ANNALES DES EPREUVES ECRITES 2017-2020

Dr. Zahira BENADLA
Pr. Abdellatif MEGNOUNIF

Théorie de l'Elasticité

Département de Génie Civil
Faculté de Technologie
Université d'Abou Bekr Belkaïd -Tlemcen

Ce document contient les différentes épreuves faites durant les années universitaires 2016-2017 ; 2017-2018 ; 2018-2019 et 2019-2020. Et ceci pour la matière Théorie de l'élasticité enseignée aux étudiants de Master 1, options (Construction métallique et mixte & Voies et ouvrages d'art) en semestre 1 de leur cursus. Et enseignée aux étudiants de Master 1 structures en semestre 2 de leur cursus.

Sommaire

1/ CONTRÔLES CONTINUS (2017-2020)

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2016-2017

Tlemcen, le 08 Décembre 2016.
Durée: 1H00mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 : Constructions Métalliques et Mixtes

Contrôle continu de l'élasticité

Exercice

En un point donné d'un milieu continu élastique, le tenseur des contraintes est donné par :

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$ Avec : α est un paramètre non nul

1/ Que représente cet état de contraintes ?

2/ A quelle condition les équations d'équilibre seront-elles satisfaites si le milieu est en équilibre statique ?

3/ Calculer les contraintes principales ainsi que leurs directions.

4/ En déduire les déformations principales et leurs directions.

5/ Déterminer les composantes du vecteur normal $\vec{n}$ au plan pour lequel on a : $\sigma_n = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tau = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bon Courage

Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2017-2018

Tlemcen, le 26 Novembre 2017
Durée : 00h45 min
Aucun document n'est autorisé

MASTER 1 : CMM & VOA

Contrôle Continu de Théorie de l'élasticité

Exercice

En un point M d'un solide, dans le repère (X,Y,Z). Le tenseur des contraintes a pour valeurs :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 20 \\ 0 & -60 & 0 \\ 20 & 0 & 40 \end{bmatrix} \qquad MPa$$

1/ Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes de ce tenseur. Quel est l'état de contraintes représenté ?

2/ Déterminer les contraintes et directions principales au point M.

3/ Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) sur une facette $\vec{n}$ dont son vecteur unitaire « $\vec{n}$ » est de composantes : $\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

<u>Bon Courage</u>
<u>Dr.Z BENADLA</u>

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2017-2018

Tlemcen, le 17 Avril 2018.
Durée: 00h30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master1 (Structures)

Contrôle continu : La Théorie de l'Elasticité

Exercice

Les trois composantes de déplacement d'un point quelconque P(x,y,z) d'un corps sont :

$$\begin{cases} u = \dfrac{3}{4}\,k\,x - \dfrac{1}{4}\,k\,y \\ v = \dfrac{1}{4}\,k\,x - \dfrac{\sqrt{5}}{4}\,k\,y \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est une constante non nulle}$$

1/ Déterminer le tenseur de déformations $[\varepsilon]$;

2/ Déterminer le tenseur de contraintes $[\sigma]$;

3/ Calculer les contraintes et directions principales ;

4/ Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z).

<u>Bon Courage</u>

<u>Dr.Z BENADLA</u>

Université A. Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2018-2019

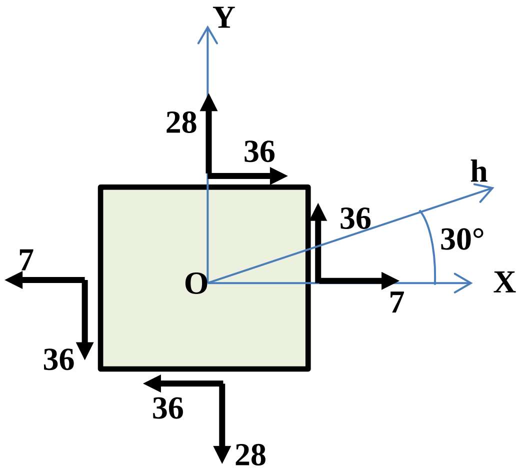
Tlemcen, le 11 Décembre 2018
Durée : 00h 30 min
Aucun document n'est autorisé

MASTER 1 : CMM & VOA

Contrôle Continu de Théorie de l'élasticité

Exercice

Considérons l'état plan de contraintes au point M représenté par la figure ci-contre. Les contraintes sont en MPa.



1/ Ecrire la matrice de contraintes en M dans le repère (x,y,z).

2/ Déterminer les contraintes et directions principales au point M.

3/ Calculer les contraintes de cisaillement maximum.

4/ En se plaçant dans le plan des contraintes (x,y), calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) s'exerçant sur un plan de coupe dont la normale (h) fait un angle de 30° avec l'axe x.

Bon Courage

Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2019-2020

Tlemcen, Décembre 2019
Durée : 00h30 min
Aucun document n'est autorisé

MASTER 1 : CMM & VOA

Contrôle Continu de Théorie de l'élasticité

Exercice

En un point M d'un solide, dans le repère (X,Y,Z). Le tenseur des contraintes a pour valeurs :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \qquad MPa$$

1/ Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes de ce tenseur. Quel est l'état de contraintes représenté ?

2/ Déterminer les contraintes et directions principales au point M.

3/ Représenter les directions principales graphiquement.

4/ Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) sur une facette $\vec{n}$ dont son vecteur unitaire « $\vec{n}$ » est de composantes : $\vec{n} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right\}$

Bon Courage

Dr.Z BENADLA

2/ EXAMENS FINAUX (2017-2020)

2016-2017

Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Janvier 2017
Durée : 1h30 mn

EXAMEN FINAL
Théorie d'élasticité
M1 Construction métallique (CM)

Toute documentation est non autorisée

QUESTIONS DE COURS (4.00 pts)

(2.00 Pts) 1) Quelle est la différence entre un état de contrainte plane et un état de déformation plane ? Donner un exemple pour chaque cas.

(2.00 Pts) 2) Donner une définition claire, complète et précise des termes suivants :
Isotropie, Homogénéité, Linéarité, Elasticité

EXERCICE I (9.00 pts)

En un point donné d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

(1.50 Pts) i) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et en partie déviatorique. Que peut représenter la partie déviatorique ?
(3.50 Pts) ii) Déterminer les contraintes et directions principales du tenseur déviatorique. En déduire les contraintes et directions principales du tenseur initial.
(1.00 Pt) iii) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.
(3.00 Pts) iv) Déterminer le plan défini par sa normale N(l,m,n) dans lequel agit une contrainte de composantes :

$$\sigma_n = 12 - 2\sqrt{2} \qquad ; \qquad \tau = 4.\sqrt{\frac{3}{2}}$$

EXERCICE II (7.00 pts)

Le tenseur des déformations en un point quelconque M(x,y,z) d'un milieu élastique est donné par :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où « a » est une constante non nulle.

(3.00 Pts) i) Calculer les déformations et directions principales de ce tenseur en fonction de « a ».

(4.00 Pts) ii) Calculer le vecteur déplacement (u,v,w) en un point quelconque M(x,y,z).

BON COURAGE
Pr Abdellatif MEGNOUNIF

Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Janvier 2018
Durée : 1h30 mn

2017-2018

EXAMEN FINAL
Théorie d'élasticité
M1 CMM et VOA

Toute documentation est non autorisée

QUESTIONS DE COURS (4.00 pts)

(2.00 Pts) 1) Pour des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2\ et\ \sigma_3$, définir l'état de contrainte pour les cas suivants :

i) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$

ii) $\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0\ et\ \sigma_3 = 0$

ii) $\sigma_1 = -\sigma_2\ et\ \sigma_3 = 0$

ii) $\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

(2.00 Pts) 2) Montrer que dans le cas d'un tenseur de contraintes tridimensionnel, les contraintes principales sont déterminées par la solution de l'équation :

$$Det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

EXERCICE I (9.00 pts)

En un point donné d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Avec : α une constante

(1.00 Pts) i) A quelle condition les équations d'équilibre seront-elles satisfaites si le milieu est en équilibre statique ?

(3.50 Pts) ii) Déterminer les contraintes et directions principales de ce tenseur.

(1.00 Pt) iii) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

(3.50 Pts) iv) Dans le plan (σ_n, τ), tracer les cercles de Mohr de l'état de contrainte en un point quelconque.

Représenter sur ces cercles de Mohr, le vecteur contrainte appartenant à la facette dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.

EXERCICE II (7.00 pts)

On vous demande d'écrire toutes les conditions aux limites en contraintes pour les deux cas suivants :

(3.00 Pts) **Cas I :** Il s'agit d'une poutre console de longueur « L » et de section transversale (2h x 2h) soumise à un cisaillement uniforme τ_0 sur les faces ABB'A' ; BDD'B' et CDD'C' et à une charge décroissante linéairement de « q_0 » à « 0 » sur la face ABB'A' (Voir figure 1).

(3.50 Pts) **Cas II :** Il s'agit d'un massif prismatique en béton qui sert à retenir l'eau limité à l'amont par le plan (S_0) faisant un angle « α » avec l'axe des « x » et à l'aval par le plan (S_1) faisant un angle « β » avec l'axe des « x » (voir figure 2)

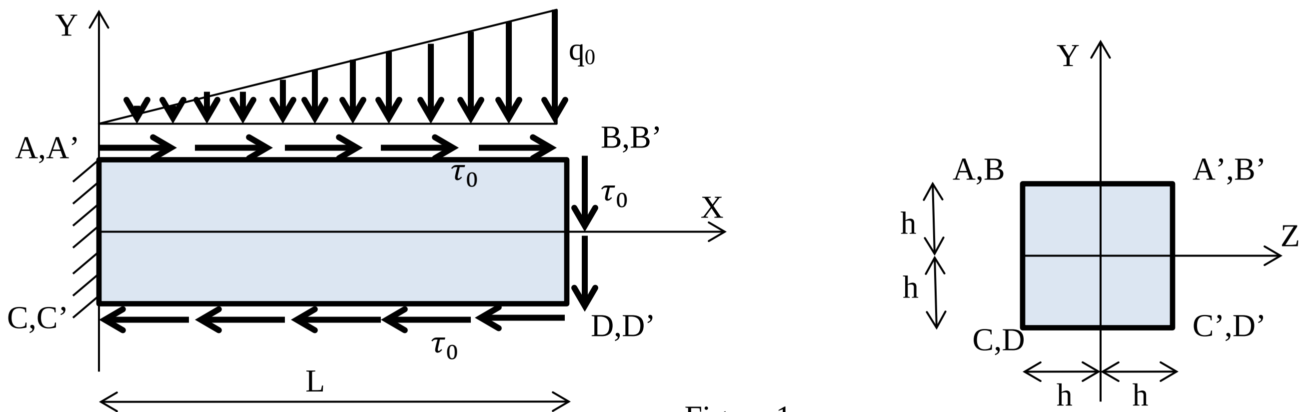
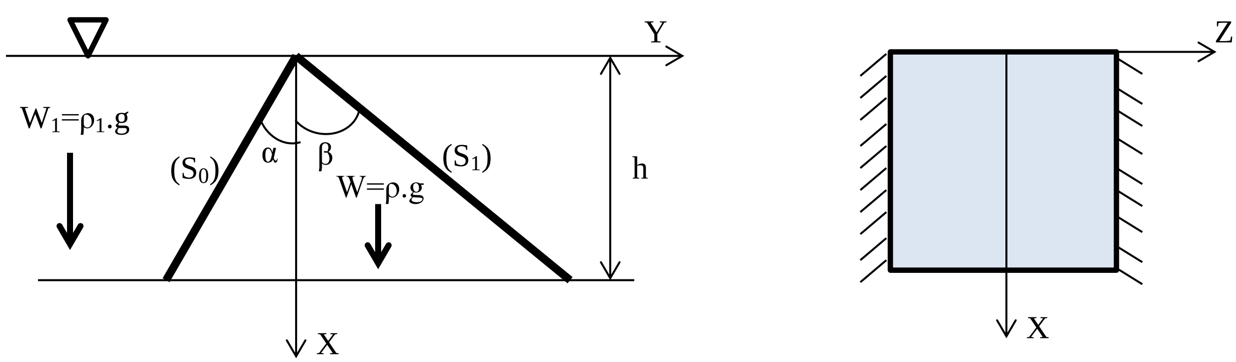


Figure 1



ρ_1 : masse volumique de l'eau
ρ : masse volumique du béton

Figure 2

BON COURAGE
Pr Abdellatif MEGNOUNIF

Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Mai 2018
Durée : 1h30 mn

2017-2018

EXAMEN FINAL
Théorie d'élasticité
M1 Structures

Toute documentation est non autorisée

<u>QUESTIONS DE COURS (4.00 pts)</u>

(2.00 Pts) 1) Démonter les équations de Hooke sous la forme de Lamé.

(2.00 Pts) 2) Montrer, dans le cas où le poids propre d'une structure n'est pas négligé, que la distribution des contraintes en élasticité plane peut s'écrire :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\ \ \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\ \ \ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \rho g x$$

Où $\varphi(x,y)$ est une fonction de contraintes

<u>EXERCICE I (7.00 pts)</u>

On vous demande d'écrire toutes les conditions aux limites en contraintes pour les deux cas suivants :

(3.50 Pts) **<u>Cas I :</u>** Il s'agit d'une poutre console de longueur « L » et de section transversale (2h x 2h) soumise à un cisaillement uniforme τ_0 sur les faces ABB'A' ; BDD'B' et CDD'C' et à une charge décroissante linéairement de « q_0 » à « 0 » sur la face ABB'A' (Voir figure 1).

(3.50 Pts) **<u>Cas II :</u>** Il s'agit d'un massif prismatique en béton qui sert à retenir l'eau limité à l'amont par le plan (S_0) faisant un angle « α » avec l'axe des « x » et à l'aval par le plan (S_1) faisant un angle « β » avec l'axe des « x » (voir figure 2)

<u>EXERCICE II (9.00 pts)</u>

Pour étudier la stabilité du mur de soutènement donné en figure (3), on se propose d'utiliser la fonction de contraintes suivante :

$$\varphi(x,y) = A.x^3 + B.y^3 + C.x^2y + D.xy^2$$

Où A, B, C et D sont des constantes à déterminer. On néglige le poids propre du mur.

Le mur de hauteur « H » et d'angle au sommet (π/4) est soumis à une poussée des terres de poids volumique (γ_s) appliquée sur la face OA. La face OB n'est pas chargée. Ce mur est considéré encastré dans le sol suivant la face AB.

(1.00 Pt) 1) Montrer que $\nabla^4\varphi = 0$

(5.00 Pts) 2) Déterminer les constantes A, B, C et D pour avoir l'équilibre global du mur.

(3.00 Pts) 3) Déterminer la distribution des contraintes au niveau de la base du mur.

