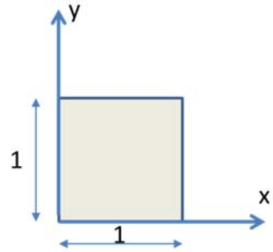
Université A. Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Niveau : MASTER

TD N°02 : Déformations et relation Contraintes-Déformations

Exercice 1

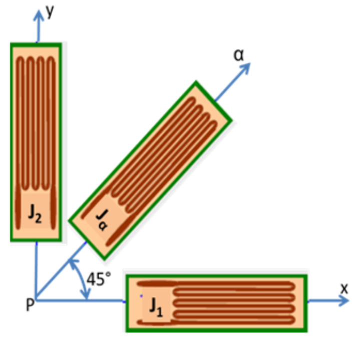


Considérons le carré infiniment petit, de côté unité dans le plan (x,y).

Les déformations dans le plan valent : $\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = 50 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} = -200 \times 10^{-6} \end{cases}$

1/ Tracer la figure déformée du carré.
2/ Déterminer les déformations principales et leurs directions.
3/ Tracer la figure déformée d'un carré isolé dans les axes principaux et de côté égal à 2.

Exercice 2



On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'applique aucune force extérieure. Les résultats enregistrés sur chaque jauge d'une rosette à 45° colée dans le plan tangent en P sont respectivement :
Jauge J_1 = 950 x 10^{-6}
Jauge J_α = -175 x 10^{-6}
Jauge J_2 = -475 x 10^{-6}

1/ Calculer les déformations principales et leurs directions
2/ Dans quelle direction **α'** enregistre t-on une dilatation linéaire nulle ?

Exercice 3

Un corps rectangulaire est soumis uniquement à l'action des contraintes ci-dessous :

$$\sigma_x = E\alpha z \text{ et } \sigma_y = E\beta z.$$

Les autres contraintes sont nulles. α et β sont deux constantes non nulles et E est le module de Young.
1/ Déterminer les composantes du vecteur déplacement (u,v,w) d'un point quelconque M(x,y,z) du corps.

Exercice 4

Un corps est soumis uniquement à l'action des contraintes de cisaillement :

$$\tau_{xz} = -G.\tau.y \quad ; \quad \tau_{yz} = G.\tau.x \quad ; \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

où τ est une constante et G est le module torsionnel.
1/ Déterminer les composantes du vecteur déplacement (u,v,w).

Exercice 5

Soit le tenseur des déformations suivant :

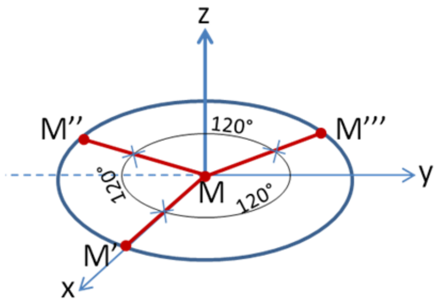
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 0 & 36,7 & -21,6 \\ 0 & -21,6 & 50 \end{bmatrix} x\ 10^{-6}$$

1/ Calculer les déformations principales et leurs directions ;
2/ En déduire les contraintes principales associées sachant que E= 210 KN/mm² et ν= 0,3.

Exercice 6

Au voisinage d'un point M de la surface libre d'un solide, on mesure les allongements unitaires (déformations) ε', ε'', ε''' le long des trois directions respectives MM', MM'' et MM''' situées à 120° l'une de l'autre dans le plan (x,y) tangent au solide en M (voir figure). Notons que l'axe Z est dirigé suivant la normale au corps en M.

1/ Déterminer l'état de contraintes au point M.



Exercice 7

Pour un corps cylindrique, les fonctions de déplacement sont données par :

$$\begin{cases} u = 2.K.x.y \\ v = K(7x^2 - 3y^2) \\ w = 0 \end{cases}$$ où K est un parmètre de charge non nul et positif.

1/ Déterminer le tenseur de déformations ;

2/ Calculer les déformations principales en un point quelconque M(x,y,z) ainsi que leurs directions ;

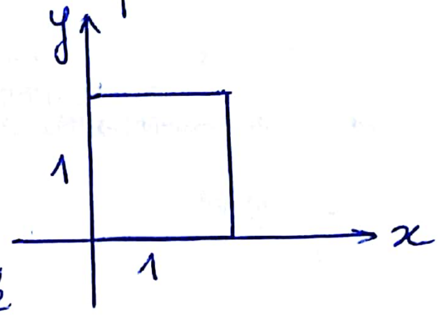
En déduire les déformations principales au points $M_1(0,0,0)$; $M_2(0,b,0)$ et $M_3(a\frac{\sqrt{3}}{2}, a, 0)$;

3/ Le module de cisaillement G étant donné, comment choisir le module de Young E pour qu'il y ait équilibre en tout point, en sachant que les forces de volume sont négligées ?

Exercice 1

Considérons le carré infiniment petit, de côté unité dans les axes (x,y). Les déformations dans le plan valent :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = 50\times10^{-6} \\ \gamma_{xy} = -200\times10^{-6} \end{cases}$$



1/ Tracer la figure déformée du carré

2/ Déterminer les éléments principaux de la déformation.

3/ Tracer la figure déformée d'un carré isolé dans les axes principaux et de côté $\sqrt{2}$.

