\alpha L\right]C + \left[-MW^2\cos\alpha L - ES\alpha\sin\alpha L\right]D = 0 \quad (3)$$

(1) et (3) sous-forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} ES\alpha & -K \\ (ES\alpha\cos\alpha L - MW^2\sin\alpha L) & -(ES\alpha\sin\alpha L + MW^2\cos\alpha L) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si $(C, D) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$-ES\alpha\left[ES\alpha\sin\alpha L + MW^2\cos\alpha L\right] + \frac{ES}{L}\left[ES\alpha\cos\alpha L - MW^2\sin\alpha L\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\alpha LMW^2\cos\alpha L - \alpha^2 ESL\sin\alpha L + ES\alpha\cos\alpha L - MW^2\sin\alpha L = 0$$

$$\Rightarrow -\alpha LMW^2 - \alpha^2 ESL\,\mathrm{tg}\,\alpha L + ES\alpha - MW^2\,\mathrm{tg}\,\alpha L = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha L = \frac{ES\alpha - \alpha LMW^2}{MW^2 + \alpha^2 ES\cancel{L}} \Rightarrow \boxed{\alpha L = \mathrm{arctg}\left[\frac{ES\alpha - \alpha LMW^2}{\alpha^2 ES\cancel{L} + MW^2}\right]}$$