Est-ce que le mur est stable ? Discuter

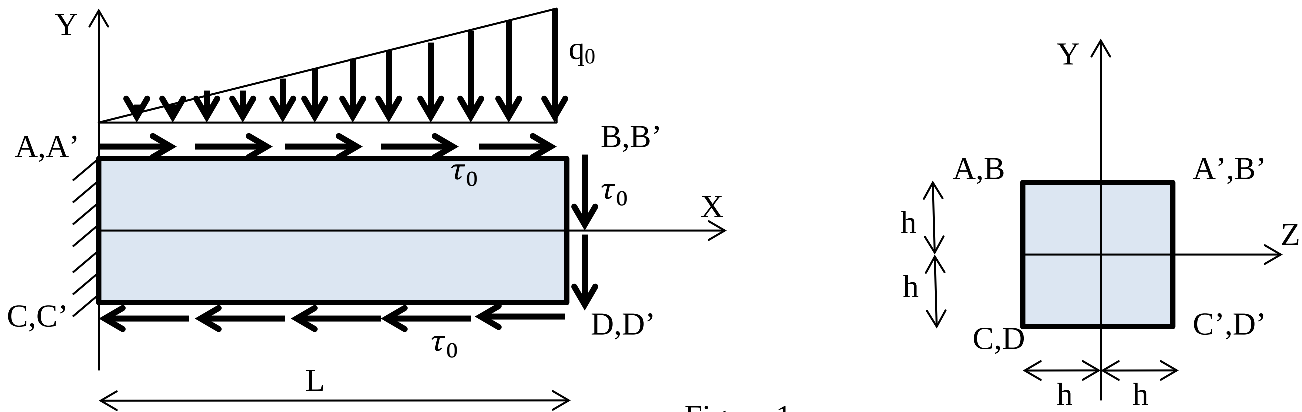
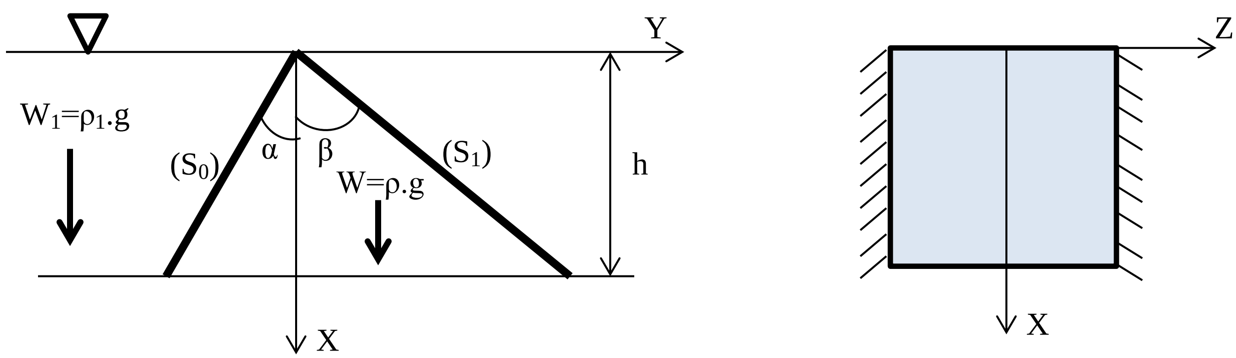


Figure 1



ρ_1 : masse volumique de l'eau
ρ : masse volumique du béton

Figure 2

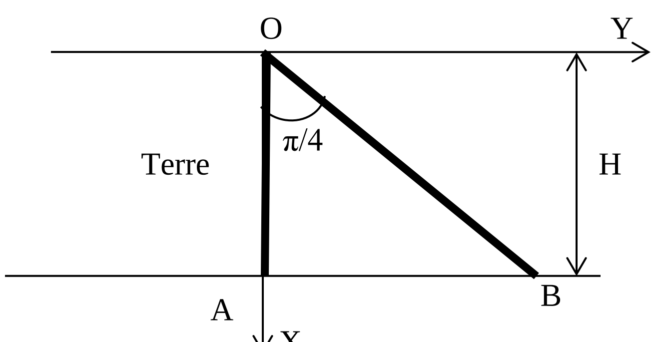


Figure 3

BON COURAGE
Pr Abdellatif MEGNOUNIF

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2018-2019

Mercredi 06 Février 2019.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 : Constructions métalliques et mixtes & Voies et Ouvrages d'Art

Examen Final de Théorie de l'élasticité (GM722/ GV711)

Questions (4 pts)

(2 pts) **1/** Démontrer l'une des équations de compatibilité : $\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z}$

(2 pts) **2/** Exprimer les tenseurs de contraintes et de déformations dans le cas de contraintes planes.

Exercice 1 (9 pts)

Sous l'action de charges extérieures, les déplacements en un point quelconque P(x,y,z) d'un corps sont définis comme suit :

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{4} kx - \frac{1}{4} ky \\ v = \frac{3}{4} kx - \frac{\sqrt{3}}{4} ky \\ w = 0 \end{cases}$$

k : Constante

(1,5 pts) **1/** Définir le tenseur de déformations en un point quelconque P(x,y,z).

(3,5 pts) **2/** Déterminer les contraintes et directions principales au point P.

(2 pts) **3/** Déterminer la contrainte de cisaillement maximale et sa direction.

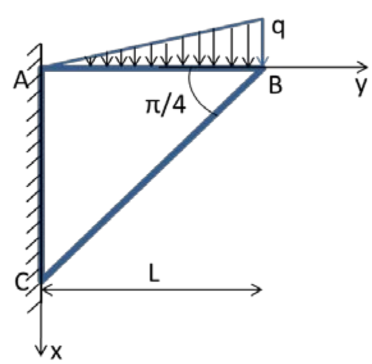
(2 pts) **4/** Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z).

Exercice 2 (7 pts)

Soit la poutre montrée en figure ci-contre. Elle est de section triangulaire (ABC) et de très petite dimension suivant l'axe z. Cette poutre est soumise à une charge triangulaire sur sa face AB et elle est encastrée sur sa face AC. Le matériau constituant la poutre a une masse volumique ρ. On propose d'utiliser la fonction de contraintes suivante :

$$\varphi(x, y) = a.x^3 + b.y^3 + c.x^2y + d.xy^2$$

où a,b, c et d sont des constantes.
N.B : Le poids propre de la poutre **n'est pas négligé**.



(1 pt) **1/** Montrer que $\nabla^4 \varphi = 0$

(2 pts) **2/** Déterminer les composantes de contraintes en tout point du corps.

(2 pts) **3/** Déterminer les constantes a, b, c et d.

(2 pts) **4/** En déduire l'état de contraintes à l'encastrement (face AC).

Bon Courage
Dr.Z BENADLA

2018-2019

Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Juillet 2019
Durée : 1h30 mn

EXAMEN FINAL
Théorie d'élasticité (GS811)
M1 Structures

Toute documentation est non autorisée

QUESTIONS DE COURS (4.00 pts)

(2.00 Pts) 2) Donner une définition claire, complète et précise des termes suivants :
Isotropie, Homogénéité, Linéarité, Elasticité

(2.00 Pts) 3) Pour des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2 \; et \; \sigma_3$, définir l'état de contrainte pour les cas suivants :

i) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$

ii) $\sigma_1 > 0, \; \sigma_2 > 0 \; et \; \sigma_3 = 0$

iii) $\sigma_1 = -\sigma_2 \; et \; \sigma_3 = 0$

iv) $\sigma_1 > 0, \; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

EXERCICE I (9.00 pts)

En un point donné d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(1.50 Pts) i) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et en partie déviatorique. Que peut représenter la partie déviatorique ?
(3.50 Pts) ii) Déterminer les contraintes et directions principales du tenseur déviatorique. En déduire les contraintes et directions principales du tenseur initial.
(1.00 Pt) iii) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.
(3.00 Pts) iv) Déterminer le plan défini par sa normale N(l,m,n) dans lequel agit une contrainte de composantes :

$$\sigma_n = 12 - 2\sqrt{2} \qquad ; \qquad \tau = 4.\sqrt{\frac{3}{2}}$$

EXERCICE II (7.00 pts)

On vous demande d'écrire toutes les conditions aux limites en contraintes pour les deux cas suivants :

(3.50 Pts) **Cas I :** Il s'agit d'une poutre console de longueur « L » et de section transversale (2h x 2h) soumise à un cisaillement uniforme τ_0 sur les faces ABB'A' et CDD'C' et à une charge décroissante linéairement de « q_0 » à « 0 » sur les faces ABB'A' et BDD'B' (Voir figure 1).

(3.50 Pts) **Cas II :** Il s'agit d'un massif prismatique en béton qui sert à retenir l'eau limité à l'amont par le plan vertical OA et à l'aval par le plan OB faisant un angle « $\frac{\pi}{4}$ » avec l'axe des

« x ». A l'arrière le massif est enterré dans la terre de masse volumique « ρ_2 » (voir figure 2)

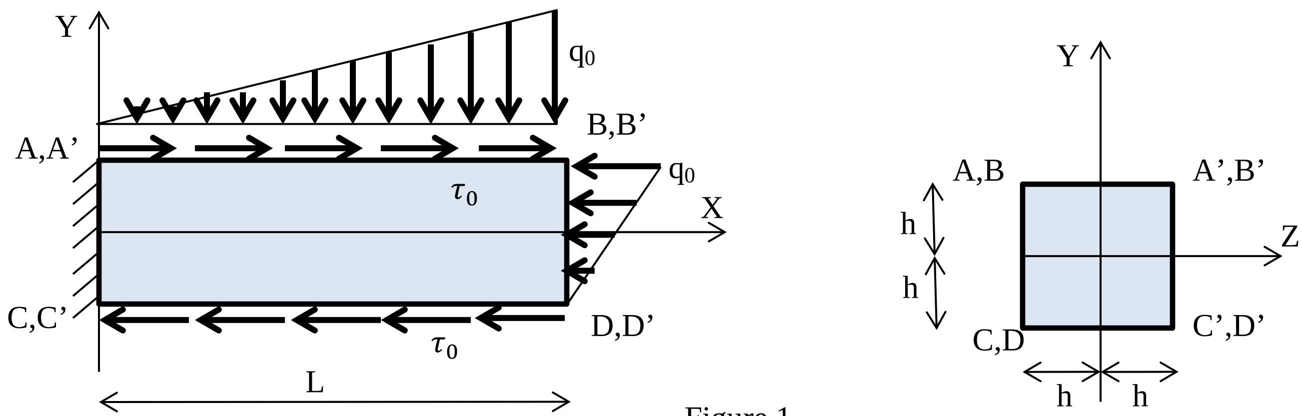


Figure 1

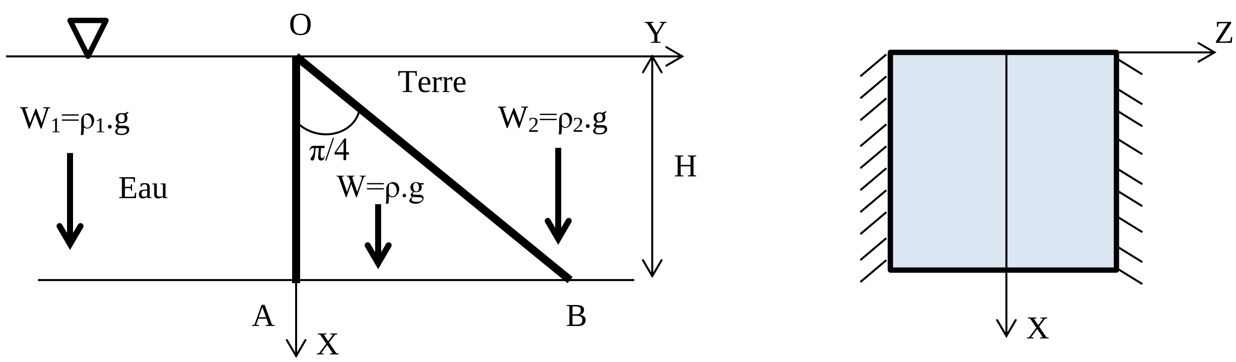


Figure 2

ρ_1 : masse volumique de l'eau
ρ_2 : masse volumique de la terre
ρ : masse volumique du béton

BON COURAGE
Pr Abdellatif MEGNOUNIF

2019-2020

Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Janvier 2020
Durée : 1h30 mn

EXAMEN FINAL
Théorie d'élasticité
M1 VOA & CMM

Toute documentation est non autorisée

QUESTIONS DE COURS (6.00 pts)

(2.00 Pts) 1) Citer et donner une définition exacte de toutes les hypothèses prises dans la théorie d'élasticité.

(2.00 Pts) 2) Donner une définition claire, complète et précise des termes suivants :
Module de Young, Coefficient de Poisson, Coefficient de cisaillement, Constantes de Lamé.

(2.00 Pts) 3) Démontrer que la dilation cubique « ε_V » est la somme des déformations longitudinales

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

EXERCICE I (8.00 pts)

En un point donné d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

(1.00 Pt) i) Déterminer les forces de volume correspondantes à ce tenseur.
(5.00 Pts) ii) Déterminer les contraintes et directions principales de ce tenseur. En déduire la contrainte de cisaillement maximale.
(2.00 Pts) iii) Déterminer le plan défini par sa normale N(l,m,n) dans lequel agit une contrainte de composantes :

$$\sigma_n = \frac{3}{4} \qquad ; \qquad \tau = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

EXERCICE II (6.00 pts)

Le champs de déplacement en un point quelconque M(x,y,z) d'un milieu élastique continu est donné par :

$$u = 3x - z$$
$$v = 0$$
$$w = x - \sqrt{5}\, z$$

(1.00 Pt) i) Définir le tenseur des déformations

(3.00 Pts) ii) Calculer les déformations et directions principales de ce tenseur en un point quelconque.

(2.00 Pts) ii) Déterminer les composantes des forces de volume correspondantes à ce tenseur.

BON COURAGE
Pr Abdellatif MEGNOUNIF

3/ EXAMENS DE RATTRAPAGE (2017-2020)

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2016-2017

Jeudi 16 Mars 2017.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 Constructions métalliques et mixtes

Examen de rattrapage de l'élasticité (GM 722)

Questions (3 pts)

(1 pt) **1/** Pourquoi I_1, I_2 et I_3 sont appelés les invariants de contraintes ?

(1 pt) **2/** Que traduisent les conditions de compatibilité ?

(1 pt) **3/** Que représentent les conditions aux limites de chargement ?

Exercice 1 (8 pts)

(3 pts) **1/** Calculer les contraintes principales et leurs directions pour le tenseur ci-après :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 25 & 45 & 0 \\ 45 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} KN/m^2$$

(2 pts) **2/** Calculer la contrainte de cisaillement maximale.

(3 pts) **3/** Calculer les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z).

Exercice 2 (9 pts)

Le vecteur déplacement en un point quelconque M(x,y,z) d'un corps est donné par ses composantes :

$$\begin{cases} u = 2xz \\ v = 2yz \\ w = 2x^2 + y^2 \end{cases}$$

(2 pts) **1/** Définir le tenseur des déformations en M(x,y,z).
(3 pts) **2/** Calculer les déformations principales ainsi que leurs directions au point (0,y,0).
(2 pts) **3/** En déduire les contraintes principales et leurs directions.
(2 pts) **4/** Calculer le vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point (0,y,0) pour lequel on a :
σ_n=0 et τ=1

Bon Courage
Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2016-2017

Dimanche 18 Juin 2017.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 Structures

Examen de rattrapage de l'élasticité (GS 811)

Questions de cours (4 pts)

(2 pts) **1/** Exprimser les tenseurs de contraintes et de déformations dans les cas de contraintes planes

(2 pts) **2/** Quelles sont les conditions à respecter pour qu'un problème soit résolu en « déformation plane » ?

