

Cours no 10
Le 11 mai 2012

Mathématiques appliquées et numériques

Licence 3, Dpt Géosciences
Année 2011-2012, 2e semestre

Présentation synthétique du cours

Janvier – Juin 2012

Cours donné en 3^e année de
Licence de Sciences de la planète Terre
par Michael Ghil et Jean Roux
TD par Mohamadou Diallo
École normale supérieure, Paris

Dixième cours

Équations différentielles scalaires non linéaires. Bifurcations de points fixes. Bifurcation de Hopf.

Dans le cours 6 nous avons étudié le comportement des systèmes d'EDO scalaires non linéaires au voisinage de leurs points fixes. Ce comportement est lié au spectre du linéarisé de ces systèmes aux points critiques considérés. La notion de stabilité a été introduite et elle a permis un classement du type de point critique auquel on a affaire (noeud, centre, point col, foyer). Dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques on appelle *bifurcation* un changement qualitatif dans la dynamique du système, comme la perte d'unicité ou de la stabilité d'une solution, lorsqu'un paramètre du système varie. C'est un phénomène fréquent et important en sciences de la planète et de la vie, qui a lieu dès que des rétroactions non linéaires sont présentes. Ce cours traitant des bifurcations ne constitue qu'une introduction au sujet : nous présenterons rapidement et simplement quelques notions clefs de ces phénomènes. Ce dixième cours est très lié au cours 6, dont il utilise les définitions et méthodes associées à la stabilité des points fixes.

10.1 Bifurcations de solutions stationnaires

Il s'agit d'étudier comment le nombre de points fixes, ainsi que leurs propriétés de stabilité, peuvent changer en fonction de la valeur d'un ou des paramètres. Pour cela il suffit d'étudier un certain nombre de formes canoniques.

10.1.1 Bifurcations de col

L'exemple le plus simple est :

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

La méthode d'étude présentée au paragraphe 6.4.1 en dimension deux, permet aussi d'étudier ce système en dimension un :

1. *Recherche des points critiques.* Si $\mu - x^2 = 0$ alors $x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$, ce qui donne deux points critiques pour $\mu > 0$, un seul ($x = 0$) pour $\mu = 0$ et pas de point critique pour $\mu < 0$. On a donc un point de bifurcation en $(x = 0, \mu = 0)$, puisque subitement en ce point le problème passe d'une absence d'équilibres à deux équilibres lorsque μ traverse la valeur zéro dans le sens des μ croissants.

2. *Stabilité des points critiques.* Pour étudier la stabilité des solutions on va de nouveau faire une approximation du premier ordre autour des points critiques. Pour l'équilibre x_+ nous aurons

$$\overline{(x_+ + \xi)} = \mu - (x_+ + \xi)^2,$$

ce qui donne, en substituant la valeur de x_+ et négligeant les termes d'ordre $O(\xi^2)$ (on rappelle que la notation de Landau O a été définie au paragraphe 5.4.3),

$$\dot{\xi} = -2\sqrt{\mu}\xi.$$

Par la Définition 6.4.1 de la stabilité, le point x_+ est stable car $\xi(t) = \xi_0 e^{-2\sqrt{\mu}t} \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$, où $\xi_0 = x_0 - x_+$ avec $x_0 = x(0)$. Il est clair que x_+ , par la définition 6.4.2, est même asymptotiquement stable. Le même procédé appliqué à x_- montre immédiatement qu'il est instable.

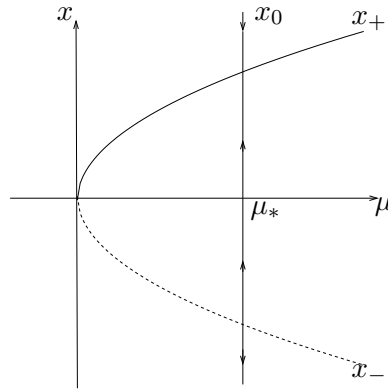


Figure 10.1: Points critiques x_- et x_+ en fonction du paramètre μ . La branche $x_+ = \sqrt{\mu}$ est stable et tracée en continu, l'autre est instable et tracée en pointillés. Pour une valeur particulière μ_* de μ , des flèches montrent la direction de déplacement de x , déterminée par le signe de \dot{x} .