1/ Matrice de déformations :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

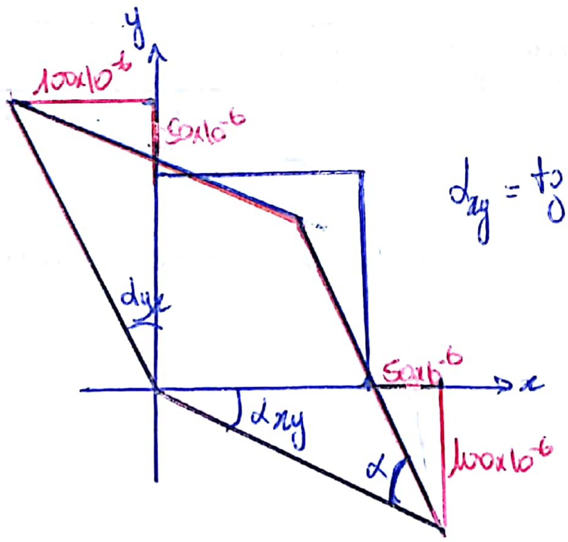
Dans notre cas :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 50 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$ avec $L = 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \Delta L}$

$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx}$ de même pour $\varepsilon_y = \Delta L$

$\alpha_{xy} = tg\,\alpha_{xy} = \frac{y}{1+50\times10^{-6}} \simeq y \Rightarrow y = \alpha_{xy} = -100\times10^{-6}$



L'angle initialement droit entre les axes x et y vaut après déformation $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_{xy} = \boxed{\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}}$

2/ Elements principaux de la déformation :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 50 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

* La direction z est principale avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_z$ ~> sa direction $(0,0,\pm 1)$

* $\begin{vmatrix} 50-\varepsilon & -100 \\ -100 & 50-\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \iff (50-\varepsilon)^2 - 10^4 = 0 \iff (-50-\varepsilon)(150-\varepsilon) = 0$

$\iff \boxed{\varepsilon_1 = -50 \times 10^{-6}}$. $\boxed{\varepsilon_2 = 150 \times 10^{-6}}$

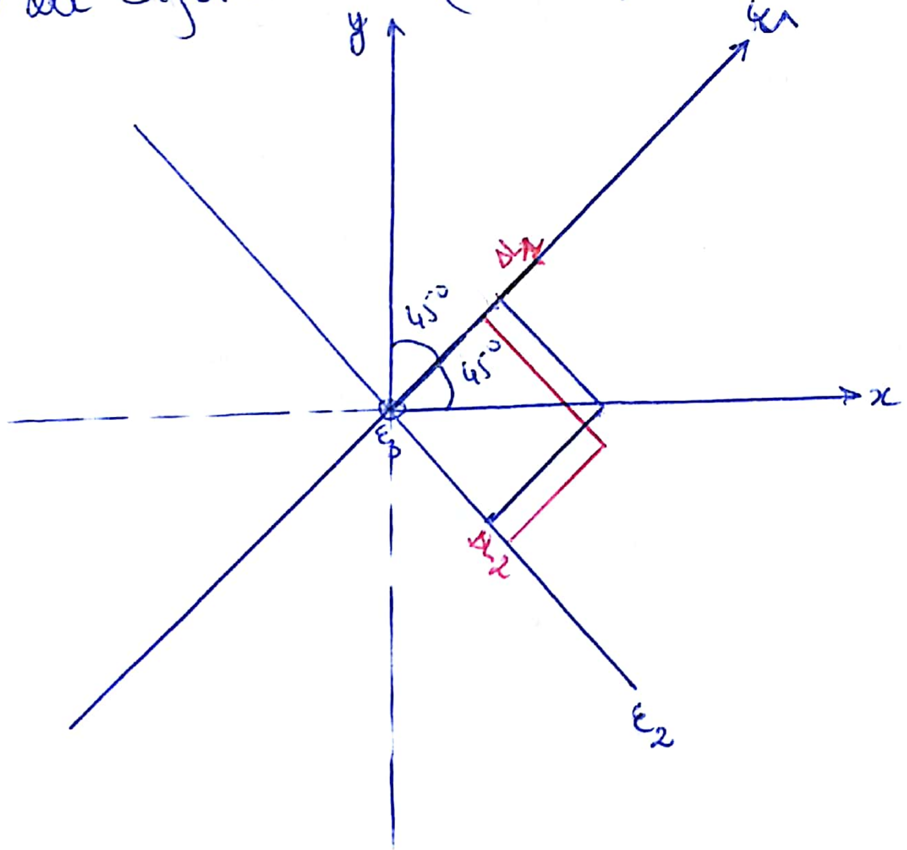
Leurs directions

$\varepsilon_1 = -50 \times 10^{-6}$ $\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z + 50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = 0 \iff \boxed{\ell_1 = m_1} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$n_1 = 0$

$\varepsilon_2 = 150 \times 10^{-6} \Rightarrow \begin{bmatrix} -100 & -100 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \ell_2 = -m_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

3/ La déformation : (côté = 2)



$\varepsilon_1 = 50 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} \Rightarrow \Delta L_1 = \varepsilon_1 L$