Exercice 1 (7 pts)

Dans un milieu, le tenseur de contraintes est défini par la matrice :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 10 & 0 & 20 \\ -10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \text{KN/cm}^2$$

(1 pt) **1/** Que représente l'état de contraintes donné par ce tenseur ?

(3 pts) **2/** Déterminer les contraintes principales et leurs directions ;

(1 pt) **3/** Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale ;

(2 pts) **4/** En sachant que E= 3000 KN/cm² et ν=0,3, en déduire les déformations principales et leurs directions ;

Exercice 2 (9 pts)

Le vecteur déplacement en un point quelconque M(x,y,z) d'un corps est donné par ses composantes :

$$\begin{cases} u = 2xz \\ v = 2yz \\ w = 2x^2 + y^2 \end{cases}$$

(2 pts) **1/** Définir le tenseur des déformations en M(x,y,z).

(3 pts) **2/** Calculer les déformations principales ainsi que leurs directions au point (0,y,0).

(2 pts) **3/** En déduire les contraintes principales et leurs directions.

(2 pts) **4/** Calculer le vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point (0,y,0) pour lequel on a : $\sigma_n=0$ et $\tau=1$

Bon Courage
Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2017-2018

Tlemcen, le 19 Avril 2018.
Durée: 1h30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master1 (CMM & VOA)

Examen de rattrapage : La Théorie de l'Elasticité

Questions de Cours (4 pts)

(2 pts) **1/** Pour chaque cas suivant, donnez deux exemples physiques qui peuvent être étudiés en :
i/ Déformations planes ;
ii/ Contraintes planes.

(1 pt) **2/** Qu'est ce qu'un tenseur sphérique ? et un tenseur déviatorique ?

(1 pt) **3/** Que traduisent les conditions de compatibilité ?

Exercice 1 (8 pts)

En un point quelconque de la structure, le tenseur de contraintes est défini par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & \sqrt{14} \\ 0 & \sqrt{14} & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{daN/cm}^2$$

(4 pts) **1/** Déterminer les contraintes et directions principales.

(2 pts) **2/** Déterminer la contrainte maximale et sa direction.

(2 pts) **3/** Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z).

Exercice 2 (8 pts)

On considère un domaine pour lequel on suppose avoir le tenseur de déformations suivant :

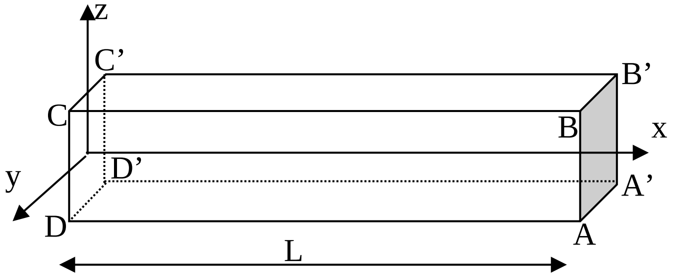
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & -\nu ax & 0 \\ 0 & 0 & -\nu ax \end{bmatrix}$$

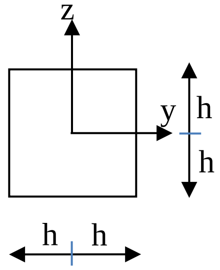
où "***a***" est une constante non nulle

(2pts) **1/** En admetant que le matériau a une loi élastique isotrope définie par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν, calculer son tenseur de contraintes associé.

(3pts) **2/** Le domaine est une poutre d'axe (x) et de section constante (figure). Déterminer le chargement sur chacune des faces de ce domaine.

(3pts) **3/** Calculer les composantes du vecteur déplacements (u,v,w).





Bon Courage
Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2017-2018

Dimanche 10 Juin 2018.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 Structures

Examen de rattrapage de l'élasticité (GS 811)

Questions de cours (4 pts)

(2 pts) **1/** Démontrer l'une des équations de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z}$$

(2 pts) **2/** Ecrire les 08 équations nécessaires dans le cas de déformations planes afin de déterminer les 08 inconnues.

Exercice 1 (9 pts)

Le mouvement d'un corps est défini pat le champ de déplacement :

$$\vec{D} = (x^2 + y^2)\vec{\imath} + (6z - 2xy)\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$$

(3 pts) **1/** Déterminer les tenseurs de déformations et de contraintes en un point quelconque $M(x, y, z)$.

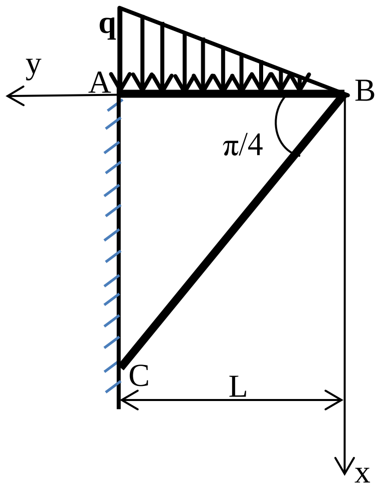
(2 pts) **2/** Déterminer les composantes des forces volumiques pour que les équations d'équilibre soient satisfaites.

(3 pts) **3/** Déterminer les contraintes et directions principales au point P(0,0,0).

(1 pt) **4/** Déterminer la contrainte de cisaillement maximum au point P.

Exercice 2 (7 pts)

Soit la poutre triangulaire ABC, de très petite dimension suivant l'axe z. Elle est soumise sur le côté AB à une charge triangulaire d'intensité maximale q .



Déterminer le tenseur des contraintes en utilisant la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

où a,b,c et d sont des constantes à déterminer. Il faut noter que le poids propre de la poutre **n'est pas négligé**.

Bon Courage
Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2018-2019

Jeudi 07 Mars 2019.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 : Constructions métalliques et mixtes & Voies et Ouvrages d'Art

Examen de Rattrapage de Théorie de l'élasticité (GM722/ GV711)

Questions (5 pts)

(1 pt) **1/** Que traduisent les conditions de compatibilité ?

(2 pts) **2/** Démontrer que la dilation cubique « $\boldsymbol{\varepsilon_V}$ » est la somme des déformations longitudinales

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

(2 pts) **3/** Citer les 08 équations disponibles pour étudier un problème en élasticité plane ? (Les 02 cas : contrainte et déformation planes)

Exercice 1 (7 pts)

Le tenseur de contraintes en un point quelconque **« P »** est défini par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0{,}7\alpha & 3{,}6\alpha & 0 \\ 3{,}6\alpha & 2{,}8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}6 \end{bmatrix}$$

(1 pt) **1/** Que représente l'état de contraintes pour $\alpha=0$?

(2 pts) **2/** Calculer les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,y).

(3 pts) **3/** Calculer en fonction de α, les contraintes principales et leurs directions.

(1 pt) **4/** Quelle serait la contrainte de cisaillement maximale ?

Exercice 2 (8 pts)

On considère un domaine pour lequel on suppose avoir le tenseur de déformations suivant :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & -\nu ax & 0 \\ 0 & 0 & -\nu ax \end{bmatrix}$$

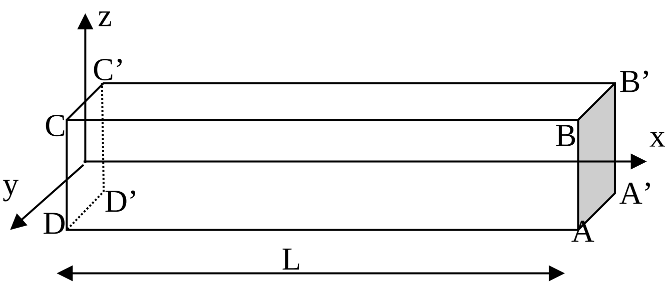
Où « $\boldsymbol{a}$ » est une constante

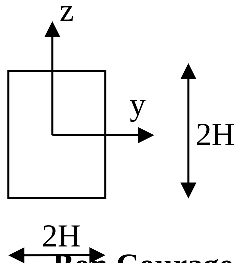
(1,5 pts) **1/** En admetant que le matériau a une loi élastique isotrope définie par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν, calculer son tenseur de contraintes associé.

(1pt) **2/** Que représente l'état de contrainte trouvé ?

(3pts) **3/** Le domaine est une poutre d'axe (x) et de section constante (figure). Déterminer le chargement sur chacune des faces de ce domaine.

(2,5 pts) **4/** Calculer les composantes du vecteur déplacements (u,v,w).





Bon Courage
Dr.Z BENADLA

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2018-2019

15 Septembre 2019.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 Structures

Examen de rattrapage de l'élasticité (GS811)

Questions de cours (4 pts)

(2 pts) **1/** Démontrer que la dilation cubique « ε_V » est la somme des déformations longitudinales

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

(2 pts) **2/** Quelle est la différence entre un état de contrainte plane et un état de déformation plane ? Donner un exemple pour chaque cas.

Exercice 1 (9 pts)

Sous l'action de charges extérieures, les déplacements en un point quelconque P(x,y,z) d'un corps sont définis comme suit :

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{4}kx - \frac{1}{4}ky \\ v = \frac{3}{4}kx - \frac{\sqrt{3}}{4}ky \\ w = 0 \end{cases}$$

k : Constante

(1,5 pts) **1/** Définir le tenseur de déformations en un point quelconque P(x,y,z)

(3 pts) **2/** Calculer les déformations et leurs directions principales au point P.

(1 pt) **3/** Représenter les directions principales graphiquement.

(2pts) **4/** En déduire les contraintes et directions principales au point P.

(1,5 pts) **5/** Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z).

Exercice 2 (7 pts)

Ecrire toutes les conditions aux limites en contraintes pour les deux cas suivants :

(4 pts) **1/** Une poutre console de longueur « L » et de section transversale (2a x 2a) soumise à un cisaillement uniforme τ_0 sur les faces (B C C' B') et (C D D'C'). Une charge croissante linéairement de «0 » à « q_0 » sur la face ABB'A' et une change uniformément répartie d'intensité « q_0 » sur la face (B C C' B') (Voir figure 1).

(3 pts) **2/** Une poutre triangulaire ABC, de très petite dimension suivant l'axe z. Elle est soumise sur le côté AB à une charge triangulaire d'intensité maximale q (Voir figure 2)

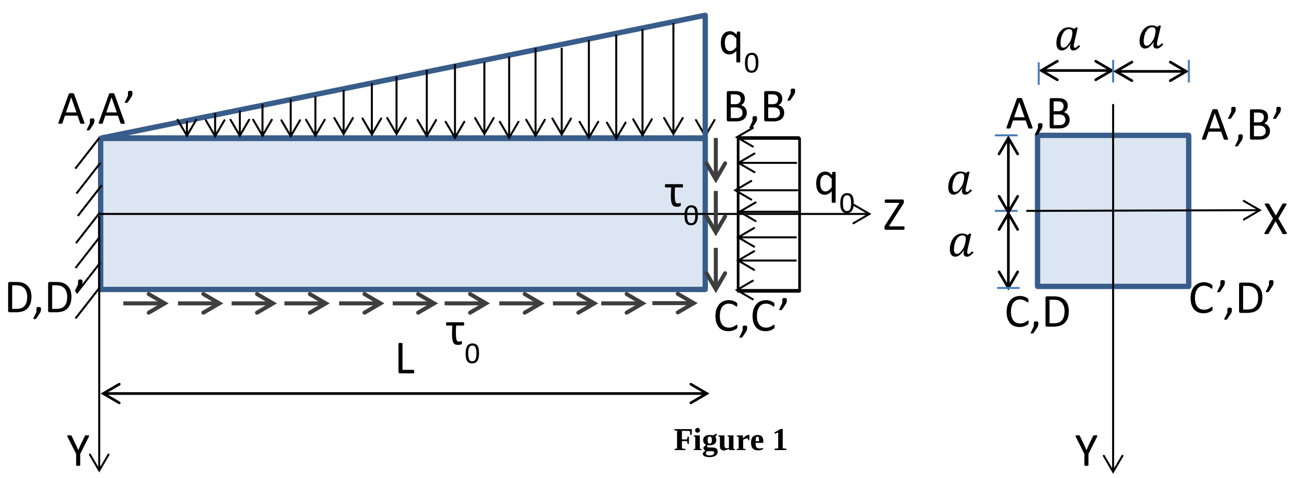


Figure 1

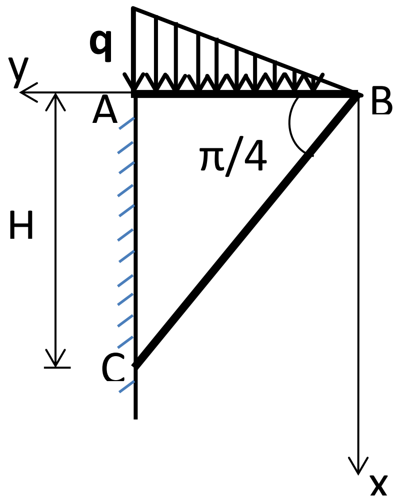


Figure 2

<u>Bon Courage</u>
<u>Dr.Z BENADLA</u>

Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Février 2020
Durée : 1h30 mn

2019-2020

EXAMEN DE RATTRAPAGE
Théorie d'élasticité
M1 VOA & CMM

Toute documentation est non autorisée

QUESTIONS DE COURS (6.00 pts)

(2.00 Pts) 1) Combien existe-t-il d'équations disponibles en théorie d'élasticité afin de résoudre un problème quelconque ? Enumérer-les.

(2.00 Pts) 2) Donner une définition claire, complète et précise des termes suivants :

Isotropie, Homogénéité, Linéarité, Elasticité.

(2.00 Pts) 3) Démontrer une des équations d'équilibre.

EXERCICE I (7.00 pts)

En un point donné d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} KN/m^2$$

(1.50 Pts) i) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et en partie déviatorique.
(3.50 Pts) ii) Déterminer les contraintes et directions principales du tenseur déviatorique. En déduire les contraintes et directions principales du tenseur initial $[\sigma]_M$
(2.00 Pts) iii) Calculer les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z).

EXERCICE II (7.00 pts)

Le vecteur déplacement en un point quelconque M(x,y,z) d'un corps est donné par ses composantes :

$$\begin{cases} u = 2xz \\ v = 2yz \\ w = 2x^2 + y^2 \end{cases}$$

(1.00 Pt) i) Définir le tenseur des déformations en M(x,y,z).

(3.00 Pts) ii) Calculer les déformations principales ainsi que leurs directions au point (0,y,0).

(1.50 Pts) iii) En déduire les contraintes principales et leurs directions.