Les points $x = x(\mu)$ entre deux points de bifurcation – ou alors entre un point de bifurcation et, selon les cas, $\pm\infty$ –, forment une *branche de solutions*. La Figure 10.1 montre les branches stable et instable pour ce système. La convention habituelle est de tracer la branche stable en continu et l'instable en pointillés.

On peut se poser la question de savoir si la stabilité de x_+ est *globale*, c'est-à-dire si x_+ est approché asymptotiquement lorsque $t \rightarrow \infty$ pour toute condition initiale x_0 . En clair peut-on toujours négliger les termes en ξ^2 dans l'analyse ci-dessus ? Reportons-nous aux équations (6.4.4). Elles s'écrivent sous la forme linéarisé (6.4.5) seulement si ξ et η sont suffisamment petits pour négliger les termes du second ordre dans (6.4.4). Il est évident que,

pour une équation différentielle scalaire - à une variable - le terme du second ordre est en $\xi^2 f_{xx}(x_c)$. Dans le cas présent où $f(x, \mu) = \mu - x^2$, on a $f_x(x_c) = -2\sqrt{\mu}$ et $f_{xx}(x_c) = -2$; si bien que l'équation linéarisée (6.4.4) s'écrit

$$\dot{\xi} = -2\sqrt{\mu}\xi + \xi^2(-2) + O(\xi^3). \quad (10.1.1)$$

Partons, par exemple, d'une condition initiale x_0 telle que $x_0 = -\sqrt{\mu} + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit. La perturbation associée est $\xi = x_0 - x_c = -2\sqrt{\mu} + \varepsilon$. Les termes $\sqrt{\mu}\xi = -2\mu + \varepsilon\sqrt{\mu}$ et $\xi^2 = 4\mu - 4\varepsilon\sqrt{\mu} + \varepsilon^2$ dans (10.1.1) sont du même ordre de grandeur en module, la linéarisation précédente est illicite.

Peut-on cependant en dire plus dans ce cas simple ? Remarquons que :

- $\dot{x} < 0$ pour $x > \sqrt{\mu}$, x décroît si l'on part d'un x_0 tel $x_0 > \sqrt{\mu}$,
- $\dot{x} > 0$ pour $-\sqrt{\mu} < x < \sqrt{\mu}$, x croît si l'on part d'un x_0 tel que $-\sqrt{\mu} < x_0 < \sqrt{\mu}$,
- $\dot{x} < 0$ pour $x < -\sqrt{\mu}$, x décroît si l'on part d'un x_0 tel que $x_0 < -\sqrt{\mu}$.

Ce comportement de la solution est indiqué à la figure 10.1.

Cette analyse élémentaire permet de définir le *bassin d'attraction* de x_+ qui est montré à la Figure 10.2, en traçant $y = \dot{x}$ en fonction de x pour $\mu_0 > 0$ donné. On constate sur cette figure que le bassin d'attraction dépend de la valeur du paramètre μ_0 . Nous n'avons pas de stabilité globale du point fixe x_+ .

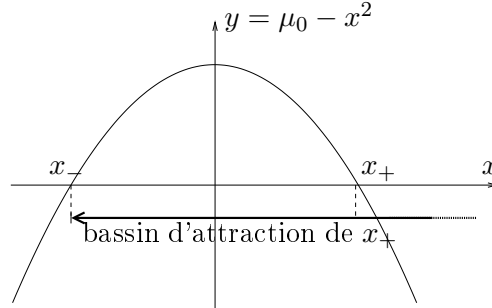


Figure 10.2: Illustration du bassin d'attraction $]x_-, +\infty[$ de x_+ , montrant $y = \dot{x}$ en fonction de x , pour $\mu = \mu_0 > 0$ donné.

On comprend que, pour des cas plus compliqués, il est difficile de vérifier, à supposer qu'elle existe, la stabilité globale d'un point fixe. La stabilité globale est peu fréquente. La majorité des résultats de stabilité sont locaux. Lorsqu'il existe plusieurs points fixes et paramètres, il existe des méthodes numériques - et logiciels - de calcul des différents bassins d'attraction qui peuvent avoir des géométries très enchevêtrées dépendantes des valeurs des paramètres.