$\Delta L_1 = 50 \times 2 \times 10^{-6}$
$= 10^{-4}$

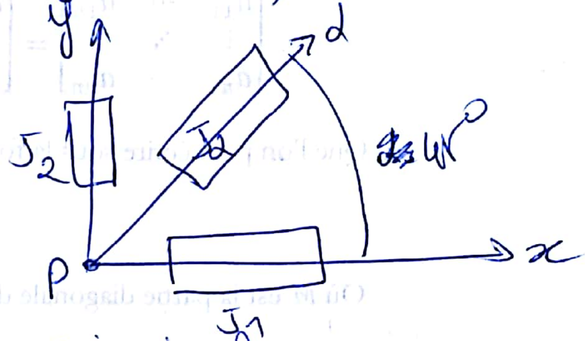
$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{L} \Rightarrow \Delta L_2 = \varepsilon_2 \times L$

$= +150 \times 2 \times 10^{-6}$
$= +3 \times 10^{-4}$

Exercice 2 :

On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'applique aucune force extérieure. Les résultats enregistrés sur chaque jauge d'une rosette à 45° collée dans le plan tangent en P sont respectivement

$$\begin{cases} \text{Jauge } J_1 = 950 \times 10^{-6} \\ \text{Jauge } J_\alpha = -175 \times 10^{-6} \\ \text{Jauge } J_2 = -475 \times 10^{-6} \end{cases}$$



1/ Quelles sont les déformations principales.

2/ Dans quelle direction d'enregistrerait-on une dilatation linéaire nulle ?

3/ Dans quel système d'axe enregistrerait-on une distorsion extremum ?

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les jauges J_x et J_y mesurent respectivement les dilatations linéaires unitaires ε_x et ε_y.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = J_1 = 950 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y = J_2 = -475 \times 10^{-6} \end{cases}$$

La distorsion est déterminée par la 3ème jauge :

$$J_\alpha = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm\gamma_{xy} + ln\gamma_{xz} + mn\gamma_{yz} \qquad \begin{cases} l = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n = 0 \end{cases}$$

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = 2J_\alpha - \varepsilon_x - \varepsilon_y = 2J_\alpha - J_1 - J_2 = 2(-175) - 950 + 475$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = -825 \times 10^{-6}}$$

Le tenseur de déformation est :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 9,5 & -4,125 & 0 \\ -4,125 & -4,75 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

* Déformations principales : ε_z est une déformations principale sa direction est $(0,0,\pm 1)$

$$\left| [\varepsilon] - \varepsilon [I] \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9,5-\varepsilon & -4,125 \\ -4,125 & -4,75-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$(9,5-\varepsilon)(-4,75-\varepsilon) - (4,125)^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - 4,75\,\varepsilon - 62,14 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = 16,46$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = -5,85 \times 10^{-4}$ $\quad \varepsilon_2 = 10,6 \times 10^{-4}$

* Les directions principales :

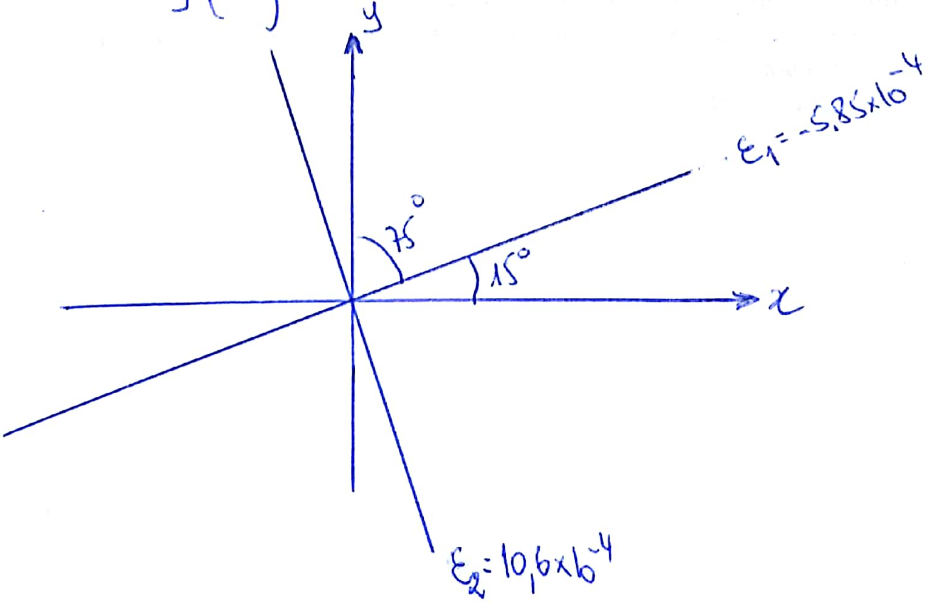
$\rightarrow \varepsilon_1 = -5,85 \times 10^{-4}$

$$\begin{bmatrix} 15,35 & -4,125 \\ -4,125 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \ell_1 = \pm 0,965 \,;\, m_1 = \pm 0,259 \,;\, n_1 = 0$$

$\alpha = 15^\circ \qquad \beta = 75^\circ$

$\rightarrow \varepsilon_2 = 10,6 \times 10^{-4}$

$$\begin{bmatrix} -1,1 & -4,125 \\ -4,125 & -15,35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \ell_2 = \pm 0,259 \,;\, m_2 = \mp 0,965 \,;\, n_2 = 0$$