(1.50 Pts) iv) Calculer le vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point (0,y,0) pour lequel on a : σ_n=0 et τ=1

BON COURAGE
Dr.Z BENADLA

4/ SOLUTIONS DES EPREUVES

(2017-2020)

4.1/ SOLUTIONS DES CCÔNTROLES CONTINUS

(2017-2020)

Université A. Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2017-2018

Tlemcen, le 26 Novembre 2017
Durée : 00h45 min
Aucun document n'est autorisé

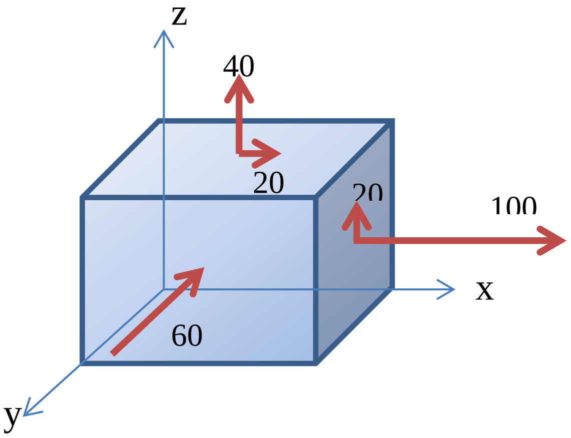
MASTER 1 : CMM & VOA

Correction du Contrôle Continu de Théorie de l'élasticité

En un point M d'un solide, dans le repère (X,Y,Z). Le tenseur des contraintes a pour valeurs :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 20 \\ 0 & -60 & 0 \\ 20 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad MPa$$

1/ Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes de ce tenseur. Quel est l'état de contraintes représenté ?



L'état de contraintes représenté :

- Une traction suivant les directions (X et Z)
- Une compression suivant la direction « Y »
- Un cisaillement dans le plan (X,Z)

2/ Déterminer les contraintes et directions principales au point M.

D'après le tenseur la contrainte $\sigma_1 = -60\ MPa$ est une contrainte principale dont sa direction est : $\begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$|[\sigma]_M - \sigma[I]| = 0 \iff \left|\begin{bmatrix} 100-\sigma & 20 \\ 20 & 40-\sigma \end{bmatrix}\right| = 0 \iff (100-\sigma)(40-\sigma) - 400 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_2 = 33{,}94\ MPa \\ \sigma_3 = 106{,}06\ MPa \end{cases}}$$

Les directions principales sont déterminées par $([\sigma]_M - \sigma_i[I])\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} Pour\ \sigma_2 = \ \ 33{,}94\ MPa \Longrightarrow \{l_2 \quad m_2 \quad n_2\} = \{\pm 0{,}289 \quad 0 \quad \mp 0{,}957\} \\ Pour\ \sigma_3 = 106{,}06\ MPa \Longrightarrow \{l_3 \quad m_3 \quad n_3\} = \{\pm 0{,}957 \quad 0 \quad \pm 0{,}289\} \end{cases}}$$

3/ Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) sur une facette $\vec{n}$ dont son vecteur unitaire « $\vec{n}$ » est de composantes : $\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

$$\begin{cases} q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ q_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ q_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_x = \frac{1}{3}(100 + 2\times 0 + 2\times 20) \\ q_y = \frac{1}{3}(0 + 2\times(-60) + 2\times 0) \\ q_z = \frac{1}{3}(20 + 2\times 0 + 2\times 40) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_x = \frac{140}{3}\ MPa \\ q_y = -\frac{120}{3}\ MPa \\ q_z = \frac{100}{3}\ MPa \end{cases}$$

$$\sigma^2 = {q_x}^2 + {q_y}^2 + {q_z}^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{9}((140)^2 + (-120)^2 + (100)^2) \Rightarrow \sigma^2 = \frac{44000}{9} = 4888{,}89$$

$$\sigma_n = lq_x + mq_y + nq_z = \frac{1}{9}(140 - 240 + 200) \Rightarrow \boxed{\sigma_n = \frac{100}{9} = 11{,}111\ MPa}$$

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - {\sigma_n}^2} = \sqrt{\frac{44000}{9} - \frac{10000}{81}} \Rightarrow \boxed{\tau = 69{,}032\ MPa}$$

Correction du Contrôle Continu
Théorie de l'élasticité (M1 structures)

Exercice : Les 3 composantes de déplacement d'un point quelconque $P(x,y,z)$ d'un corps sont :

$$\begin{cases} u = \frac{3}{4}kx - \frac{1}{4}ky \\ v = \frac{1}{4}kx - \frac{\sqrt{5}}{4}ky \\ w = 0 \end{cases}$$

où k est une cste non-nulle.

1/ Le Tenseur de déformations $[\varepsilon]$ (3pts)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{4}k \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sqrt{5}}{4}k \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{4}k + \frac{1}{4}k = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Le tenseur est donc :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 3/4\,k & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{4}k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2/ Le tenseur de contraintes $[\sigma]$: (2pts)

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v \quad , \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0 \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v \quad , \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = 0 \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v \quad , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

(0,5pt) $\quad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{4}(3-\sqrt{5})k$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{3}{2}kG + \frac{\lambda}{4}(3-\sqrt{5})k = k(1{,}5G + 0{,}19\lambda) \quad \text{(0,5pt)} \\ \sigma_y = -\frac{\sqrt{5}}{2}kG + \frac{\lambda}{4}(3-\sqrt{5})k = k(-1{,}1G + 0{,}19\lambda) \quad \text{(0,5pt)} \\ \sigma_z = 0{,}19k\lambda \quad \text{(0,5pt)} \end{cases}$$

$$[\sigma] = k \begin{bmatrix} 1{,}5G + 0{,}19\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}11G + 0{,}19\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}19\lambda \end{bmatrix}$$

3/ Contraintes principales : (1,5pt)

Le tenseur $[\sigma]$ est principal car les τ sont nuls donc les 3 contraintes σ_x, σ_y et σ_z sont principales,

Les directions :

$\sigma_1 = 1{,}5G + 0{,}19\lambda \longrightarrow (l_1, m_1, n_1) = (\pm 1, 0, 0)$ 0,5 pt

$\sigma_2 = -1{,}11G + 0{,}19\lambda \longrightarrow (l_2, m_2, n_2) = (0, \pm 1, 0)$ 0,5 pt

$\sigma_3 = 0{,}19\lambda \longrightarrow (l_3, m_3, n_3) = (0, 0, \pm 1)$ 0,5 pt

4/ Composantes de (σ_n, τ) dans la direction de la 1ère bissectrice de (x, z) :

1ère bissectrice du plan $(x,z) \rightarrow (l, m, n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 0,25pt

$$\begin{cases} \sigma_n = l q_x + m q_y + n q_z \\ \tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} \\ \sigma^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \end{cases}$$

$q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_x$ 0,25pt

$q_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} = 0$ 0,25pt

$q_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_z$ 0,25pt 0,5pt

$\sigma_n = \frac{1}{2}q_x + \frac{1}{2}q_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{k}{2}\left[1{,}5G + 0{,}38\lambda\right] \Rightarrow \boxed{\sigma_n = k(0{,}75G + 0{,}19\lambda)}$

$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_x^2 + \frac{1}{2}\sigma_z^2 = \frac{1}{2}\left[(1{,}5G + 0{,}19\lambda)^2 + (0{,}19\lambda)^2\right]k^2 \Rightarrow \sigma^2 = k^2(1{,}125G^2 + 0{,}285G\lambda + 0{,}036\lambda^2)$

$\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = 0{,}5625G^2 \Rightarrow \boxed{\tau = 0{,}75kG}$

0,5pt

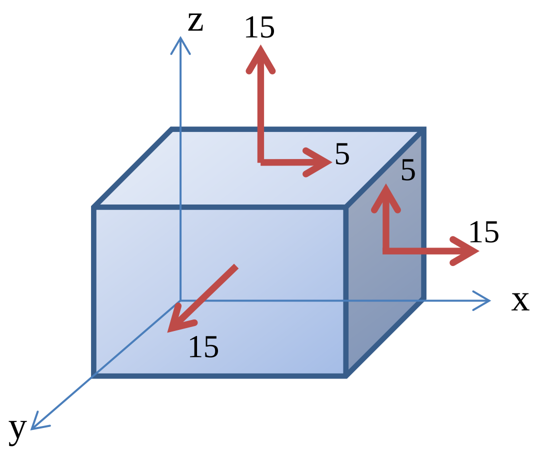
(9/2)

Correction du Contrôle Continu de Théorie de l'élasticité

En un point M d'un solide, dans le repère (X,Y,Z). Le tenseur des contraintes a pour valeurs :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad MPa$$

1/ Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes de ce tenseur. Quel est l'état de contraintes représenté ?



L'état de contraintes représenté :

- Une traction suivant les directions (X, Y et Z)
- Un cisaillement dans le plan (X,Z)

2/ Déterminer les contraintes et directions principales au point M.

D'après le tenseur la contrainte $\sigma_2 = 15\ MPa$ est une contrainte principale dont sa direction est :

$$\begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$|[\sigma]_M - \sigma[I]| = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{bmatrix} 15-\sigma & 5 \\ 5 & 15-\sigma \end{bmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (15-\sigma)^2 - 25 = 0 \\ \sigma^2 - 30\sigma + 200 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \sigma_1 = 10\ MPa \\ \sigma_3 = 20\ MPa \end{cases}}$$

Les directions principales sont déterminées par $([\sigma]_M - \sigma_i[I])\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\sigma_1 = 10\ MPa$

$$\begin{bmatrix} 15-10 & 0 & 5 \\ 0 & 15-10 & 0 \\ 5 & 0 & 15-10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} 5l_1 + 5n_1 = 0 \\ 5m_1 = 0 \\ 5l_1 + 5n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 = -n_1 \\ m_1 = 0 \\ {l_1}^2 + {m_1}^2 + {n_1}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \mp\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

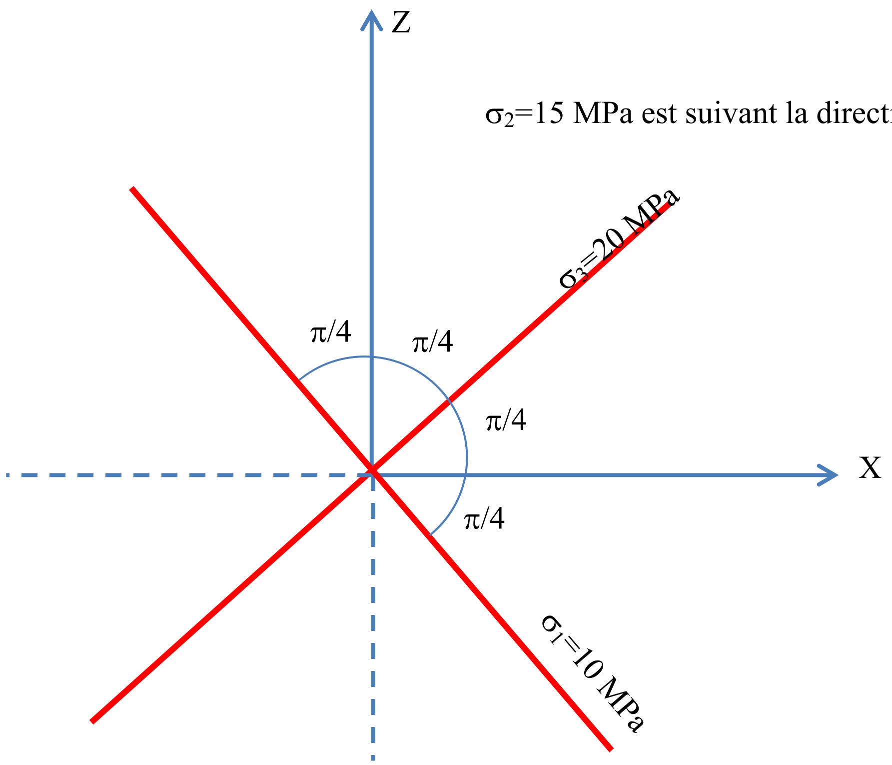
$\sigma_3 = 20\ MPa$

$$\begin{bmatrix} 15-20 & 0 & 5 \\ 0 & 15-20 & 0 \\ 5 & 0 & 15-20 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5l_3 + 5n_3 = 0 \\ -5m_3 = 0 \\ 5l_3 - 5n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3 = n_3 \\ m_3 = 0 \\ l_3{}^2 + m_3{}^2 + n_3{}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \pm\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} Pour\ \sigma_1 = 10\ MPa \Longrightarrow \{l_1 \quad m_1 \quad n_1\} = \{\pm\sqrt{2}/2 \quad 0 \quad \mp\sqrt{2}/2\} \\ Pour\ \sigma_2 = \ 15\ MPa \Longrightarrow \{l_2 \quad m_2 \quad n_2\} = \{0 \quad \pm 1 \quad 0\} \\ Pour\ \sigma_3 = 20\ MPa \Longrightarrow \{l_3 \quad m_3 \quad n_3\} = \{\pm\sqrt{2}/2 \quad 0 \quad \pm\sqrt{2}/2\} \end{cases}}$$

3/Représentation graphique des directions principales



4/ Calculer les composantes du vecteur contraintes (σ_n, τ) sur une facette $\vec{n}$ dont son vecteur unitaire « $\vec{n}$ » est de composantes : $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$.

$$\begin{cases} q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ q_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ q_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_x = \frac{1}{2}\left(15\sqrt{2} + 1 \times 0 + 1 \times 5\right) \\ q_y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \times 0 + 1 \times (15) + 1 \times 0\right) \\ q_z = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{2} + 1 \times 0 + 1 \times 15\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_x = \frac{15\sqrt{2}+5}{2} = 13{,}1066\ MPa \\ q_y = 7{,}5\ MPa \\ q_z = \frac{5\sqrt{2}+15}{2} = 11{,}0355\ MPa \end{cases}$$

$$\sigma^2 = q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = 349{,}816$$

$$\sigma_n = lq_x + mq_y + nq_z \Rightarrow \boxed{\sigma_n = 18{,}5355\ MPa}$$

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n{}^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 2{,}5\ MPa}$$

4.2/ SOLUTIONS DES EXAMENS FINAUX (2017-2020)

2017-2018

Correction Examen Final "Elasticité"
M1 CMM et VOA

exercice 1.

$$[\sigma]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

i/ Eq. d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 & \Rightarrow X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 & \Rightarrow Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 & \Rightarrow Z = 0 \end{cases}$$

forces de volume negligées

(1,0)

ii/ Contrainte et directions principales

$$\left([\sigma] - \sigma[I]\right)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\left|[\sigma] - \sigma[I]\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \alpha \\ 0 & -\sigma & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma[2\alpha^2 - \sigma^2] = 0$$

$$\sigma[2\alpha^2 - \sigma^2] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -\alpha\sqrt{2} \ ; \ \sigma_2 = 0 \ ; \ \sigma_3 = \alpha\sqrt{2}}$$

(1,5)

Direction principale

⊙ $\sigma = \sigma_1 = -\alpha\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{2} & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha\sqrt{2} & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\sqrt{2}\, l_1 + \alpha n_1 = 0 \\ \alpha\sqrt{2}\, m_1 - \alpha n_1 = 0 \\ \alpha l_1 - \alpha m_1 + \alpha\sqrt{2}\, n_1 = 0 \end{cases}$$

et $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{l_1 = \mp\frac{1}{2} \ ; \ m_1 = \pm\frac{1}{2} \ ; \ n_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(0,75)