Le point $(x = 0, \mu = 0)$ est donc un point de bifurcation. C'est une bifurcation de point fixe de type *col*, dite aussi bifurcation de type *selle-nœud* : en ce point apparaissent, lorsque μ passe par zéro, deux branches d'équilibres dont l'une est constituée de points fixes stables - indiqués par des petits cercles pleins - et l'autre de points fixes instables - indiqués par des petits cercles vides. On ne peut plus décider de la stabilité du point fixe $x = 0$ indiqué par des demi-lunes pleine et vide (voir Figure 10.3).

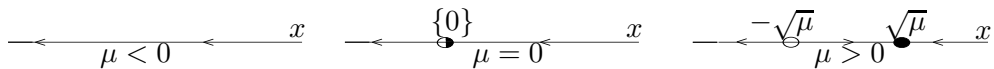


Figure 10.3: Stabilité des points fixes en fonction de r .

Exercice : Faire une analyse similaire pour l'équation $\dot{x} = \mu + x^2, \mu \in \mathbb{R}$.
□

Pour caractériser plus précisément une bifurcation, on réécrit la fonction f d'évolution de x avec le paramètre μ considéré comme un argument de façon explicite. Pour un point critique, on a

$$f(x, \mu) = 0. \quad (10.1.2)$$

L'équation (10.1.2) définit, dans certaines conditions données par le théorème des fonctions implicites, une branche de solutions $x = g(\mu)$. La dérivée de la fonction $g(\mu)$ se calcule en écrivant la différentielle totale, qui est nulle :

$$f_x dx + f_\mu d\mu = 0,$$

ce qui donne :

$$g_\mu = \frac{dx}{d\mu} = -\frac{f_\mu}{f_x}.$$

Notons que si $f_x \neq 0$, il est possible de continuer la branche stationnaire par variation de μ , en écrivant $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$ et

$$x \simeq x_0 + \frac{dx}{d\mu} \Delta\mu.$$

Si la solution est connue en x_0 pour la valeur μ_0 , elle le sera encore pour la valeur $\mu_0 + \Delta\mu$ du paramètre. C'est le principe de la *méthode de continuation* pour déterminer une branche entière de solutions $x = g(\mu)$ à partir d'un point (x_0, μ_0) .

On remarque, sur l'exemple précédent, qu'au point de bifurcation on a $f_x = 0$ et une hypothèse clef du théorème des fonctions implicites – à savoir, justement, que $f_x \neq 0$ –, n'est pas respectée : de ce fait, la tangente de la branche est verticale au point de bifurcation, et on ne peut donc pas continuer le calcul de la branche par cette technique d'incrémentation du paramètre μ . C'est la raison pour laquelle dans la pratique numérique, si

l'on veut continuer le calcul des solutions de la branche, on choisit comme paramètre de continuation non pas le paramètre μ lui-même, mais l'abscisse curviligne s de la branche des solutions, en considérant alors que μ dépend de s et en définissant $ds^2 = dx^2 + d\mu^2$. C'est un aspect important des méthodes de continuation numériques.

À plusieurs dimensions, $n \geq 3$, la condition qui correspond à $f_x = 0$ est donnée par

$$\det J(x_0, \mu_0) = 0,$$

où J est le jacobien de f en x_0 pour la valeur μ_0 du paramètre.

Remarque 10.1.1. *En général, dans les applications, il y a beaucoup plus de variables d'état que de paramètres*

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}; \vec{\mu}),$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^p$ et $p \ll m$.

10.1.2 Points de bifurcation fourche

Point de bifurcation fourche sur-critique. Considérons maintenant la forme canonique, appelée aussi *forme normale* de bifurcation donnée par

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Elle possède, pour tout μ , l'équilibre trivial $x = 0$ et, pour $\mu > 0$, deux autres équilibres non triviaux $x = \pm\sqrt{\mu}$. On a un point de bifurcation au point $(\mu, x) = (0, 0)$ (voir Figure 10.4).

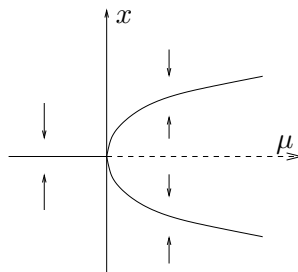


Figure 10.4: Bifurcation de fourche ; les solutions stables sont en traits pleins, celle instable en tirets épaissis. L'origine est un point de bifurcation fourche sur-critique.