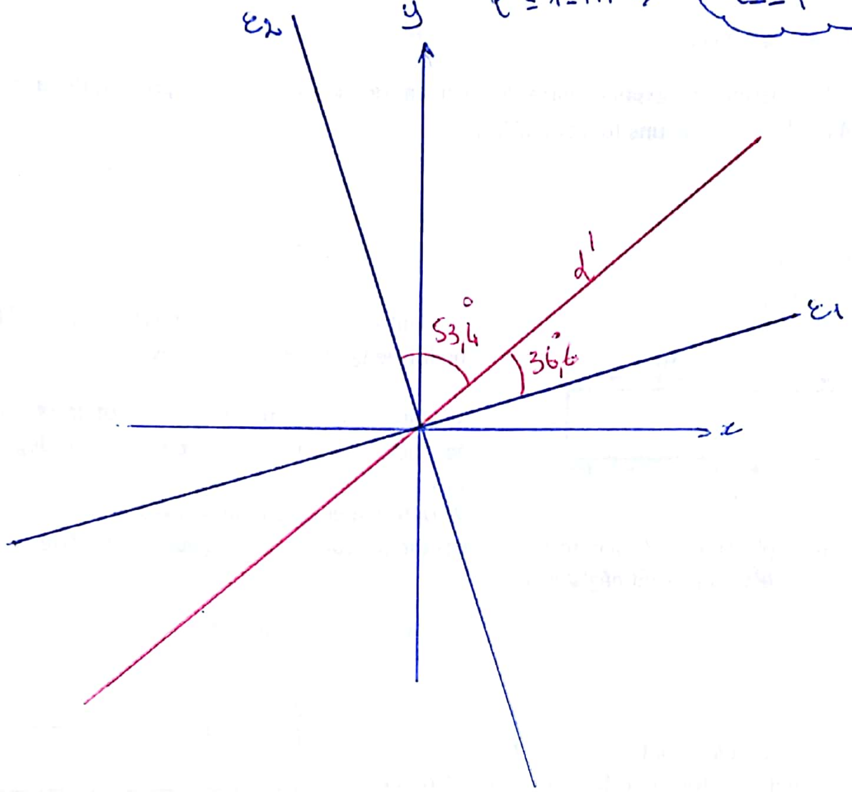


2/ Dans quelle direction d'Enregistre-t-on une dilatation linéaire nulle ?

En utilisant le repère principal : $\varepsilon = l^2 \varepsilon_1 + m^2 \varepsilon_2$ qui doit être nulle :

$$\begin{cases} -5,85\, l^2 + 10,6\, m^2 = 0 \\ l^2 + m^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 16,45\, m^2 = 5,85 \Rightarrow m = \pm 0,596 \Rightarrow \beta = 53,4^\circ$$

$$l^2 = 1 - m^2 \Rightarrow l = \pm 0,802 \Rightarrow \alpha = 36,6^\circ$$



Exercice 3

Un corps rectangulaire est soumis uniquement à l'action des contraintes ci-dessous

$\sigma_x = E\alpha z$ $\sigma_y = E\beta z$, les autres contraintes sont nulles

α et β sont deux constantes non nulles. E est le module d'élasticité.

Déterminer les composantes du vecteur déplacement (u, v, w) d'un point quelconque $M(x, y, z)$ du corps.

Le tenseur de contraintes s'écrit ainsi :

$$\sigma = \begin{pmatrix} E\alpha z & 0 & 0 \\ 0 & E\beta z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avant de déterminer les composantes du vecteur déplacement (u, v, w), il faut chercher les déformations en passant par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) = \alpha z - \nu\beta z$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = z(\alpha - \nu\beta)$$

De même, On trouve

$$\varepsilon_y = z(\beta - \nu\alpha) \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = -\nu z(\alpha+\beta)$$

Quant aux distorsions, elles sont nulles du moment que les contraintes de cisaillement sont nulles.

Les déplacements s'obtiennent en intégrant les relations déformation-déplacement. Pour que ceci soit réalisable, il faut que les 6 Conditions de Compatibilité soient vérifiées.

Ces Conditions font toutes intervenir des dérivées secondes des déformations. Comme nos déformations sont linéaires, il parait évident que ces équations sont vérifiées.

Exploitons maintenant les équations de Cauchy une à une :

1) $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = z(\alpha - \nu\beta) \Rightarrow u(x,y,z) = xz(\alpha - \nu\beta) + F_1(y,z)$ (1)

où F_1 est une fonction de y et z seules.

2) $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = z(\beta - \alpha\nu) \Rightarrow v(x,y,z) = yz(\beta - \nu\alpha) + F_2(x,z)$ (2)

3) $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\nu z(\alpha+\beta) \Rightarrow w(x,y,z) = -\dfrac{z^2}{2}\nu(\alpha+\beta) + F_3(x,y)$ (3)

4) $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

En remplaçant u et v par leurs ~~valeurs~~ expressions trouvées en (1) et (2) on obtient :

$$\frac{\partial F_1(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x,z)}{\partial x} = 0$$

La seule possibilité pour que cette équation soit vérifiée $\forall x, y, z$ est que :

$$\frac{\partial F_1(y,z)}{\partial y} = G_1(z) \qquad \frac{\partial F_2(x,z)}{\partial x} = G_2(z) = -G_1(z)$$

On en déduit les formes des fonctions F_1 et F_2.