⊙ $\sigma = \sigma_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha n_2 = 0 \\ -\alpha n_2 = 0 \\ \alpha l_2 + \alpha m_2 = 0 \end{cases}$$

avec $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{l_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ n_2 = 0}$$

(0,5)

• $\underline{\sigma = \sigma_3 = \alpha\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{2} & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha\sqrt{2} & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\sqrt{2}\,\ell_3 + \alpha n_3 = 0 \\ -\alpha\sqrt{2}\,m_3 - \alpha n_3 = 0 \\ \alpha \ell_3 - \alpha m_3 - \alpha\sqrt{2}\,n_3 = 0 \end{cases}$$

et $\ell_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$

$$\boxed{\ell_3 = \pm\frac{1}{2}\ ;\ m_3 = \mp\frac{1}{2}\ ;\ n_3 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ (0,75)

iii/ Cisaillement maximal

$$\tau_1 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|-\alpha\sqrt{2} - \alpha\sqrt{2}\right| \Rightarrow \tau_1 = \alpha\sqrt{2}$$

$$\tau_2 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|0 - \alpha\sqrt{2}\right| \Rightarrow \tau_2 = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2}$$

$$\tau_3 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \pm\frac{1}{2}\left|-\alpha\sqrt{2} - 0\right| \Rightarrow \tau_3 = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2}$$

$$\tau_{max} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \alpha\sqrt{2}}$$ (1,0)

iv/ 03 cercles de Mohr ou bien Tricercle de Mohr

$$\begin{cases} \sigma_n = \ell^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \\ \sigma^2 = \tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_1^2\ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^3 \\ \text{et}\quad \ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

03 equations à 03 inconnus "ℓ^2", "m^2" et "n^2" la resolution du système donne sachant que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$,

$$\ell^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$ (1,0)

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

2017-2018

les dénominateurs sont toujours positifs. Pour que "l^2", (m^2) et "n^2" soient positifs, il faut que les numérateurs soient positifs

Soit :

$$\begin{cases} \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) > 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0 \end{cases}$$

On peut réécrire ces inégalités sous la forme suivante

$$\begin{cases} \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \\ \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2 \\ \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$ (1,0)

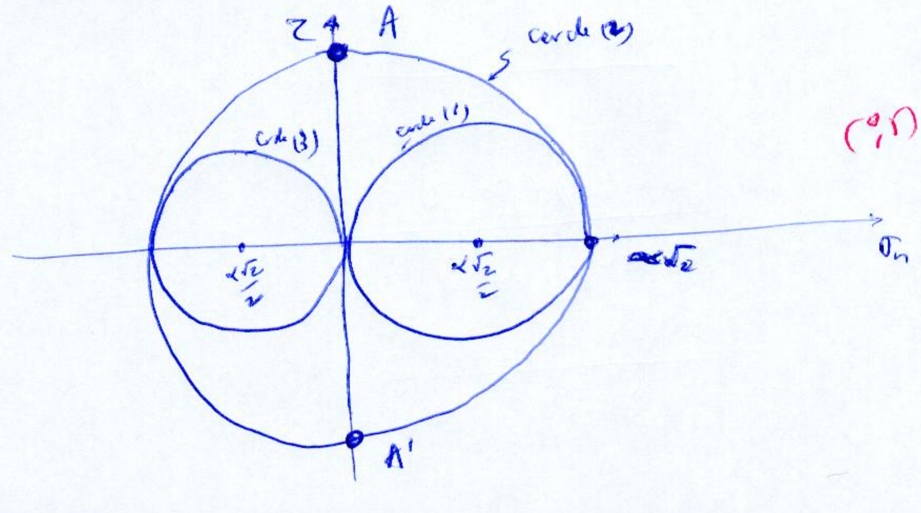
Dans le repère (σ_n, τ), on a l'ext. des éq. de cercle

1° cercle : centre $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$ et rayon $\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$

2° cercle : centre $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ et rayon $\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}$

3° cercle : centre $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ et rayon $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

Ainsi : avec $\sigma_1 = -\alpha\sqrt{2}$; $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \alpha\sqrt{2}$ on a :



(0,5)

Représenter sur ce tricercle, le point appartenant à la facette dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.

bissectrice (x,z) positif $\Rightarrow$ $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$, $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$

or $\sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$

et $\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = \left(\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2\right) - \left(l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3\right)^2$

avec $\sigma_1 = -\alpha\sqrt{2}$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \alpha\sqrt{2}$

et $l = +\frac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$ et $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on

On aura :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma_n = 0 \\ \tau = \pm\alpha\sqrt{2}\end{array}}$$

(1,0)

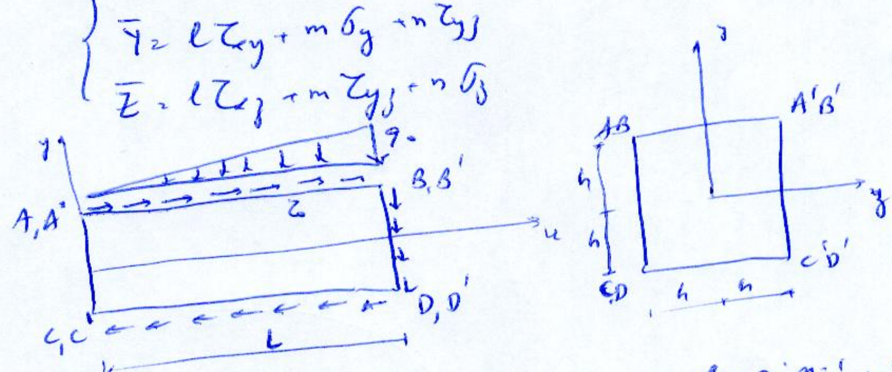
point sur figure points A et A'.

Exercice 2.

Conditions aux limites

$$\begin{cases}\bar{X} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy} + n\,\tau_{xz} \\ \bar{Y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y + n\,\tau_{yz} \\ \bar{Z} = l\,\tau_{xz} + m\,\tau_{yz} + n\,\sigma_z\end{cases}$$

Cas I :



$l = 0$; $m = 1$, $n = 0$

⊙ Face AA'BB' $0 \le x \le L$, $y = +h$, $-h \le z \le h$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{X} = \tau_{xy} = \tau_0 \\ \bar{Y} = \sigma_y = q_0 \dfrac{x}{L} \\ \bar{Z} = \tau_{yz} = 0\end{array}}$$

(1,0)

⊙ Fau $BB'DD'$ $\quad x = L;\ -h \le y \le h \quad -h \le z \le h \quad l = 1,\ m = n = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{X} = \sigma_x = 0 \\ \bar{Y} = \tau_{xy} = -\tau_0 \\ \bar{Z} = \tau_{xz} = 0\end{array}} \qquad (1,0)$$

⊙ Fau $CC'DD'$ $\quad 0 \le x \le L;\ \ y = -h,\ -h \le z \le h \quad l = 0,\ m = -1,\ n = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{X} = -\tau_{y} = -\tau_0 \\ \bar{Y} = -\sigma_y = 0 \\ \bar{Z} = -\tau_{yz} = 0\end{array}} \qquad (1,0)$$

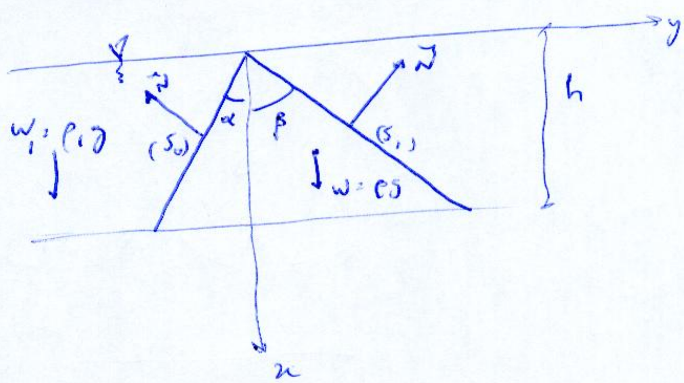
⊙ Fau $ABCD$ $\quad 0 \le x \le L,\ -h \le y \le h,\ z = -h \quad l = m = 0,\ n = -1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{X} = -\tau_{xz} = 0 \\ \bar{Y} = -\tau_{yz} = 0 \\ \bar{Z} = -\sigma_z = 0\end{array}} \qquad (0,K)$$

⊙ Fau $A'B'C'D'$ $\quad 0 \le x \le L;\ -h \le y \le h \quad z = h \quad l = m = 0,\ n = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{X} = \tau_{xz} = 0 \\ \bar{Y} = \tau_{yz} = 0 \\ \bar{Z} = \sigma_z = 0\end{array}} \qquad (0,K)$$

Cas II



2017-2018

⊙ Sur (S_0)

équation de la droite (S_0) $y + tg\alpha\, x = 0$

l'angle $= \frac{3\pi}{2} - \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha \\ m = \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy} + n\,\tau_{xz} \\ \bar{Y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y + n\,\tau_{yz} \\ \bar{Z} = l\,\tau_{xz} + m\,\tau_{yz} + n\,\sigma_z \end{cases} \Rightarrow$$

On est dans le plan x,y $\Rightarrow$ $\bar{X} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy}$

$\bar{Y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y$

d'où $\begin{cases} -\sin\alpha\,\sigma_x - \cos\alpha\,\tau_{xy} = \bar{X} \\ -\sin\alpha\,\tau_{xy} - \cos\alpha\,\sigma_y = \bar{Y} \end{cases}$

or $\begin{cases} \bar{X} = \rho_e g x \sin\alpha \\ \bar{Y} = \rho_e g x \cos\alpha \end{cases}$ la pression de l'eau

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sin\alpha\,\sigma_x - \cos\alpha\,\tau_{xy} = \rho_e g x \sin\alpha \\ -\sin\alpha\,\tau_{xy} - \cos\alpha\,\sigma_y = \rho_e g x \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} tg\alpha\,(\sigma_x + \rho_e g x) + \tau_{xy} = 0 \\ tg\alpha\,\tau_{xy} + (\sigma_y + \rho_e g x) = 0 \end{array}}$$ (1,75)

⊙ Sur (S_1) l'angle $= \frac{\pi}{2} + \beta$ $\Rightarrow$ $l = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\sin\beta$

$m = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \cos\beta$

$\bar{X} = \bar{Y} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} tg\beta\,\sigma_x - \tau_{xy} = 0 \\ tg\beta\,\tau_{xy} - \sigma_y = 0 \end{array}}$$ (1,75)

2018-2019

Correction de l'examen Final de Théorie de l'élasticité (GS 811) M1 structures

Exercice 1

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

i/ Décomposition du tenseur en partie sphérique et partie déviatorique

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]$$

$[\sigma_s]$: Tenseur sphérique
$[\sigma_d]$: Tenseur déviatorique

$\sigma_M = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = 12$

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix} =$$

(0,5 pt) $$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow [\sigma_d] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (0,5 pt)

(0,5 pt) La partie déviatorique représente un cisaillement dans les plans (x,y) et (x,z).

ii/ Contraintes et directions principales de $[\sigma_d]$

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma_d & 4 & 4 \\ 4 & -\sigma_d & 0 \\ 4 & 0 & -\sigma_d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sigma_d(32 - \sigma_d^2) = 0$$ (0,25 pt)

(0,5 pt) $\sigma_{d_1} = 0 \rightarrow (l_1, m_1, n_1) = (0, \pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$ (0,25 pt)

(0,5 pt) $\sigma_{d_2} = -4\sqrt{2} \rightarrow (l_2, m_2, n_2) = (\pm\sqrt{2}/2, \mp 1/2, \mp 1/2)$ (0,25 pt)

(0,5 pt) $\sigma_{d_3} = 4\sqrt{2} \rightarrow (l_3, m_3, n_3) = (\pm\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ (0,25 pt)

Les contraintes principales du tenseur initial $[\sigma]$ et leurs directions :

(0,75 pt) $\sigma = \sigma_d + \sigma_M \rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = 12, \quad \sigma_2 = 12 - 4\sqrt{2}, \quad \sigma_3 = 12 + 4\sqrt{2}}$

(0,25 pt) Les directions principales sont les mêmes que celle de $[\sigma_d]$

iii/ La contrainte de cisaillement maximum

$$\tau_{max} = \max(\tau_{1max}, \tau_{2max}, \tau_{3max})$$

$$\tau_{1max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = 2\sqrt{2} \quad , \quad \tau_{2max} = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = 4\sqrt{2}$$

$$\tau_{3max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = 4\sqrt{2}}$$ (0,25pt × 4)

iv/ Determination de $\vec{N}(l, m, n)$ avec $\sigma_n = 12 - 2\sqrt{2}$ et $\tau = 4\sqrt{3/2}$

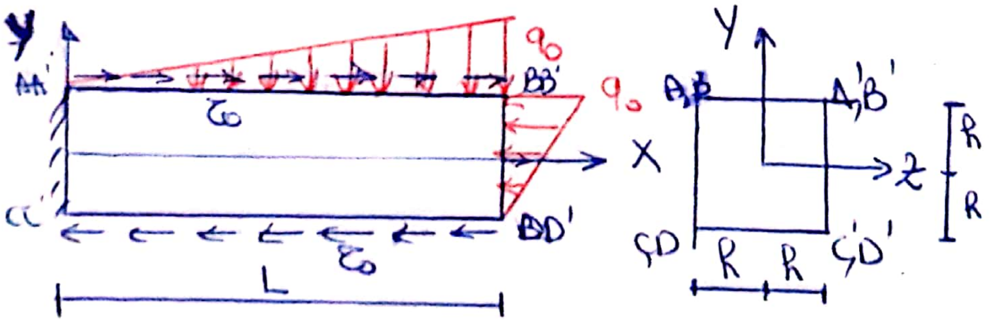
$$\begin{cases} \sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 = 12 - 2\sqrt{2} \\ \sigma^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = 176 - 48\sqrt{2} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$ (0,75pt)

$$\begin{cases} 12\,l^2 + (12 - 4\sqrt{2})m^2 + (12 + 4\sqrt{2})n^2 = 12 - 2\sqrt{2} \\ 144\,l^2 + (12 - 4\sqrt{2})^2 m^2 + (12 + 4\sqrt{2})^2 n^2 = 176 - 48\sqrt{2} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$ (0,75pt)

$$\boxed{l = 0, \quad m = \pm 0{,}866 \quad , n = \pm 0{,}5}$$ (1,5pt)

Exercice 2 : Conditions aux limites

Cas 5



$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ \bar{Z} = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases}$$

Z. BENADLA

Face ABB'A' : $\bar{X} = \tau_0$, $\bar{Y} = -q_0 \frac{x}{L}$, $\bar{Z} = 0$, $(l, m, n) = (0, 1, 0)$

$0 \leq x \leq L$, $y = h$, $-h \leq z \leq h$

Face sup

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= \tau_{xy} = \tau_0 \\ \bar{Y} &= \sigma_y = -q_0 \frac{x}{L} \\ \bar{Z} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned}}$$

(1pt)