L'analyse de la stabilité est facile dans ces cas simples et les raisonnements sont très répétitifs. Étudions d'abord la stabilité de la branche de solutions nulles.

Soit $\mu < 0$, d'une part si $x > 0$ alors $\mu - x^2 < 0$ donc $\dot{x} < 0$ et x décroît, d'autre part si $x < 0$ alors $\mu - x^2 < 0$ donc $\dot{x} > 0$ et x croît. L'équilibre trivial $x = 0$ est donc stable pour tout $\mu < 0$. On voit que le terme en $-x^3$ joue le rôle d'une force de rappel vers l'origine, il est stabilisant lorsque $\mu < 0$.

Soit maintenant $\mu > 0$, de même on voit immédiatement que si $x > 0$ est tel que $x < \sqrt{\mu}$ alors $\dot{x} > 0$ et x croît. De même si $x < 0$ est tel que $x > -\sqrt{\mu}$ alors $\dot{x} < 0$ et x décroît.

L'équilibre trivial $x = 0$ est donc instable pour tout $\mu > 0$. On voit que pour $\mu > 0$, le terme en $-x^3$ est déstabilisant pour l'origine.

Finalement considérons la branche $x = \sqrt{\mu}$ qui n'existe que si $\mu > 0$. Si $x > \sqrt{\mu}$ alors $\dot{x} < 0$ et x décroît. On sait déjà que si $0 < x < \sqrt{\mu}$ alors x croît. L'équilibre $x = \sqrt{\mu}$ est stable.

L'examen de la stabilité de la branche $x = -\sqrt{\mu}$ est laissé en exercice.

On constate qu'il y a perte de stabilité de la solution triviale au point de bifurcation avec échange de celle-ci au profit des branches non triviales.

Point de bifurcation fourche sous-critique Considérons l'équation élémentaire

$$\dot{x} = \mu x + x^3 = x(\mu + x^2), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Elle possède l'équilibre trivial $x = 0$ et, pour $\mu < 0$, deux équilibres non triviaux $x = \pm\sqrt{-\mu}$. On a un point de bifurcation au point $(\mu, x) = (0, 0)$ (voir Figure 10.5).

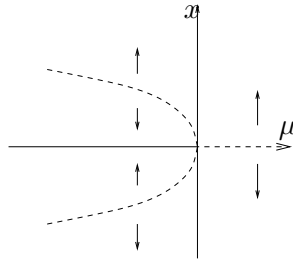


Figure 10.5: Les solutions stables (resp. instables) sont en traits pleins (resp. tirets) épais. L'origine est un point de bifurcation fourche sous-critique.

Étudions uniquement la stabilité de la branche $x = -\sqrt{-\mu}$ qui existe pour $\mu \leq 0$. Si $x < -\sqrt{-\mu}$ alors $\mu + x^2 > 0$, $\dot{x} < 0$ et x décroît. Si $-\sqrt{-\mu} < x < 0$ alors $\mu + x^2 < 0$, $\dot{x} > 0$ et x croît. La branche $x = -\sqrt{-\mu}$ est donc instable comme on l'indique à la Figure 10.5. On constate que le terme en x^3 est déstabilisant pour la solution nulle dès que $\mu > 0$.

On voit qu'il y a à nouveau une perte de stabilité de la solution triviale au point de bifurcation, mais contrairement au cas précédent il n'y a pas échange de stabilité car les branches non triviales sont dans le demi-plan $\mu < 0$. La

stabilité de toute solution est perdue lorsque le paramètre franchit le point de bifurcation en croissant.

10.2 Solutions périodiques et leur stabilité

Jusqu'ici, nous avons étudié les solutions stationnaires, leur stabilité et les bifurcations qui les concernent. Dans cette section et la suivante, nous nous concentrerons sur les solutions périodiques et les bifurcations qui mènent d'une solution stationnaire à une solution périodique (section 10.3).

10.2.1 Définitions d'une solution périodique et de sa stabilité

Soit toujours le système (6.4.1) où $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, on a la définition suivante d'une solution périodique.

