2. Régulation sur un intervalle infini et rapport avec la stabilisation.

Considérons le problème LQ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Il s'agit d'un problème de régulation où l'on cherche à rendre l'erreur petite pour tout temps. Nous nous restreignons au cas de systèmes stationnaires. Le cadre est le suivant.

On cherche à déterminer une trajectoire solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt,$$

où de même les matrices W et U sont constantes.

On a le résultat suivant:

Théorème : On suppose que les matrices W et U sont symétriques définies positives, et que le système est contrôlable. Alors il existe une unique trajectoire minimisante pour ce problème, associée sur $[0,+\infty[$ au contrôle optimal

$$u^*(t) = U^{-1}\,{}^tB\,E\,x^*(t),$$

où $E \in M_n(\mathbb{R})$ est l'unique matrice définie négative solution de l'équation de Riccati stationnaire

$$ {}^tA\,E + E\,A + E\,B\,U^{-1}\,{}^tB\,E = W \qquad (*)$$

De plus le coût minimal vaut $-{}^tx_0\,E\,x_0$.

Par ailleurs le système bouclé

$$\dot{x} = \left(A + B\,U^{-1}\,{}^tB\,E\right)x$$

est globalement asymptotiquement stable, et la fonction $V(x) = -{}^tx\,E\,x$ est une fonction de Lyapunov stricte pour ce système.

$\boxed{4.2°.2°}$

Remarque : En particulier $X^*(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Remarque : En général l'équation

$$W = {}^tAE + EA + EBU^{-1}\,{}^tBE$$

admet plusieurs solutions, mais elle n'admet qu'une seule solution symétrique définie négative.

Exemple : Considérons le système scalaire

$$\begin{cases} \dot{X} = -X + u \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

et le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(X^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

L'équation de Riccati stationnaire est :

$$W = {}^tAE + EA + EBU^{-1}\,{}^tBE.$$

Comme $W = 1$, $A = -1$, $B = 1$, et $U = 1$ on obtient :

$$1 = -2E + E^2.$$

C'est-à-dire,

$$E^2 - 2E - 1 = 0.$$

On a deux solutions

$$E_1 = 1 - \sqrt{2} < 0,$$

et $$E_2 = 1 + \sqrt{2} > 0.$$

On prend $E_1 = 1 - \sqrt{2}$ car E doit être négative.

Par suite,

$$u^*(t) = K\, x^*(t)$$

$$= U^{-1}\, {}^tB\, E_1\, x^*(t)$$

$$= (1 - \sqrt{2})\, x^*(t).$$

Comme,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -x^*(t) + u^*(t), \\ x^*(0) = x_0, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -\sqrt{2}\, x^*(t), \\ x^*(0) = x_0, \end{cases}$$

ce qui donne $x^*(t) = e^{-\sqrt{2}t} x_0$ et $u^*(t) = (1-\sqrt{2})\, e^{-\sqrt{2}t} x_0.$

$\boxed{4.2.4^{o}}$

Exemple 2 : On considère le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + u_1, \\ \dot{y} = x - y + u_2, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Notre objectif est de stabiliser la solution de ce système, en minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + y^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) \right) dt.$$

Pour cet exemple, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = U = W = Id$$

D'après le théorème précédent le contrôle optimal u^* est :

$$u^*(t) = U^{-1}\, {}^tB\, E\, X^*(t), \text{ avec } X^*(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix}.$$

$$= E . X^*(t),$$

où $E \in M_2(\mathbb{R})$ est l'unique matrice définie négative solution de l'équation de Riccati stationnaire :

$${}^{t}A.E + EA + EBU^{-1}\,{}^{t}BE = W$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$2\begin{pmatrix} a+c & c+b \\ a-c & c-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+c^2 & (a+b)c \\ (a+b)c & c^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2(a+c)+a^2+c^2 & 2(c+b)+(a+b)c \\ 2(a-c)+(a+b)c & 2(c-b)+c^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4,2,6^\circ}$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} 2(a+c)+a^2+c^2=1, & (*) \\ 2(c+b)+(a+b)c=0, & (**) \\ 2(a-c)+(a+b)c=0, & (***) \\ 2(c-b)+c^2+b^2=1 & (****) \end{cases}$$

Si on fait $(**)$ + $(***)$, on obtient:

$$2(a+b)+2(a+b)c=0.$$

C'est-à-dire, $(a+b)(1+c)=0.$

Par suite, $a=-b$ ou $c=-1$.

Si $a=-b$, les valeurs propres de E sont $\pm\sqrt{a^2+c^2}$, ce qui est exclu car la matrice E doit être négative.

Par conséquent $c=-1$ et d'après $(*)$ et $(****)$, on obtient $a=-1\pm\sqrt{3}$ et $b=1\pm\sqrt{3}$.

Parmi ces quatre possibilités, la seule façon d'obtenir une matrice E définie négative est de prendre $a=-1-\sqrt{3}$ et $b=1-\sqrt{3}$.

$\boxed{4.2.7°}$

Alors,

$$E = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

Ce qui donne,

$$u^*(t) = E.\, X^*(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{3})\, x^*(t) - y^*(t) \\ -x^*(t) + (1-\sqrt{3})\, y^*(t) \end{pmatrix},$$

et le système bouclé ~~est~~

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -\sqrt{3}\, x^*(t), \\ \dot{y}^*(t) = -\sqrt{3}\, y^*(t) \\ x^*(0) = y^*(0) = 1, \end{cases}$$

Ce qui donne $x^*(t) = y^*(t) = e^{-\sqrt{3}t}$,

et $$u^*(t) = \begin{pmatrix} -(2+\sqrt{3})\, e^{-\sqrt{3}t} \\ -\sqrt{3}\, e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4.2.8^\circ}$