Face CDD'C' : $\bar{X} = -\tau_0$, $\bar{Y} = 0$, $\bar{Z} = 0$, $(l, m, n) = (0, -1, 0)$
$0 \leq x \leq L$, $y = -h$, $-h \leq z \leq h$

Face inf

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= -\tau_{xy} = -\tau_0 \\ \bar{Y} &= -\sigma_y = 0 \\ \bar{Z} &= -\tau_{yz} = 0 \end{aligned}}$$

(1pt)

Face BDD'B' $\bar{X} = -\frac{q_0}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)$, $\bar{Y} = 0$, $\bar{Z} = 0$ $(l, m, n) = (1, 0, 0)$
$x = L$, $-h \leq y \leq h$, $-h \leq z \leq h$

Face de droite

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x = -\frac{q_0}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right) \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} = 0 \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} = 0 \end{aligned}}$$

(1pt)

Face ABCD $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$, $(l, m, n) = (0, 0, -1)$
$0 \leq x \leq L$, $-h \leq y \leq h$, $z = -h$

Face de devant

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= -\tau_{xz} = 0 \\ \bar{Y} &= -\tau_{yz} = 0 \\ \bar{Z} &= -\sigma_z = 0 \end{aligned}}$$

(0,5pt)

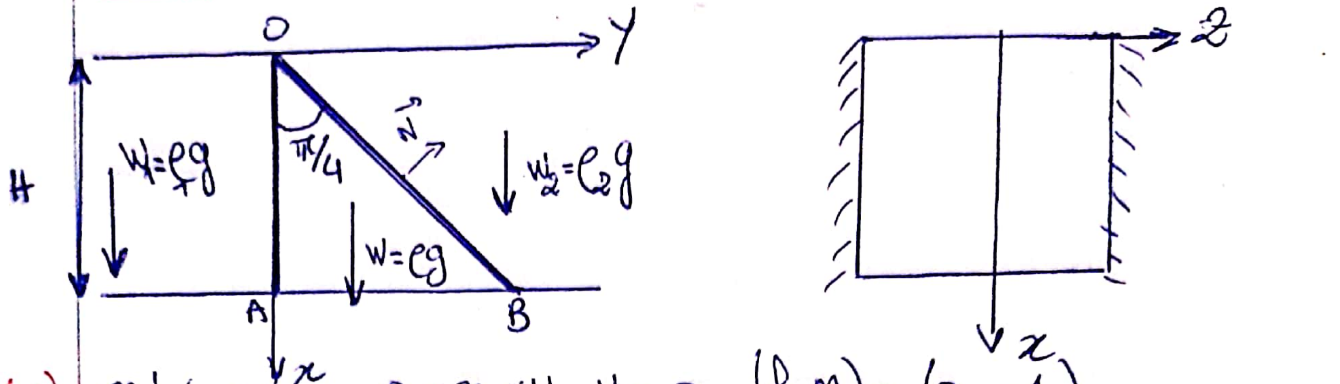
Face A'B'C'D' : $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$, $(l, m, n) = (0, 0, 1)$
$0 \leq x \leq L$, $-h \leq y \leq h$, $z = h$

Face arrière

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= \tau_{xz} = 0 \\ \bar{Y} &= \tau_{yz} = 0 \\ \bar{Z} &= \sigma_z = 0 \end{aligned}}$$

(0,5pt)

Cas II



(0,5pt) Côté OA : $0 \le x \le H$, $y=0$, $(l,m)=(0,-1)$

$$\bar{X} = 0 \quad , \quad \bar{Y} = \rho_1 g x$$

(1pt)
$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} = -\tau_{xy} = 0 \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y = -\sigma_y = -\rho_1 g x \end{cases}$$

(0,5pt) Côté OB $0 \le x \le H$, $y = x$, $(l,m) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\bar{X} = \rho_2 g x$, $\bar{Y} = -\rho_2 g x \cos 45° = -\rho_2 g x \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1pt)
$$\begin{cases} \bar{X} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho_2 g x \\ \bar{Y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_2 g x \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y$$

$$\tau_{xy} = \rho_2 g x + \sigma_x$$

Faculté de Technologie

Dpt Génie Civil

2019-2020

Janvier 2020

Correction Examen final

Elasticité Master M1 CMM+VOA

Exercice I (8,0 pts)

$$[\sigma]_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

i/ Forces de volume

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \Rightarrow X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow \text{non chargé}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \Rightarrow Z = 0 \qquad (1,0)$$

ii/ Contrainte et directions principales

$\sigma_i = -3$ est une contrainte principale de direct. principale $(0, \pm 1, 0)$ l'axe des y

$$([\sigma] - \sigma_i [I])\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 4 \\ 0 & -3-\sigma & 0 \\ 4 & 0 & -6-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\sigma)\left[(-3-\sigma)(-6-\sigma) - 0\right] + 4\left[0 - 4(-3-\sigma)\right] = 0$$

$$(-3-\sigma)\left[(-\sigma)(-6-\sigma) - 16\right] = 0 \Rightarrow \sigma^2 + 6\sigma - 16 = 0$$

$$-3-\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -3$$

$$\sigma^2 + 6\sigma - 16 = 0 \Rightarrow \sigma = -8 \text{ et } \sigma = +2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -8; \quad \sigma_2 = -3; \quad \sigma_3 = 2} \qquad (1,5)$$

Directions

- $\sigma = \sigma_1 = -8 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8l_1 + 4n_1 = 0 \\ 5m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \\ 4l_1 + 2n_1 = 0 \end{cases} \qquad \det = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4l_1 + 2n_1 = 0 \Rightarrow n_1 = -2l_1$$

$$\text{or } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow l_1^2 + 0 + 4l_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow l_1^2 = 1/5 \Rightarrow l_1 = \pm\sqrt{5}/5$$

2019-2020

$$\boxed{l_1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \; ; \; m_1 = 0 \; ; \; n_1 = \mp \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$ (1,0)

- $\sigma = \sigma_2 = -3 \Rightarrow \boxed{l_2 = 0 \; ; \; m_2 = \pm 1 \; ; \; n_2 = 0}$ (1,0)

- $\sigma = \sigma_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2l_3 + 4n_3 = 0 \\ -5m_3 = 0 \Rightarrow m_3 = 0 \\ 4l_3 - 8n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 \Rightarrow l_3 = 2n_3$$

or $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow 4n_3^2 + 0 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_3^2 = 1/5$

$n_3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \boxed{l_3 = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \; ; \; m_3 = 0 \; ; \; n_3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}}$ (1,0)

- contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \frac{1}{2}(-8+3) = \mp \frac{5}{2}$$

$$\tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm \frac{1}{2}(-8-2) = \mp 5 \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \pm 5}$$ (0,5)

$$\tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \frac{1}{2}(-3-2) = \mp \frac{5}{2}$$

iii/ $\sigma_n = 3/4$; $\tau = \frac{5\sqrt{3}}{4}$; calculer l, m, n

$$\begin{cases} \sigma_n = l q_x + m q_y + n q_z = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \\ \sigma^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 \\ \sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \end{cases}$$ 1,0

et $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\begin{cases} \sigma_n = -8l^2 - 3m^2 + 2n^2 = 3/4 \\ \sigma^2 = 64l^2 + 9m^2 + 4n^2 = \frac{9}{16} + \frac{75}{16} = \frac{84}{16} = \frac{21}{4} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1. \end{cases}$$

→ 3 eqs à → 3 inconnues l, m, n

On pose $L = l^2$; $M = m^2$; $N = n^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8L - 3M + 2N = 3/4 \\ 64L + 9M + 4N = 21/4 \\ L + M + N = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$L = l^2 = 0 \; ; \; M = m^2 = \frac{1}{4} \; ; \; N = n^2 = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{l = 0 \; ; \; m = \pm\frac{1}{2} \; ; \; n = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$ (1,0)

Exercice II (6,0)

$$\begin{cases} u = 3x - z \\ v = 0 \\ w = x - \sqrt{5}\, z \end{cases}$$

1/ Tenseur des déformations

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 3$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\sqrt{5}$

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$; $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -1+1 = 0$, ε_{xz}

$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$ (1,0)

ii/ Déformations et directions principales

$$\boxed{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 3 & l_1 = \pm 1 \,;\, m_1 = 0 \,,\, n_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0 & l_1 = 0 \,;\, m_1 = \pm 1 & n_1 = 0 \\ \varepsilon_3 = -\sqrt{5} & l_1 = 0 \,;\, m_1 = 0 & n_1 = \pm 1 \end{array}}$$ (3,0)

On est dans un repère principale

iii/ forces de volume

contraintes

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\,\varepsilon_x + \lambda\,\varepsilon_v \\ \sigma_y = 2G\,\varepsilon_y + \lambda\,\varepsilon_v \\ \sigma_z = 2G\,\varepsilon_z + \lambda\,\varepsilon_v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz} \end{array}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3 - \sqrt{5}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 6G + \lambda(3-\sqrt{5}) \\ \sigma_y = \lambda(3-\sqrt{5}) \\ \sigma_z = -2\sqrt{5}\,G + \lambda(3-\sqrt{5}) \end{cases}$$ (1,0)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array}\right\}$$

Toutes les contraintes sont constantes.

$$\Rightarrow \boxed{X = Y = Z = 0}$$ (1,0)

2019-2020

4.3/ SOLUTIONS DES EXAMENS DE RATTRAPAGES (2017-2020)

Université A. Belkaid - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

2016-2017

Tlemcen, 16 Mars 2017.
Durée: 1H30mn.
Aucun document n'est autorisé.

Master 1 Constructions métalliques et mixtes

Correction de l'Examen de rattrapage de l'élasticité (GM 722)

Exercice 1 (8 pts)

(3 pts) **1/** Les contraintes principales sont données par : $det\big[[\sigma]-\sigma[I]\big]=0$

$\boxed{\sigma_1=-40}$ est une contrainte principale suivant la direction de Z. (0,5pt)

Sa direction est $\boxed{l_1=0; \quad m_1=0; \quad n_1=\pm 1}$ (0,5pt)

Les deux autres contraintes sont déterminées par $\begin{vmatrix} 25-\sigma & 45 \\ 45 & 77-\sigma \end{vmatrix}=0$

$$(25-\sigma)(77-\sigma)-45(45)=0$$

Après résolution on obtient :

$\boxed{\sigma_2=-0{,}97\sim-1\ KN/m^2}$ (0,5pt) $\boxed{\sigma_3=102{,}97\sim 103\ KN/m^2}$ (0,5pt)

Les directions principales sont obtenues par résolution de $\big[[\sigma]-\sigma_i[I]\big]\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 25-\sigma_i & 45 & 0 \\ 45 & 77-\sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & -40-\sigma_i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour $\sigma_2=-1\ KN/m^2$ $\boxed{l_2=\pm\frac{1}{2}; \quad m_2=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad n_2=0}$ (0,5pt)

Pour $\sigma_3=103\ KN/m^2$ $\boxed{l_3=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad m_3=\pm\frac{1}{2}; \quad n_3=0}$ (0,5pt)

(2 pts) **2/** La contrainte de cisaillement maximale est obtenue par :

$$\tau_{max}=max\left(\frac{1}{2}\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right)_{i,j=1,2,3}$$

$\tau_1=\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|=52\frac{KN}{m^2}$; $\tau_2=\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_3|=71{,}5\ KN/m^2$

$\tau_3=\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|=19{,}5\ KN/m^2 \Rightarrow \boxed{\tau_{max}=71{,}5\ KN/m^2}$

(3 pts) **3/** Les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z). $l=\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m=0; \quad n=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les composantes de la contrainte agissant sur cette face inclinée sont :

$q_x=\frac{\sqrt{2}}{2}(25)=12{,}5\sqrt{2}\ KN/m^2$; (0,5pt)

$q_y=\frac{\sqrt{2}}{2}(45)=22{,}5\sqrt{2}\ KN/\ m^2$; (0,5pt)

$q_z=\frac{\sqrt{2}}{2}(-40)=-20\sqrt{2}\ KN/m^2$ (0,5pt)

L'intensité de la contrainte en un point sur cette facette inclinée est :

$\sigma=\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2}=46{,}1\ KN/m^2$ (0,5pt)

La composante normale de cette contrainte est :

$\sigma_n=lq_x+mq_y+nq_z=\frac{\sqrt{2}}{2}\big(12{,}5\sqrt{2}\big)+0\big(22{,}5\sqrt{2}\big)+\frac{\sqrt{2}}{2}\big(-20\sqrt{2}\big)$

$\boxed{\sigma_n=-7{,}5\ KN/m^2}$ (0,5pt)

La composante tangentielle est :

$\tau=\sqrt{\sigma^2-\sigma_n^2}=\sqrt{46{,}1^2-7{,}5^2}$ $\boxed{\tau=\pm 45{,}48\ KN/m^2}$ (0,5pt)

Exercice 2 (9 pts)

(2 pts)	**1/**	Le tenseur de déformations en M(x,y,z) : $$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}2z & 0 & 3x\\ 0 & 2z & 2y\\ 3x & 2y & 0\end{bmatrix}$$
(3 pts)	**2/**	Les déformations principales au point P(0,y,0). Au point P, le tenseur s'écrit : $[\varepsilon]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2y\\ 0 & 2y & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}-\varepsilon & 2y\\ 2y & -\varepsilon\end{vmatrix}=0$ les déformations principales sont donc : $\boxed{\varepsilon_1=-2y}$ (0,5pt) $\boxed{\varepsilon_2=0}$ (0,5pt) $\boxed{\varepsilon_3=2y}$ (0,5pt) Les directions principales sont obtenues par résolution de $[[\varepsilon]-\varepsilon_i[I]]\begin{Bmatrix}l_i\\ m_i\\ n_i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$ $$\begin{bmatrix}-\varepsilon_i & 0 & 0\\ 0 & -\varepsilon_i & 2y\\ 0 & 2y & -\varepsilon_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}l_i\\ m_i\\ n_i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$ Pour $\varepsilon_1=-2y \Longrightarrow$ $\boxed{l_1=0;\quad m_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};n_1=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (0,5pt) Pour $\varepsilon_2=0 \Longrightarrow$ $\boxed{l_2=\pm1;\ m_2=0;\quad n_2=0}$ (0,5pt) Pour $\varepsilon_3=2y \Longrightarrow$ $\boxed{l_3=0;\quad m_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ n_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (0,5pt)
(2 pts)	**3/**	les contraintes principales et leurs directions $\sigma_1=2G\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_v$; $\sigma_2=2G\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_v$ et $\sigma_3=2G\varepsilon_3+\lambda\varepsilon_v$ avec $\varepsilon_v=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$ (0,25pt) Ce qui donne : $\boxed{\sigma_1=-4Gy\ ;\ \sigma_2=0 \text{ et } \sigma_3=4Gy}$ (0,75pt) Leurs directions sont les mêmes que celles des déformations principales (1pt) c'est-à-dire : Pour $\sigma_1=-4Gy \Longrightarrow$ $\boxed{l_1=0;\quad m_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};n_1=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}}$ Pour $\sigma_2=0 \Longrightarrow$ $\boxed{l_2=\pm1;\ m_2=0;\quad n_2=0}$ Pour $\sigma_3=4Gy \Longrightarrow$ $\boxed{l_3=0;\quad m_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ n_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$
(2 pts)	**4/**	Le vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point (0,y,0) pour lequel on a : σ_n=0 et τ=1 $\sigma_n=lq_1+mq_2+nq_3=0\rightarrow\tau^2=\sigma^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$ Avec : $\begin{cases}q_1=l\sigma_1=-4lGy\\ q_2=m\sigma_2=0\\ q_3=n\sigma_3=4nGy\end{cases}$ (0,75pt) Ce qui donne : $\begin{cases}\sigma_n=l^2\sigma_1+n^2\sigma_3=4Gy(-l^2+n^2)=0\\ \sigma^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2=16G^2y^2(l^2+n^2)=1\\ l^2+m^2+n^2=1\end{cases}$ (0,75pt) $\Rightarrow\begin{cases}l=-n=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4Gy}\right)\\ m=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{4Gy}\right)^2}\end{cases}$ pour y≠0 (0,5pt) Si y=0 le vecteur normal $\vec{n}$ prend toutes les directions.