Définition 10.2.1. *On dit que le système (6.4.1) a une solution périodique X de période $T > 0$, si $X(t + T) = X(t)$ pour tout t .*

La solution X périodique est représentée, dans l'espace de phase, par une courbe fermée.

La définition d'une solution périodique Lyapounov stable, ou simplement stable, consiste simplement à remplacer X_c par $X(t)$ dans la Définition 6.4.1 de la stabilité d'un point critique. Soit \tilde{X} une autre solution de (6.4.1) satisfaisant à la condition initiale \tilde{X}_0 . On a :

Définition 10.2.2. *Une solution périodique X est dite stable au sens de Lyapounov si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon)$ tel que $\|\tilde{X}_0 - X_0\| < \delta \implies \|\tilde{X}(t) - X(t)\| < \epsilon$ pour tout $t > 0$.*

10.3 Bifurcations de Hopf

Soit l'équation $\dot{y} = f(y, \mu)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ (on prend un seul paramètre pour simplifier), y et f sont un vecteur et une fonction à n composantes. Considérons les états stationnaires ou d'équilibres caractérisés par l'équation $0 = f(y, \mu)$. Une bifurcation des états stationnaires est définie par un point d'intersection de branches de points d'équilibre. Les solutions stationnaires sont sans "vie", les solutions bifurquées n'ont pas plus de dynamisme que les premières. Par contre, le type de bifurcation qui connecte les équilibres avec les mouvements périodiques est la bifurcation de Hopf. Les mouvements périodiques même s'ils sont dynamiques sont encore les manifestations d'un certain ordre. Donnons un exemple simple d'un point de bifurcation de Hopf. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + (\mu - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} &= x + (\mu - x^2 - y^2)y \end{cases} \quad (10.3.1)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Passons en coordonnées polaires, soit $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Il vient :

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta + (\mu - r^2)r \cos \theta,$$

et

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta + (\mu - r^2)r \sin \theta.$$

Multiplions la première équation par $\cos \theta$ et la deuxième par $\sin \theta$ et additionnons les deux équations obtenues. Il vient :

$$\dot{r} = (\mu - r^2)r. \quad (10.3.2)$$

De même, multiplions la première équation par $\sin \theta$ et la deuxième par $\cos \theta$ et additionnons les deux équations obtenues. Il vient :

$$\dot{\theta} = 1. \quad (10.3.3)$$

En coordonnées polaires, le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}. \quad (10.3.4)$$

Étudions les équilibres, et la stabilité de ceux-ci, de (10.3.4). Nous avons un équilibre pour $r = 0$ (ce qui donne l'équilibre $x = y = 0$ pour tout μ). Soit une perturbation de l'origine dans les coordonnées polaires, qui correspond à un $r > 0$. Notons directement que cet équilibre est stable pour $\mu < 0$, car alors $\mu - r^2 < 0$ et comme $r > 0$ on a $\dot{r} < 0$, le rayon tend vers zéro et le point fixe $r = 0$ (à savoir $x = y = 0$) est stable. Par contre lorsque $\mu > 0$, la solution stationnaire nulle devient instable si $r < \sqrt{\mu}$, alors que $r = \sqrt{\mu}$ devient solution de la première équation de (10.3.4). Comme $\dot{\theta} = 1$ on a $\theta(t) = t + \theta_0$. La solution $(x(t), y(t)) = (\sqrt{\mu} \cos(t + \theta_0), \sqrt{\mu} \sin(t + \theta_0))$ est évidemment périodique de période 2π . Le cercle fermé de rayon $\sqrt{\mu}$ est le portrait de phase de la solution dans le plan de phase. Par conséquent pour $\mu > 0$, la solution non stationnaire du système correspond à une orbite périodique de période 2π , d'amplitude finie $r > 0$ qui croît comme $\sqrt{\mu}$.

Puisque $\dot{r} < 0$ pour $r > \sqrt{\mu}$ et $\dot{r} > 0$ pour $r < \sqrt{\mu}$, l'orbite périodique est stable, c'est un cycle limite stable ou **attractif** représenté à la Figure 10.6.

