Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Semestre 2**

Module : ***Contrôle Optimal***
Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. : THÉORIE LINÉAIRE-QUADRATIQUE

EXERCICE 1 : Minimiser la fonctionelle

$$x^2(1) + \int_0^1 u^2(t)\,dt,$$

sous la contrainte dynamique

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)\,,\ x(0) = 1.$$

EXERCICE 2 : (contrôle optimal d'un tram)
Soit $T > 0$. Considérons le problème du véhicule se déplaçant en ligne droite, modélisé par le système de contrôle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t)\,,\ t \in [0,T]\,, \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

On souhaite, pendant le temps T , maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie. On choisit critère

$$C(u) = -x(T) + \int_0^T u^2(t)\,dt.$$

Montrer l'existence d'une trajectoire optimale et la caractériser.

EXERCICE 3 :
Soit $T > 0$. Considérons, le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t)\,, \\ \dot{x_2}(t) = -10x_2(t) + u(t)\,, \\ x_1(0) = a \in \mathbb{R}, x_2(0) = b \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $x(.)$ et $u(.)$ sont deux applications définies sur $[0;T]$et à valeurs réelles.
Soit le coût C défini par

$$C(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt.$$

1) Montrer l'existence d'une trajectoire optimale minimisant le coût et la caractériser. Quelle est la valeur optimale du coût ?
2) Résoudre l'equation de Riccati, écrire le contrôle optimal comme un feedback et déterminer (à nouveau) la valeur minimale atteinte par le critère.

EXERCICE 4 : Contrôle de la vitesse avec critère quadratique.

Soit $T > 0$. Considérons, le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $x(.)$ et $u(.)$ sont deux applications définies sur $[0;T]$et à valeurs réelles. et on veut minimiser le coût C défini par

$$C(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

1) Déterminer la trajectoire optimale, le contrôle optimal et la valeur minimale atteinte par le critère.

2) Résoudre l'equation de Riccati, écrire le contrôle optimal comme un feedback et déterminer (à nouveau) la valeur minimale atteinte par le critère.

EXERCICE 5 : On considère le système contrôlé :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 1. \end{cases}$$

1) Quel est le comportement de la solution en l'absence de contrôle ?

2) On désire stabiliser la solution de ce système vers l'origine par la méthode de Riccati stationnaire, en minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + x'^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

2.1) Montrer que la solution de l'équation de Riccati stationnaire est

$$E = \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sqrt{2\sqrt{2}-1.}$

2.2) Donner l'expression du contrôle optimal.

2.3) Montrer que la solution du système bouclé est

$$x(t) = \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin\left(\frac{\beta t}{2}\right),$$

où $\beta = \sqrt{2\sqrt{2}+1.}$

EXERCICE 6 : Montrer que la solution de l'équation de Riccati stationnaire pour le problème LQ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \end{cases}$$

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + y^2(t) + u^2(t)\right) dt,$$

est

$$E = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$