Master 1 Structures

Correction de l'Examen de rattrapage de l'élasticité (GS 811)

Exercice 1 (9 pts)

Le mouvement d'un corps est défini pat le champ de déplacement :

$$\vec{D} = (x^2 + y^2)\vec{\imath} + (6z - 2xy)\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$$

(3 pts) **1/** Détermination des tenseurs de déformations et de contraintes en un point quelconque M(x,y,z) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & -2x & 3 \\ 0 & 3 & -2z \end{bmatrix} \qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} 4Gx - 2\lambda z & 0 & 0 \\ 0 & -4Gx - 2\lambda z & 6G \\ 0 & 6G & -2z(2G+\lambda) \end{bmatrix}$$

(1,5pt) (1,5pt)

(2 pts) **2/** Détermination des composantes de forces de volume pour que les équations d'équilibre soient satisfaites :

$$\text{(0,5pt)}\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} X = -4G \\ Y = 0 \\ Z = -2(2G+\lambda) \end{cases}} \text{(1,5pt)}$$

(3 pts) **3/** Les contraintes et directions principales au point P(0,0,0) :

$\sigma_1 = -6G$ sa direction est $l_1 = 0;$ $m_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};$ $n_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1pt)

$\sigma_2 = 0$ sa direction est $l_2 = \pm 1;$ $m_2 = 0;$ $n_2 = 0$ (1pt)

$\sigma_3 = 6G$ sa direction est $l_3 = 0;$ $m_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};$ $n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1pt)

(1pt) **4/** Détermination de la contrainte de cisaillement maximum au point P :

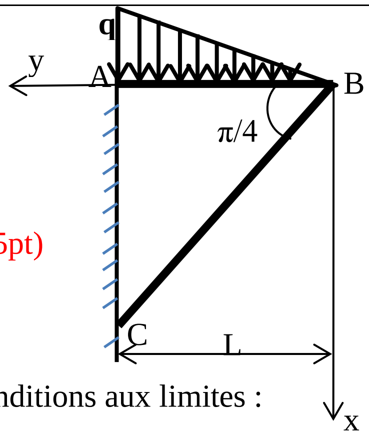
$$\tau_{max} = max\left(\frac{1}{2}|\sigma_i - \sigma_j|\right)_{i,j=1,2,3}$$

$\tau_1 = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = 3G$; $\tau_2 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = 6G$

$\tau_3 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = 3G \Longrightarrow \boxed{\tau_{max} = 6G}$

Exercice 2 (7 pts)

Détermination du tenseur de contraintes en utilisant la fonction d'Airy :
$\varphi(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$



1/ Vérification que $\nabla^4\varphi = 0$:

$\nabla^4\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0$ C.V. (0,5pt)

2/ Calcul des contraintes à partir de la fonction d'Airy :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \rho g x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_x = 2cx + 6dy \\ \sigma_y = 6ax + 2by \\ \tau_{xy} = -2bx - 2cy - \rho g x \end{cases}$$ (1,5pt)

3/ Détermination des constantes a, b, c et d à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{cases}$$ (0,5pt)

Côté AB : x=0, 0≤y≤L , (l,m)=(-1,0), $\bar{X} = -\frac{q}{L}y$; $\bar{Y} = 0$ (0,25pt x 5)

$$\begin{cases} \bar{X} = -\sigma_x = -6dy = -\frac{q}{L}y \\ \bar{Y} = -\tau_{xy} = -2cy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{q}{6L} \\ c = 0 \end{cases}$$ (0,25pt x 2)

Côté BC : x=y, 0≤y≤L , (l,m)=($\frac{\sqrt{2}}{2}$,-$\frac{\sqrt{2}}{2}$), $\bar{X} = 0$; $\bar{Y} = 0$ (0,25pt x 5)

$$\begin{cases} \bar{X} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} = 0 \\ \bar{Y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{L} + \rho g\right) \\ a = \frac{1}{3}\left(\frac{q}{L} + \frac{\rho g}{2}\right) \end{cases}$$ (0,25pt x 2)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{q}{L}y \\ \sigma_y = \frac{q}{L}(2x - y) + \rho g(x - y) \\ \tau_{xy} = \frac{q}{L}x \end{cases} \Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{q}{L}y & \frac{q}{L}x \\ \frac{q}{L}x & \frac{q}{L}(2x - y) + \rho g(x - y) \end{bmatrix}$$ (1pt)

et $\varphi(x,y) = \frac{1}{3}\left(\frac{q}{L} + \frac{\rho g}{2}\right)x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{L} + \rho g\right)x^2y + + \frac{q}{6L}y^3$

Master 1 : Constructions métalliques et mixtes & Voies et Ouvrages d'Art

Correction de l'Examen de Rattrapage de l'élasticité (GM722/ GV711)

Exercice 1 (7 pts)

Le tenseur de contraintes en un point quelconque « **P** » est défini par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0{,}7\alpha & 3{,}6\alpha & 0 \\ 3{,}6\alpha & 2{,}8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}6 \end{bmatrix}$$

1/ L'état de contraintes pour α=0 :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}6 \end{bmatrix}$$ Il s'agit d'une traction suivant l'axe « z »

2/ les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,y).

la première bissectrice du plan (x,y) $\Rightarrow \{l, m, n\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\}$

$$\begin{cases} q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ q_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ q_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_x = 3{,}04\ \alpha \\ q_y = 4{,}53\ \alpha \\ q_z = 0 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = {q_x}^2 + {q_y}^2 + {q_z}^2 \Rightarrow \sigma^2 = 29{,}76\ \alpha^2$$

$$\sigma_n = lq_x + mq_y + nq_z \Rightarrow \boxed{\sigma_n = 5{,}35\ \alpha}$$

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - {\sigma_n}^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 1{,}05\ \alpha}$$

3/ Les contraintes principales et leurs directions en fonction de α :

D'après le tenseurde contraintes, la contrainte $\sigma_3 = 7{,}6$ est une contrainte principale dont sa direction est : $\begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix}$

$$|[\sigma]_M - \sigma[I]| = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{bmatrix} 0{,}7\alpha - \sigma & 3{,}6\alpha \\ 3{,}6\alpha & 2{,}8\alpha - \sigma \end{bmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow (0{,}7\alpha - \sigma)(2{,}8\alpha - \sigma) - (3{,}6\alpha)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \sigma_1 = -2\ \alpha \\ \sigma_2 = 5{,}5\ \alpha \end{cases}}$$

Les directions principales sont déterminées par $([\sigma]_M - \sigma_i[I])\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} Pour\ \sigma_2 = \ -2\ \alpha \ \Rightarrow \{l_2 \quad m_2 \quad n_2\} = \{\pm 0{,}8 \quad \mp 0{,}6 \quad 0\} \\ Pour\ \sigma_3 = 5{,}5\ \alpha \ \Rightarrow \{l_3 \quad m_3 \quad n_3\} = \{\pm 0{,}6 \quad \pm 0{,}8 \quad 0\} \end{cases}}$$

4/ La contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{max} = \max\left(\frac{1}{2}\left|\sigma_i - \sigma_j\right|\right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{1max} = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = |3{,}75\alpha| \\ \tau_{2max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = \frac{1}{2}|7{,}6 - 5{,}5\alpha| = |3{,}8 - 2{,}75\alpha| \\ \tau_{3max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2}|7{,}6 + 2\alpha| = |3{,}8 + \alpha| \end{cases}$$

La valeur maximale de cisaillement dépend de la valeur de α :

$$\tau_{max} = \tau_{1max} > (\tau_{2max}, \tau_{3max}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0{,}58 \\ \alpha > 1{,}38 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha > 1{,}38}$$

$$\tau_{max} = \tau_{2max} > (\tau_{1max}, \tau_{3max}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0{,}58 \\ \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha < 0}$$

$$\tau_{max} = \tau_{3max} > (\tau_{1max}, \tau_{2max}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 1{,}38 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{0 < \alpha < 1{,}38}$$

$$\boxed{\begin{cases}]-\infty\,, \quad \mathbf{0}\ ] \Rightarrow \boldsymbol{\tau_{max} = \tau_{2max}} \\ [\mathbf{0}\,, \quad \mathbf{1{,}38}\ ] \Rightarrow \boldsymbol{\tau_{max} = \tau_{3max}} \\ [\mathbf{1{,}38}\ , +\infty\ [\Rightarrow \boldsymbol{\tau_{max} = \tau_{1max}} \end{cases}}$$

Exercice 2 (8 pts)

On considère un domaine pour lequel on suppose avoir le tenseur de déformations suivant :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & -\nu ax & 0 \\ 0 & 0 & -\nu ax \end{bmatrix}$$

1/ Le tenseur de contraintes associé est donné par la loi de Hooke sous la forme de Lamé.

$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v$

$\sigma_x = 2\frac{E}{2(1+\nu)}ax + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}ax(1-2\nu)$

$\sigma_x = Eax \qquad \sigma_y = 0 \qquad \sigma_z = 0$

$\tau_{xy} = \gamma_{xy}/G = 0 \qquad \tau_{yz} = \gamma_{yz}/G = 0 \qquad \tau_{xz} = \gamma_{xz}/G = 0$

2/ L'état de contrainte trouvé est un état de contrainte uni axial (traction ou compression) suivant la direction x.

3/ Le chargement sur chacune des faces de ce domaine est donné par les équations de conditions aux limites.

$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}$

$\bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}$

$\bar{Z} = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z$

- **Face ABCD :** $0 \le x \le L;\quad y = H;\quad -H \le z \le H$; $l = 0;\ m = 1;\ n = 0$;

Le chargement sur cette face est : $\boldsymbol{\bar{X} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Y} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Z} = 0}$

- **Face A'B'C'D' :** $0 \le x \le L;\quad y = -H;\quad -H \le z \le H$; $l = 0;\ m = -1;\ n = 0$

Le chargement sur cette face est : $\boldsymbol{\bar{X} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Y} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Z} = 0}$

- **Face BB'C'C :** $0 \le x \le L;\ -H \le y \le H;\quad z = H$; $l = 0;\ m = 0;\ n = 1$

Le chargement sur cette face est : $\boldsymbol{\bar{X} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Y} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Z} = 0}$

- **Face AA'D'D :** $0 \le x \le L;\ -H \le y \le H;\quad z = -H$; $l = 0;\ m = 0;\ n = -1$

Le chargement sur cette face est : $\boldsymbol{\bar{X} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Y} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Z} = 0}$

- **Face CC'D'D :** $x = 0;\ -H \le y \le H;\quad -H \le z \le H$; $l = -1;\ m = 0;\ n = 0$

Le chargement sur cette face est : $\boldsymbol{\bar{X} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Y} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Z} = 0}$

- **Face ABB'A' :** $x = L;\ -H \le\ y \le H;\quad -H \le z \le H$; $l = 1;\ m = 0;\ n = 0$

Le chargement sur cette face est : $\boldsymbol{\bar{X} = EaL};\quad \boldsymbol{\bar{Y} = 0};\quad \boldsymbol{\bar{Z} = 0}$

4/ Les déplacements (u,v,w)

- $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = ax \Rightarrow u(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2 + f_1(y,z)$ / $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu ax \Rightarrow v(x,y,z) = -\nu axy + f_2(x,z)$
- $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu ax \Rightarrow w(x,y,z) = -\nu axz + f_3(x,y)$
- $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x,z)}{\partial x} - \nu ay = 0$

-

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_2(x,z)}{\partial x} = g_1(z) \\ \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = vay - g_1(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f_2(x,z) = g_1(z).x + g_2(z)} \\ \boldsymbol{f_1(y,z) = v\frac{a}{2}y^2 - g_1(z).y + g_3(z)} \end{cases}$$

- $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -g'_1(z).y + g'_3(z) - vaz + \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = g'_1(z).y - g'_3(z) + vaz \Rightarrow \begin{cases} c_1 = g'_1(z) \\ c_2 = -g'_3(z) + vaz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{g_1(z) = c_1.z + D_1} \\ \boldsymbol{g_3(z) = v\frac{a}{2}z^2 - c_2.z + D_2} \\ \boldsymbol{f_3(x,y) = c_1xy + c_2x + g_4(y)} \end{cases}$$

- $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2c_1.x + g'_2(z) + g'_4(y) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ g'_2(z) + g'_4(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'_2(z) = c_3 \\ g'_4(y) = -c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_2(z) = c_3.z + D_3 \\ g_4(y) = -c_3.y + D_4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{u(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2 + v\frac{a}{2}y^2 + v\frac{a}{2}z^2 - D_1y - C_2z + D_2} \\ \boldsymbol{v(x,y,z) = -vaxy + D_1x + C_3z + D_3} \\ \boldsymbol{w(x,y,z) = -vaxz + C_2x - C_3y + D_4} \end{gathered}}$$

2018-2019

Correction de l'examen de Rattrapage de GS811

Exercice 1

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{4} kx - \frac{1}{4} ky \\ v = \frac{3}{4} kx - \frac{\sqrt{3}}{4} ky \\ w = 0 \end{cases}$$

k : cste

1/ Tenseur de déformations en un point $P(x, y, z)$

0,25pt x6

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{4} k \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{4} k \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} k$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} k & \frac{1}{4} k & 0 \\ \frac{1}{4} k & -\frac{\sqrt{3}}{4} k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2/ Déformations et directions principales au pt P

0,5pt * $\varepsilon_1 = 0$ est une déformation principale, sa direction est $(0, 0, \pm 1)$ 0,5pt

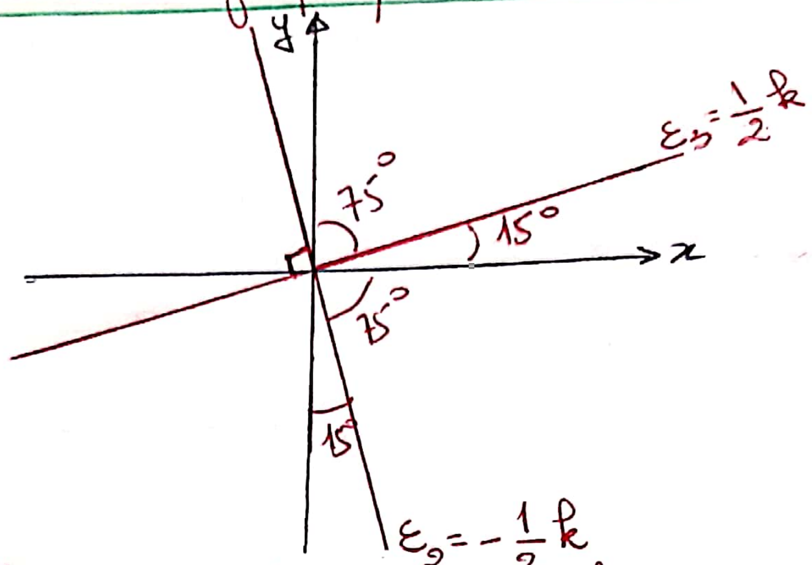
0,5pt * $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} k \rightarrow (l_2, m_2, n_2) = (\pm 0{,}258 ; \mp 0{,}966, 0)$ 0,5pt

0,5pt * $\varepsilon_3 = \frac{1}{2} k \rightarrow (l_3, m_3, n_3) = (\pm 0{,}966 ; \pm 0{,}258, 0)$ 0,5pt

Les 2 directions (2) et (3) sont dans le plan (x, y). La direction (1) est suivant l'axe z.