$$F_1(y,z) = G_1(z)\,y + H_1(z) \qquad (6)$$
$$F_2(x,z) = -G_1(z)\,x + H_2(z) \qquad (7)$$

5) $\gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$

En remplaçant l'équation (6) dans (1) pour actualiser l'expression de u et avec l'équation (3), On obtient de cette dernière équation:

$$x(\alpha - \nu\beta) + y\,G_1'(z) + H_1'(z) = -\frac{\partial F_3(x,y)}{\partial x} \qquad (8)$$

Le second membre de l'équation (8) n'est pas fonction de z. Il s'en suit que les termes figurant dans le premier ~~mem~~ membre et qui sont des fonctions de z doivent être des constantes:

$$G_1'(z) = A_1 \Rightarrow G_1(z) = A_1 z + B_1 \qquad (9)$$
$$H_1'(z) = A_2 \Rightarrow H_1(z) = A_2 z + B_2 \qquad (10)$$

En exploitant le résultat dans l'équation (8), il s'en suit:

$$\frac{\partial F_3(x,y)}{\partial x} = -x(\alpha - \nu\beta) - A_1 y - A_2$$

$$F_3(x,y) = -\frac{x^2}{2}(\alpha - \nu\beta) - A_1 xy - A_2 x + H_3(y) \qquad (11)$$

où $H_3(y)$ est une fonction de y seul résultant de l'intégration

Pour ne pas se perdre, récapitulons les expressions des trois déplacements en tenant compte des différents résultats obtenus jusqu'à maintenant.

$$u = xz(\alpha - \nu\beta) + yzA_1 + yB_1 + A_2 z + B_2 \qquad (12)$$
$$v = yz(\beta - \nu\alpha) - xzA_1 - xB_1 + H_2(z) \qquad (13)$$
$$w = -\frac{z^2}{2}\nu(\alpha+\beta) - \frac{x^2}{2}(\alpha - \nu\beta) - xyA_1 - A_2 x + H_3(y) \qquad (14)$$

6) $\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$

Avec les équations (13) et (14)

$$H_2'(z) + y(\beta - \nu\alpha) - xA_1 - xA_1 + H_3'(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2xA_1 + y(\beta - \nu\alpha) + H_2'(z) + H_3'(y) = 0 \qquad (15)$$

Comme cette ~~équation~~ expression doit être vérifiée $\forall x$, on déduit

$$\begin{cases} A_1 = 0 & (16) \\ y(\beta - \nu\alpha) + H_3'(y) + H_2'(z) = 0 & (17) \end{cases}$$

De (17), il est facile de tirer que

$$\begin{cases} y(\beta - \nu\alpha) + H_3'(y) = C_1 & (18) \\ H_2'(z) = -C_1 & (19) \end{cases}$$

Par suite, on a

$$\begin{cases} H_2(z) = -C_1 z + D_1 & (20) \\ H_3(y) = C_1 y - \dfrac{y^2}{2}(\beta - \nu\alpha) + D_2 & (21) \end{cases}$$

En remplaçant ces derniers résultats dans (12), (13) et (14) on obtient finalement

$$\boxed{\begin{aligned} u &= xz(\alpha - \nu\beta) + yB_1 + A_2 z + B_2 \\ v &= yz(\beta - \nu\alpha) - xB_1 - C_1 z + D_1 \\ w &= -\frac{z^2}{2}\nu(\alpha+\beta) + \frac{x^2}{2}(\alpha - \nu\beta) - \frac{y^2}{2}(\beta - \nu\alpha) - A_2 x + C_1 y + D_2 \end{aligned}}$$

Rem :

$B_2 = u(0,0,0)$, $D_1 = v(0,0,0)$ $D_2 = w(0,0,0)$

se sont les 3 ~~c~~omposantes du déplacement à l'origine

$B_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0,0)} = -\theta_{xy}(0,0,0) = \theta_{yx}(0,0,0)$ $\quad C_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{(0,0,0)}$

$A_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0,0)} = \theta_{zx}(0,0,0) = -\theta_{xz}(0,0,0)$ $\quad = \theta_{yz}(0,0,0) = -\theta_{zy}(0,0,0)$

Correction de l'exo 4

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\tau y}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\tau x}{2} \\ -\frac{\tau y}{2} & \frac{\tau x}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{u = f_1(y,z)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{v = f_2(x,z)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \boxed{w = f_3(x,y)}$$

$$* \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \underbrace{\frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y}}_{g_1(z)} + \underbrace{\frac{\partial f_2(x,z)}{\partial x}}_{-g_1(z)}$$

$\Rightarrow$

$$* \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = g_1(z) \Rightarrow \boxed{f_1(y,z) = g_1(z)y + g_2(z)}$$

$$* \frac{\partial f_2(x,z)}{\partial x} = -g_1(z) \Rightarrow \boxed{f_2(x,z) = -g_1(z)x + g_3(z)}$$

$$* \gamma_{xz} = \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = -\tau y$$

$$\Rightarrow g_1'(z)y + g_2'(z) + \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = -\tau y$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = -\tau y - \underbrace{g_1'(z)}_{C_1}y - \underbrace{g_2'(z)}_{C_2}$$

$$\begin{cases} g_1'(z) = C_1 \Rightarrow \boxed{g_1(z) = C_1 z + D_1} \\ g_2'(z) = C_2 \Rightarrow \boxed{g_2(z) = C_2 z + D_2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = -\tau y - C_1 y - C_2$$