Soit le système (10.3.1), la stabilité de l'origine ($x = y = 0$) se fait par l'étude des valeurs propres de la matrice jacobienne à l'origine (cours 6, sous-paragraphe 6.4.1, paragraphe 6.5). Soit $f(x, y) = -y + (\mu - x^2 - y^2)x$ et $g(x, y) = x + (\mu - x^2 - y^2)y$, avec les notations du cours 6, il vient :

$$J_c = \begin{pmatrix} f_x^c & f_y^c \\ g_x^c & g_y^c \end{pmatrix},$$

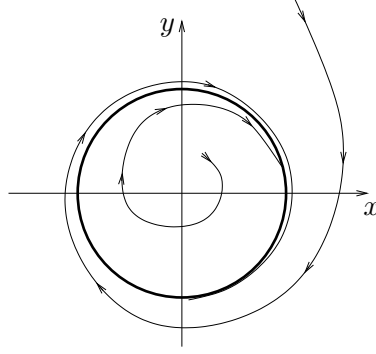


Figure 10.6: Cycle limite.

avec $f_x = (\mu - x^2 - y^2) + (-2x)x$, $f_y = -1 - 2yx$, $g_x = 1 - 2xy$ et $g_y = (\mu - x^2 - y^2) + (-2y)y$. Avec $x_c = y_c = 0$, on a :

$$J_c = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres λ de cette jacobienne sont $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$. On constate que, lorsque $\mu = \mu_0 = 0$, valeur pour laquelle naît une orbite périodique dans le sens des valeurs croissantes de μ , nous avons une paire $\pm i$ de valeurs propres imaginaires pures.

De plus on vérifie immédiatement que $(d(\operatorname{Re}\lambda(\mu))/d\mu)|_{\mu=\mu_0} = 1$ et cette dérivée est non nulle (dans le présent exemple elle est même égale à un quel que soit μ).

Ces phénomènes caractérisent une bifurcation de Hopf. Ici, pour le système que nous considérons, on dit qu'une bifurcation de Hopf apparaît au point $(0, 0)$ pour la valeur $\mu = \mu_0 = 0$ du paramètre. Un point de bifurcation de Hopf est à entendre pour des triplets de valeurs (x_0, y_0, μ_0) . La Figure 10.7 résume la situation.

Une bifurcation de Hopf est caractérisée par le théorème suivant que nous énonçons, pour simplifier, en dimension deux.

Théorème 10.3.1. *Soit l'équation $\dot{y} = f(y, \mu)$ dépendant du paramètre μ . Considérons une solution stationnaire y_0 de f et une valeur du paramètre μ_0 telles que*

- 1) $f(y_0, \mu_0) = 0$ (car y_0 est une solution stationnaire),
- 2) $f_y(y_0, \mu_0)$ a une paire de valeurs propres imaginaires pures, soit $\lambda_{\pm}(\mu_0) = \pm i\beta(\mu_0)$,
- 3) $(d(\operatorname{Re}\lambda(\mu))/d\mu)|_{\mu=\mu_0} = \alpha \neq 0$.

Alors il y a en (y_0, μ_0) naissance de cycles limites. La période initiale (de l'oscillation d'amplitude nulle) est $T_0 = 2\pi/\beta(\mu_0)$.

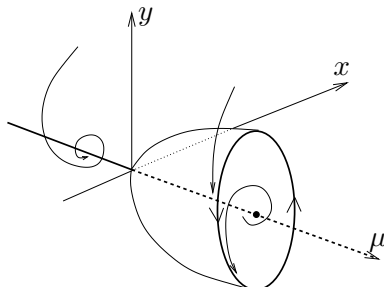


Figure 10.7: L'origine est le point de bifurcation de Hopf. La ligne de tirets indique la solution stationnaire instable. Les lignes en traits pleins très épais marquent les solutions stables. La figure indique l'enveloppe des amplitudes des cycles limites qui sont des cercles dont le rayon croît comme $\sqrt{\mu}$.