2018-2019

3/ Représentation graphique des directions principales



(1pt)

4/ Contraintes et directions principales

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_V \\ \sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_V \\ \sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon_V \end{cases}$$ avec $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ (0,25pt)

(0,5pt×3)

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \rightarrow (l_1, m_1, n_1) = (0, 0, \pm 1) \\ \sigma_2 = -kG \rightarrow (l_2, m_2, n_2) = (\pm 0{,}258, \mp 0{,}966, 0) \\ \sigma_3 = kG \rightarrow (l_3, m_3, n_3) = (\pm 0{,}966 ; \pm 0{,}258, 0) \end{cases}$$ (0,25pt)

5/ Les Composantes (σ_n, τ) dans la direction de la première bissectrice de (x,z)

1ère bissectrice de $(x,z) \rightarrow (l, m, n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (0,25pt)

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}kG & \frac{kG}{2} & 0 \\ \frac{kG}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}kG & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ q_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ q_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases}$$ (0,25pt)

$\boxed{\sigma_n = l q_x + m q_y + n q_z}$ (0,25pt) $\boxed{\sigma^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$ (0,25pt) $\boxed{\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2}$

$$\begin{cases} q_x = \ell\sigma_x \\ q_y = \ell\tau_{xy} \\ q_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_n = \ell^2\sigma_x = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} kG = \frac{\sqrt{3}}{4} kG \\ \sigma^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \ell^2\sigma_x^2 + \ell^2\tau_{xy}^2 = \frac{1}{2} k^2G^2 \end{cases}$$

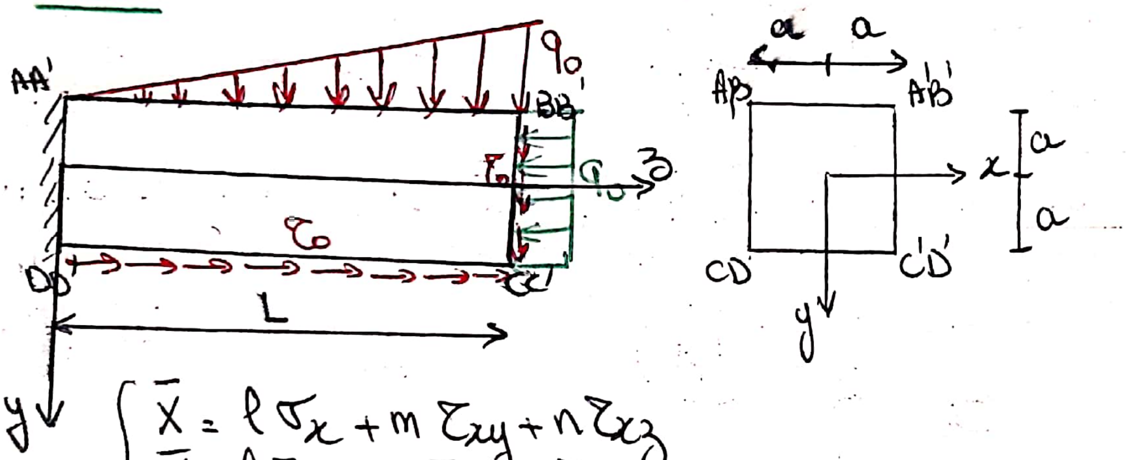
$$\boxed{\sigma_n = \frac{\sqrt{3}}{4} kG}$$ 0,25pt

$$\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = \frac{5}{16} k^2G^2 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\sqrt{5}}{4} kG}$$ (0,25pt)

Exercice 2

Ecrire les conditions aux limites pour les 2 cas suivants,

Cas 1



$$\begin{cases} \bar{X} = \ell\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ \bar{Y} = \ell\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ \bar{Z} = \ell\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases}$$

Face AA'B'B : $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = q_0\frac{z}{L}$, $\bar{Z} = 0$ $(\ell, m, n) = (0, -1, 0)$

$-a \leq x \leq a$ $y = -a$ $0 \leq z \leq$

$$\begin{cases} \bar{X} = -\tau_{xy} = 0 \\ \bar{Y} = -\sigma_y = q_0\frac{z}{L} \\ \bar{Z} = -\tau_{yz} = 0 \end{cases}$$ 1pt

$$\boxed{\tau_{xy} = 0 \;;\; \sigma_y = -q_0\frac{z}{L} \;,\; \tau_{yz} = 0}$$

Face CC'D'D : $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 0$, $\bar{Z} = \tau_0$, $(\ell, m, n) = (0, 1, 0)$

$-a \leq x \leq a$, $y = a$, $0 \leq z \leq L$

$$\boxed{\begin{cases} \bar{X} = \tau_{xy} = 0 \\ \bar{Y} = \sigma_y = 0 \\ \bar{Z} = \tau_{yz} = \tau_0 \end{cases}}$$ 1pt

Face ABCD : $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$ $\quad (l,m,n) = (-1,0,0)$

$x = -a \quad -a \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq L$

$$\boxed{\begin{cases} \bar{X} = -\sigma_x = 0 \\ \bar{Y} = -\tau_{xy} = 0 \\ \bar{Z} = -\tau_{xz} = 0 \end{cases}}$$

0,5pt

Face A'B'C'D' : $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0, (l,m,n) = (1,0,0)$

$x = a, \quad -a \leq y \leq a \quad 0 \leq z \leq L$

$$\boxed{\begin{cases} \bar{X} = \sigma_x = 0 \\ \bar{Y} = \tau_{xy} = 0 \\ \bar{Z} = \tau_{xz} = 0 \end{cases}}$$

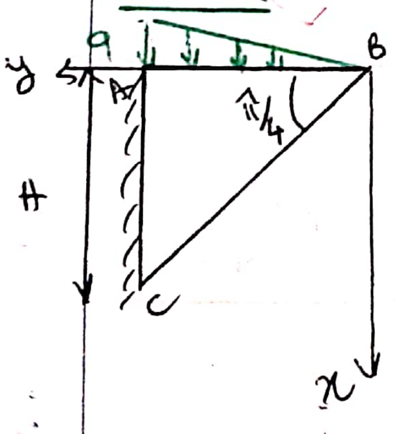
0,5pt

Face BB'C'C : $\bar{X} = 0, \ \bar{Y} = \tau_0, \ \bar{Z} = -q_0, \ (l,m,n) = (0,0,1)$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= \tau_{xz} = 0 \\ \bar{Y} &= \tau_{yz} = \tau_0 \\ \bar{Z} &= \sigma_z = -q_0 \end{aligned}}$$

1pt

Cas 2 :



$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{cases}$$

Côte AB : $\bar{X} = \dfrac{qy}{H}, \ \bar{Y} = 0$ 0,5pt

$(l,m) = (-1,0), \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq H$

$$\begin{cases} \bar{X} = -\sigma_x = q\dfrac{y}{H} \\ \bar{Y} = -\tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

1pt

Côté BC : $\bar{X} = \bar{Y} = 0, \ l = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, m = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 0,5pt

$0 \leq x \leq H, \quad y = x$

1pt

$$\begin{cases} \bar{X} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sigma_x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} = 0 \\ \bar{Y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sigma_y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy}}$$

(P4)

2019-2020

Master 1 : Constructions métalliques et mixtes & Voies et Ouvrages d'Art

Correction de l'Examen de Rattrapage de l'élasticité (GM722/ GV711)

Exercice 1 (7 pts)

(1,5 pts) **1/** Partie sphérique et partie déviatorique :

$[\sigma_M] = [\sigma_S] + [\sigma_d]$ avec $\sigma_m = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}$ (0,5pt)

$$[\sigma]_S = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ (0,5pt)}$$

$$\text{et } [\sigma]_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_x - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} \text{ (0,5pt)}$$

(3,5 pts) **2/** Les contraintes principales sont données par : $det\big[[\sigma_d] - \sigma[I]\big] = 0$

$\boxed{\sigma_{d1} = 0}$ est une contrainte principale suivant la direction de X. (0,5pt)

Sa direction est $\boxed{l_1 == \pm 1; \quad m_1 = 0; \quad n_1 = 0}$ (0,25pt)

Les deux autres contraintes sont déterminées par $\begin{vmatrix} 6-\sigma & 4 \\ 4 & -6-\sigma \end{vmatrix} = 0$

$$(6-\sigma)(-6-\sigma) - 16 = 0$$

Après résolution on obtient :

$\boxed{\sigma_{d2} = -2\sqrt{13}\,KN/m^2}$ (0,5pt) $\boxed{\sigma_{d3} = 2\sqrt{13}\,KN/m^2}$ (0,5pt)

Les directions principales sont obtenues par résolution de $\big[[\sigma] - \sigma_i[I]\big]\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & 6-\sigma_i & 4 \\ 0 & 4 & -6-\sigma_i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour $\sigma_{d2} = -2\sqrt{13}\,KN/m^2$ $\boxed{l_2 =; \quad m_2 = \pm 0{,}289; \quad n_2 = \mp 0{,}956}$ (0,25pt)

Pour $\sigma_{d3} = 2\sqrt{13}\,KN/m^2$ $\boxed{l_3 = 0; \quad m_3 = \pm 0{,}956; \quad n_3 = \pm 0{,}289}$ (0,25pt)

Les contraintes du tenseur initial : $\sigma_i = \sigma_{di} + \sigma_m$

$\sigma_1 = \sigma_{1d} + \sigma_m = 12KN/m^2$ (0,25pt)

$\sigma_2 = \sigma_{2d} + \sigma_m = 12 - 2\sqrt{13} = 4{,}789KN/m^2$ (0,25pt)

$\sigma_3 = \sigma_{3d} + \sigma_m = 12 + 2\sqrt{13} = 19{,}211KN/m^2$ (0,25pt)

Les directions sont les mêmes de celles du tenseur déviatorique. (0,5pt)

(2 pts) **3/** Les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans la direction de la première bissectrice du plan (x,z). $l = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m = 0; \quad n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (0,25pt)

Les composantes de la contrainte agissant sur cette face inclinée sont :

$q_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(12) = 6\sqrt{2}\,KN/m^2$; (0,25pt)

$q_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(4) = 2\sqrt{2}\,KN/\,m^2$; (0,25pt)

$q_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-6) = -3\sqrt{2}\,KN/m^2$ (0,25pt)

L'intensité de la contrainte en un point sur cette facette inclinée est :

$\sigma = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = 9{,}9\,KN/m^2$

La composante normale de cette contrainte est :

$$\sigma_n = lq_x + mq_y + nq_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(6\sqrt{2}) + 0(2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-3\sqrt{2})$$

$\boxed{\sigma_n = 3\ KN/m^2}$ (0,5pt)

La composante tangentielle est :

$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{9{,}9^2 - 3^2}$ $\boxed{\tau = \pm 9{,}43\ \ KN/m^2}$ (0,5pt)

Exercice 2 (7 pts)

(1 pt) **1/** Le tenseur de déformations en M(x,y,z) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2z & 0 & 3x \\ 0 & 2z & 2y \\ 3x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

(3 pts) **2/** Les déformations principales au point P(0,y,0).

Au point P, le tenseur s'écrit :

$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\varepsilon & 2y \\ 2y & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0$ les déformations principales sont donc :

$\boxed{\varepsilon_1 = -2y}$ (0,5pt) $\boxed{\varepsilon_2 = 0}$ (0,5pt) $\boxed{\varepsilon_3 = 2y}$ (0,5pt)

Les directions principales sont obtenues par résolution de $\left[[\varepsilon] - \varepsilon_i[I]\right]\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_i & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_i & 2y \\ 0 & 2y & -\varepsilon_i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour $\varepsilon_1 = -2y \Longrightarrow$ $\boxed{l_1 = 0; \quad m_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; n_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (0,5pt)

Pour $\varepsilon_2 = 0 \quad \Longrightarrow$ $\boxed{l_2 = \pm 1; \ m_2 = 0; \quad n_2 = 0}$ (0,5pt)

Pour $\varepsilon_3 = 2y \quad \Longrightarrow$ $\boxed{l_3 = 0; \quad m_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \ n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (0,5pt)

(1,5 pts) **3/** les contraintes principales et leurs directions

$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_v$; $\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_v$ et $\sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon_v$

avec $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ (0,25pt)

Ce qui donne : $\boxed{\sigma_1 = -4Gy\ ;\ \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_3 = 4Gy}$ (0,75pt)

Leurs directions sont les mêmes que celles des déformations principales (0,5 pt) c'est-à-dire :

Pour $\sigma_1 = -4Gy \Longrightarrow$ $\boxed{l_1 = 0; \quad m_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; n_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Pour $\sigma_2 = 0 \quad \Longrightarrow$ $\boxed{l_2 = \pm 1; \ m_2 = 0; \quad n_2 = 0}$

Pour $\sigma_3 = 4Gy \quad \Longrightarrow$ $\boxed{l_3 = 0; \quad m_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \ n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(1,5 pts) **4/** Le vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point (0,y,0) pour lequel on a : σ_n=0 et τ =1

$\sigma_n = lq_1 + mq_2 + nq_3 = 0 \rightarrow \tau^2 = \sigma^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$=1

Avec : $\begin{cases} q_1 = l\sigma_1 = -4lGy \\ q_2 = m\sigma_2 = 0 \\ q_3 = n\sigma_3 = 4nGy \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} \sigma_n = l^2\sigma_1 + n^2\sigma_3 = 4Gy(-l^2 + n^2) = 0 \\ \sigma^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 16G^2y^2(l^2 + n^2) = 1 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$ (0,75pt)

$\Rightarrow \begin{cases} l = -n = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4Gy}\right) \\ m = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4Gy}\right)^2} \end{cases}$ pour y≠0 (0,75pt)

Si y=0 le vecteur normal $\vec{n}$ prend toutes les directions.