$$\boxed{f_3(x,y) = -\tau xy - C_1 xy - C_2 x + g_4(y)}$$

$$* \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \tau x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f_2(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} = \tau x$$

$$\underline{-C_1 x} + g_3'(z) - \tau x \underline{- C_1 x} + g_4'(y) = \tau x$$

$$\Leftrightarrow -2C_1 x + g_3'(z) + g_4'(y) = 2\tau x$$

Par identification

$$\begin{cases} C_1 = -\tau \\ \underbrace{g_3'(z)}_{C_3} + \underbrace{g_4'(y)}_{-C_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_3'(z) = C_3 \Rightarrow \boxed{g_3(z) = C_3 z + D_3} \\ g_4'(y) = -C_3 \Rightarrow \boxed{g_4(z) = -C_3 z + D_4} \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y,z) &= -\tau yz + D_1 y + C_2 z + D_2 \\ v(x,y,z) &= \tau xz - D_1 x + C_3 z + D_3 \\ w(x,y,z) &= -C_2 x - C_3 y + D_4 \end{aligned}}$$

Exercice 5

soit le tenseur des déformations suivant :

$$[E] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 36{,}7 & -21{,}6 \\ 0 & -21{,}6 & 50 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

i) Calculer les déformations principales et leurs directions.

ii) Déterminer la matrice associée au tenseur des contraintes sachant que $E = 210\ \mathrm{KN/mm^2}$ et $\nu = 0{,}3$.

i/ <u>Les déformations principales et leurs directions</u>

l'équation caractéristique :

$$\det\Big[[E] - \varepsilon[I]\Big] = \begin{vmatrix} 80-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 36{,}7-\varepsilon & -21{,}6 \\ 0 & -21{,}6 & 50-\varepsilon \end{vmatrix} \times 10^{-6} = 0$$

$$(80-\varepsilon)\left[(36{,}7-\varepsilon)(50-\varepsilon)-(21{,}6)^2\right] = 0$$

$$(80-\varepsilon)\left[\varepsilon^2 - 86{,}7\varepsilon + 1368{,}44\right] = 0 \Leftrightarrow (80-\varepsilon)(\varepsilon - 65{,}95)(\varepsilon - 20{,}75) = 0$$

$$\varepsilon_1 = 20{,}75 \times 10^{-6} \qquad \varepsilon_2 = 65{,}95 \times 10^{-6} \qquad \varepsilon_3 = 80 \times 10^{-6}$$

Direction de $\varepsilon_1 = 20{,}75 \times 10^{-6} \Rightarrow l = 0,\ m = \pm 0{,}804 \quad n = \pm 0{,}595$

Direction de $\varepsilon_2 = 65{,}95 \times 10^{-6} \Rightarrow l = 0,\ m = \pm 0{,}594,\ n = \mp 0{,}804$

Direction de $\varepsilon_3 = 80 \times 10^{-6} \Rightarrow l = \pm 1,\ m = n = 0$

Exercice 6

Au voisinage d'un point M de la surface libre d'un solide. On mesure les allongement unitaires (déformations) ε', ε'' et ε''' le long des trois directions respectives MM', MM'', et MM''' situées à 120° l'une de l'autre dans le plan (x,y) tangent au solide en M (voir figure).

On demande de déduire l'état de contraintes au point M.

NB : l'axe z est dirigé suivant la normale au corps en M.

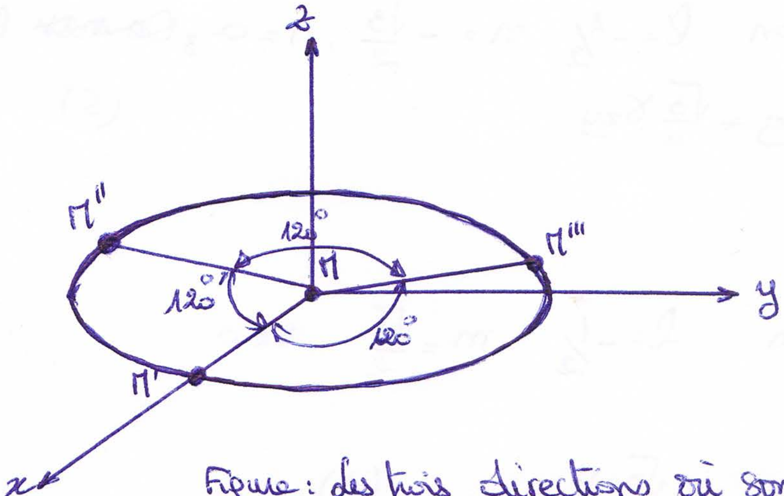


Figure : des trois directions où sont effectuées les mesures

Rappel :

On sait que les contraintes peuvent être déduites à partir des déformations par la loi de hook sous forme de LAME

$$\left\{\begin{array}{ll} \sigma_x = \lambda \varepsilon_v + 2G\varepsilon_x \quad (a) & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (d) \\ \sigma_y = \lambda \varepsilon_v + 2G\varepsilon_y \quad (b) & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (e) \\ \sigma_z = \lambda \varepsilon_v + 2G\varepsilon_z \quad (c) & \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (f) \end{array}\right. \qquad (1)$$

les déformations dans une direction (l, m, n) donnée est reliée aux composantes du tenseur de déformation par :

$$\varepsilon = l^2\varepsilon_x + m^2\varepsilon_y + n^2\varepsilon_z + lm\,\gamma_{xy} + ln\,\gamma_{xz} + mn\,\gamma_{yz} \quad (2)$$

Le point M appartient à la surface libre (non chargée) de normale z, par conséquent (d'après les CL avec l = m = 0, n = 1)

$$\sigma_z = 0 \ , \quad \tau_{xz} = 0 \ \text{ et } \ \tau_{yz} = 0 \quad (3)$$

Les déformations sont mesurées suivant trois directions différentes

Direction MM'

Dans cette direction où $l=1$, $m=0$ et $n=0$. On mesure ε'.