Preuve : Elle est admise. \square

Remarque 10.3.1. *Précisons ici un problème de terminologie. Un cycle limite Γ est une orbite fermée (donc périodique) isolée. L'adjectif "isolé" signifie que les orbites voisines ne sont pas fermées et qu'elles tournent autour de Γ soit en s'en écartant soit en s'en approchant. Si toutes les orbites voisines approchent le cycle limite celui-ci est dit stable ou attractif. Si elles s'en écartent le cycle limite est dit instable ou répulsif. Notons que le Théorème 10.3.1 ne dit rien sur la stabilité du cycle limite.*

Remarque 10.3.2. *Le système (10.3.4), que nous avons pris pour introduire la bifurcation de Hopf, est l'exemple prototypique d'un système possédant un point de bifurcation de Hopf sur-critique. Il existe un autre type de point de bifurcation de Hopf dit sous-critique (voir livre).*

Exercice : Étudier le système suivant, écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{y} &= \omega + br^2 \end{cases} . \quad (10.3.5)$$

où μ , ω et b sont des réels. C'est le système prototypique d'une bifurcation de Hopf sous-critique. \square

Remarque 10.3.3. *Dans l'exemple (10.3.4) on a vu que $\beta(\mu) = 1$ quel que soit μ et on sait aussi que la période de toutes les solutions périodiques est égale à 2π quel que soit μ . Ceci est conforme à l'assertion du Théorème 10.3.1 qui indique que la période initiale (pour $\mu = \mu_0 = 0$) du cycle limite est égale à $T_0 = 2\pi/\beta(\mu_0)$.*

Ce théorème caractérisant une bifurcation de Hopf peut être interprété comme une définition de celle-ci. L'hypothèse 3) est une hypothèse dite

de *transversalité*, elle est usuellement satisfaite. La Figure 10.8 montre le comportement possible, lorsque μ varie, d'une paire particulière de valeurs propres de la matrice jacobienne satisfaisant à la condition $\lambda_{\pm}(\mu_0) = \pm i\beta$.

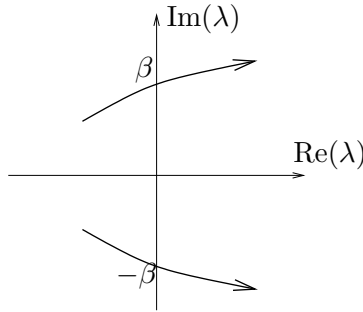


Figure 10.8: Visualisation de la traversée (pour $\mu = \mu_0$) de l'axe imaginaire par deux valeurs propres imaginaires conjuguées lorsque μ varie. Elles traversent l'axe imaginaire avec une pente non nulle d'après la condition 3) du Théorème 10.3.1. Si toutes les autres valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives, cette figure illustre une perte de stabilité : pour un gain de stabilité il suffit de renverser les flèches.

10.3.1 Bifurcation de Hopf sur-critique

Pour introduire la bifurcation de Hopf on pourrait partir de la forme normale de cette bifurcation qui peut être facilement exhibée en dimension 2. Pour simplifier les calculs on se met dans le plan complexe. On note $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $\bar{z} = x - iy$. Dans le plan complexe cette forme s'écrit (acceptons-le pour l'instant)

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + Cz(z\bar{z}). \quad (10.3.6)$$

où les constantes C , ω et μ sont réelles. Cette équation est dite la *forme réduite de Poincaré-Andronov*. Dans la suite de ce paragraphe *seul le cas $C < 0$ est considéré*.

Pour examiner facilement ce problème passons en coordonnées polaires. On pose $z = re^{i\theta}$, avec $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = \arctan(y/x)$, alors $r^2 = z\bar{z}$.

Détaillons un peu les calculs. D'après (10.3.6) il vient

$$\begin{aligned} \dot{r}(\cos \theta + i \sin \theta) + r\dot{\theta}(-\sin \theta + i \cos \theta) &= \dots \\ \dots &= r(\mu + i\omega)(\cos \theta + i \sin \theta) + Cr^3(\cos \theta + i \sin \theta), \end{aligned}$$

soit, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta = r(\mu \cos \theta - \omega \sin \theta) + Cr^3 \cos \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta = r(\omega \cos \theta + \mu \sin \theta) + Cr^3 \sin \theta. \end{cases} \quad (10.3.7)$$

En multipliant d'abord la première (resp. la deuxième) équation par $\cos \theta$ (resp. $\sin \theta$), puis la première (resp. la deuxième) par $\sin \theta$ (resp. $-\cos \theta$) il vient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\mu + Cr^2) \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{cases}$$

La rotation θ et l'étirement r ont été séparés. On retrouve pour $\omega = 1$ et $C = -1$ le système (10.3.4) que nous avons déjà étudié. On démontre qu'un cycle limite apparaît au point $z = \mu = 0$ et que les orbites périodiques sont stables lorsque $\mu > 0$.