L'équation 2, permet alors d'écrire :

$\varepsilon' = \varepsilon_x$ ce qui est évident ! (4)

Direction MM''

Dans cette direction $l = -\frac{1}{2}$ $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n=0$, ~~Donnes~~ Alors :

$$\varepsilon'' = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \qquad (5)$$

Direction MM'''

Dans cette direction $l = -\frac{1}{2}$ $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $n=0$

Alors :

$$\varepsilon''' = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \qquad (6)$$

On obtient ainsi un système de 3 équations (4), (5) et (6) à 3 inconnues.

$$\begin{cases} \varepsilon' = \varepsilon_x \\ \varepsilon'' = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \varepsilon''' = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \end{cases}$$

Sa résolution donne :

$$\varepsilon_x = \varepsilon'$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}\left(-\varepsilon' + 2\varepsilon'' + 2\varepsilon'''\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon'' - \varepsilon'''\right)$$

Nous avons également besoin de ε_z. Elle peut être déduite à partir de (1c) en sachant que $\sigma_z = 0$.

$$0 = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\,\varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z(\lambda + 2G) = -\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{-2\lambda}{3(\lambda + 2G)}(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''')$$

Par suite :

$$\varepsilon_V = \varepsilon' - \frac{1}{3}\varepsilon' + \frac{2}{3}\varepsilon'' + \frac{2}{3}\varepsilon''' - \frac{2}{3}\,\frac{\lambda}{\lambda+2G}\left(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''\right)$$

$$\varepsilon_V = \frac{2}{3}\left(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''\right)\left[1-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\right] = \frac{2}{3}\left(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''\right)\left[\frac{2G}{\lambda+2G}\right]$$

Finalement; les équations de LAME donnent :

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{4\lambda G}{3(\lambda+2G)}\left(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''\right)+2G\varepsilon' , & \tau_{xy} = \dfrac{2G}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon''-\varepsilon'''\right) \\ \sigma_y = \dfrac{4\lambda G}{3(\lambda+2G)}\left(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''\right)+\dfrac{2G}{3}\left(-\varepsilon'+2\varepsilon''+2\varepsilon'''\right) , & \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_z = 0 , & \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Exercice 7

Pour un corps cylindrique, les fonctions de déplacement sont données par:

$$\begin{cases} U = 2Kxy \\ V = K(7x^2 - 3y^2) \\ W = 0 \end{cases}$$

où K est un paramètre de charge petit non nul et positif.

i/ Déterminer les déformations principales en un point quelconque $M(x,y,z)$ ainsi que leurs directions

AN: $M(0,0,0)$; $M(0,b,0)$; $M(a\sqrt{3}/2, a, 0)$

ii/ Le module de cisaillement G étant donné, comment choisir le module de young E pour qu'il y ait équilibre en tout point en sachant que les forces de volume sont négligées?

iii/ Donner la matrice du tenseur des contraintes. En déduire les contraintes principales.

i/ <u>Déformations principales et Directions principales</u>

Déterminons d'abord les déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2Ky \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -6Ky \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 16Kx \\ \gamma_{xz} &= \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations s'écrit alors:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2Ky & 8Kx & 0 \\ 8Kx & -6Ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Toutes les déformations sont dans le plan xy!.

Toutes les déformations sont dans le plan (x, y) !

$$\det\left([\varepsilon] - \varepsilon[I]\right) = \begin{vmatrix} 2Ky-\varepsilon & 8Kx & 0 \\ 8Kx & (-6Ky-\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$\det = -\varepsilon\left((-6Ky-\varepsilon)(2Ky-\varepsilon) - 64K^2x^2\right)$$
$$= -\varepsilon\left(\varepsilon^2 + 4Ky\varepsilon - 12K^2y^2 - 64K^2x^2\right)$$

La première déformation principale est $\varepsilon = 0$ et sa direction est évidemment $l = m = 0 \quad n = \pm 1$ (axe z)

Les deux autres déformations principales s'obtiennent par résolution de l'équation du second degré en ε paramétrique en x et y ci-dessous :

$$\varepsilon^2 + 4Ky\varepsilon - 12K^2y^2 - 64K^2x^2 = 0$$

$$\Delta = 16K^2y^2 + 48K^2y^2 + 256K^2x^2$$
$$= 64K^2\left(4x^2 + y^2\right) : \Delta \text{ est toujours positif ou nul.}$$

Le discriment s'annulerait dans le cas où : $x = y = 0$

Cas pour lequel on a un tenseur de déformations nul ($\varepsilon_i = 0 \ \forall i$) si on prend la définition de la direction principale comme étant la normale du plan pour lequel on n'a pas de distorsions ($\gamma_{ij} = 0$), alors toutes les directions seraient principales car on n'a pas de déformation