Pour $\mu > 0$ la distance r à l'origine d'un point d'une trajectoire tend vers $\sqrt{-\mu/C}$ lorsque $t \rightarrow \infty$, par au-dessus et par en dessous:

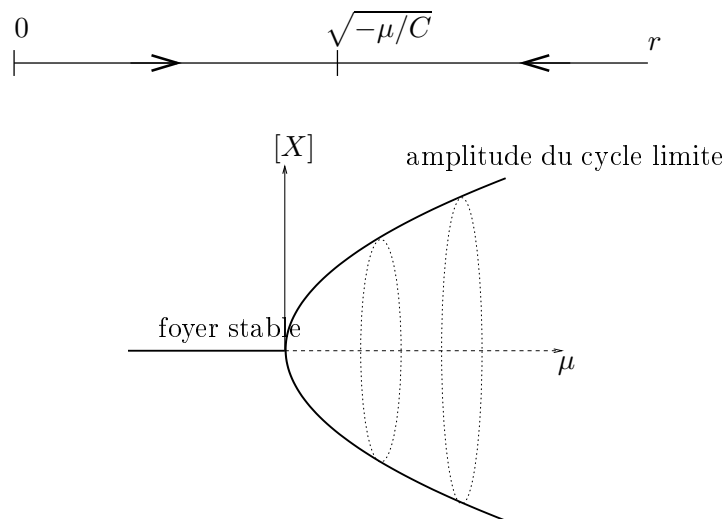


Figure 10.9: Diagramme de bifurcation pour une bifurcation de Hopf sur-critique. $[X]$ est une convention de représentation de la solution $X = (x, y)^T$. Pour $\mu < 0$ il y a une branche stable correspondant à un foyer à l'origine. Si $\mu > 0$, il apparaît un cycle limite d'amplitude $\sqrt{\mu}$. Les deux branches de la droite de la figure permettent, à la fois, d'indiquer, par convention, l'amplitude de l'unique cycle limite associé à un μ donné et la famille des cycles limites vus en perspective.

Ainsi lorsque μ croise le 0 on passe d'un foyer stable à des cycles limites stables, c'est la bifurcation de Hopf *sur-critique* (voir la Figure 10.9 pour une autre représentation du phénomène). Pour $\mu < 0$, les modules $r(t)$ des points des trajectoires (une fonction $r : t \rightarrow r(t)$ pour chaque μ donné) décroissent vers zéro lorsque t croît - rappelons que seul le cas $C < 0$ est considéré. Pour $\mu > 0$ le module des points des trajectoires (dépendant du module r_0 du point de départ qui peut être choisi de zéro à l'infini) peut aller de zéro à $a = \sqrt{-\mu/C}$ ou de l'infini à a lorsque t croît. Dans le premier cas les trajectoires décrivent des spirales divergentes autour de zéro

qui s'approchent exponentiellement du cycle limite par l'intérieur. Dans le second cas les trajectoires décrivent des spirales qui convergent vers le cycle limite par l'extérieur.

En fait, avec le système suivant déjà étudié (voir (6.7.1))

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = -\omega x \end{cases} ,$$

on obtient également une trajectoire périodique, mais sa taille est arbitraire. Les non linéarités du système (10.3.1) modifient le système précédent de telle sorte que l'on obtient une taille "préférée" de l'amplitude des solutions périodiques. Ces non linéarités peuvent être interprétées comme correspondant à une énergie finie. Lorsqu'il y a plusieurs non-linéarités, une compétition pour l'énergie s'installe, qui peut donner un comportement chaotique.

Cette interprétation en terme d'énergie provient de la physique. En effet, pour une masse sur un ressort, x correspond au déplacement du centre de masse, y à sa vitesse, x^2 à l'énergie potentielle, y^2 à l'énergie cinétique et la constance de $x^2 + y^2$ traduit la conservation de l'énergie. Les équations scalaires (10.3.1) peuvent s'interpréter ainsi.