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -2Ky + 4K\sqrt{4x^2+y^2} \\ \varepsilon_2 = -2Ky - 4K\sqrt{4x^2+y^2} \end{cases}$$

Remarque : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ que si $x = y = 0$ (cas déjà discuté)

<u>Direction de $\varepsilon_1 = -2Ky + 4K\sqrt{4x^2+y^2}$</u>

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{pmatrix} 4Ky - 4K\sqrt{4x^2+y^2} & 8x \\ 8Kx & -4Ky - 4Kx\sqrt{4x^2+y^2} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ainsi $\varepsilon_1 n_1 = 0 \Rightarrow$

On peut vérifier que le déterminant de la matrice est bien nul

(1) $\Rightarrow 4Ky - 4K\sqrt{4x^2+y^2}\, l + 8Kx\, m = 0$

D'où :

$$m = -\frac{y - \sqrt{4x^2+y^2}}{2x}\, l \qquad \text{si } x \neq 0$$

~~si x = 0, les équations homogènes deviennent~~

si $x=0$, le système d'équations devient :

$$\begin{cases} 4K\left(y - \sqrt{y^2}\right) l = 0 \\ 4K\left(y + \sqrt{y^2}\right) m = 0 \end{cases}$$

Donc si $y>0 \Rightarrow l = \pm 1,\ m = n = 0$

si $y<0 \Rightarrow l = n = 0,\ m = \pm 1$

si $y = 0 \Rightarrow$ toutes les directions sont principales.

Posons $\alpha = \dfrac{y - \sqrt{4x^2+y^2}}{2x}$ $\qquad m = -\alpha l$

$$l^2 + m^2 = 1 \Leftrightarrow l^2(1+\alpha^2) = 1 \Rightarrow \boxed{l = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \quad \boxed{m = \mp\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}$$

<u>Direction de $\varepsilon_2 = -2Ky - 4K\sqrt{4x^2+y^2}$</u>

$$\begin{pmatrix} 4Ky + 4K\sqrt{4x^2+y^2} & 8Kx \\ 8Kx & -4Ky + 4K\sqrt{4x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

déterminant nul et $\varepsilon_2 n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = 0$

si $x=0$, le système d'équations homogène devient :

$$\left(y + \sqrt{y^2}\right) l = 0 \quad \text{et} \quad \left(-y + \sqrt{y^2}\right) m = 0$$

Donc si $y > 0 \Rightarrow l = n = 0,\quad m = \pm 1$

si $y < 0 \Rightarrow l = \pm 1,\quad m = n = 0$

et si $y = 0 \Rightarrow$ toutes les directions.

si $x \neq 0$ (2) $\Rightarrow l = \dfrac{y - \sqrt{4x^2+y^2}}{2x}\, m.$

En conservant la notation $\alpha = \dfrac{y - \sqrt{4x^2+y^2}}{2x}$, on peut écrire $l = \alpha m$

$$l^2 + m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \Rightarrow \boxed{l = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}$$

Application numériques

a) $M(0,0,0)$

Ce cas a été déja discuté. On n'a pas de déformations et par conséquent toutes les directions sont principales.

b) $M(0,b,0)$ $\quad b \neq 0$

$-\varepsilon_1 = -2Kb + 4Kb = 2Kb$

$\alpha = 0$ alors : si $b > 0 \Rightarrow l = 1,\ m = n = 0$

si $b < 0 \Rightarrow l = n = 0,\ m = \pm 1$

$-\varepsilon_2 = -2Kb - 4Kb = -6Kb$

$x = 0$, alors si $b > 0 \Rightarrow l = n = 0,\ m = \pm 1$

si $b < 0 \Rightarrow m = n = 0 \quad l = \pm 1$

c) $M\left(a\sqrt{3}/2,\ a,\ 0\right)$ $\quad a \neq 0$

• $\varepsilon_1 = -2Ka + 4K\sqrt{4.\frac{3}{4}a^2 + a^2} = 6Ka$

$\alpha = \dfrac{-a}{a\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ m = \mp\dfrac{1}{2}$

• $\varepsilon_2 = -2Ka - 4K\sqrt{4a^2} = -10Ka$

$l_2 = \pm\dfrac{1}{2}$ et $m_2 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ii/
$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v = 4(G+\lambda)Ky, & \tau_{xy} = 16KxG. \quad X = Y = Z = 0 \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v = -4(3G+\lambda)Ky, & \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_z = -4\lambda Ky & \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Les équations d'équilibre deviennent $\Rightarrow$
$$\begin{cases} 0 = 0 \quad C.V \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \Rightarrow 16KG - 12KG - 4\lambda K + 0 = 0 \\ 0 = 0 \quad C.V \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{G = \lambda}$ pour les eqs d'équilibre soient vérifiées il faut que $G = \lambda$.

$G = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow 2\nu = (1-2\nu) \Rightarrow \boxed{\nu = \dfrac{1}{4}}$

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{5}{2}G} \Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 20EKy & 40KEx & 0 \\ 40EKx & -40EKy & 0 \\ 0 & 0 & -10EKy \end{bmatrix}$

$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_v \quad \sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon_v$

$\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_v$