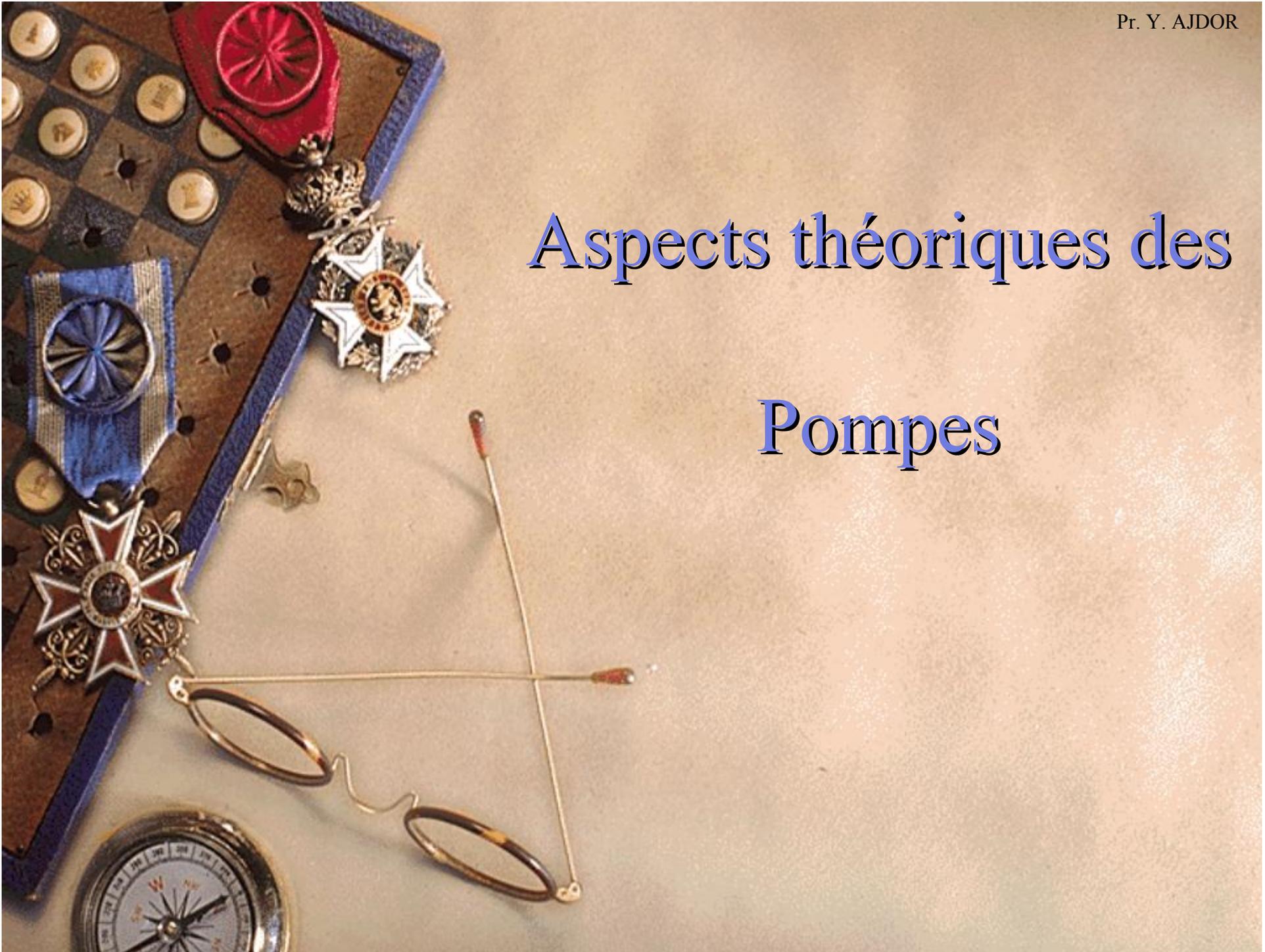
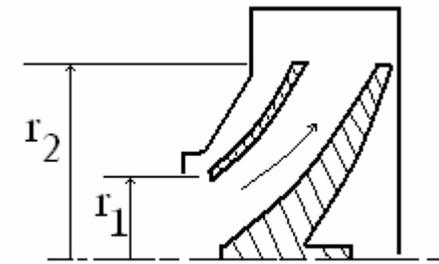
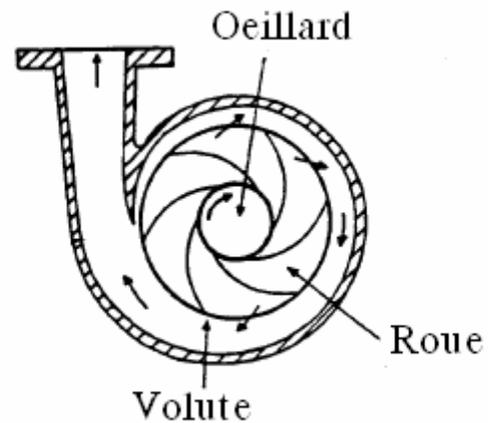


Aspects théoriques des Pompes



Principe de fonctionnement d'une pompe



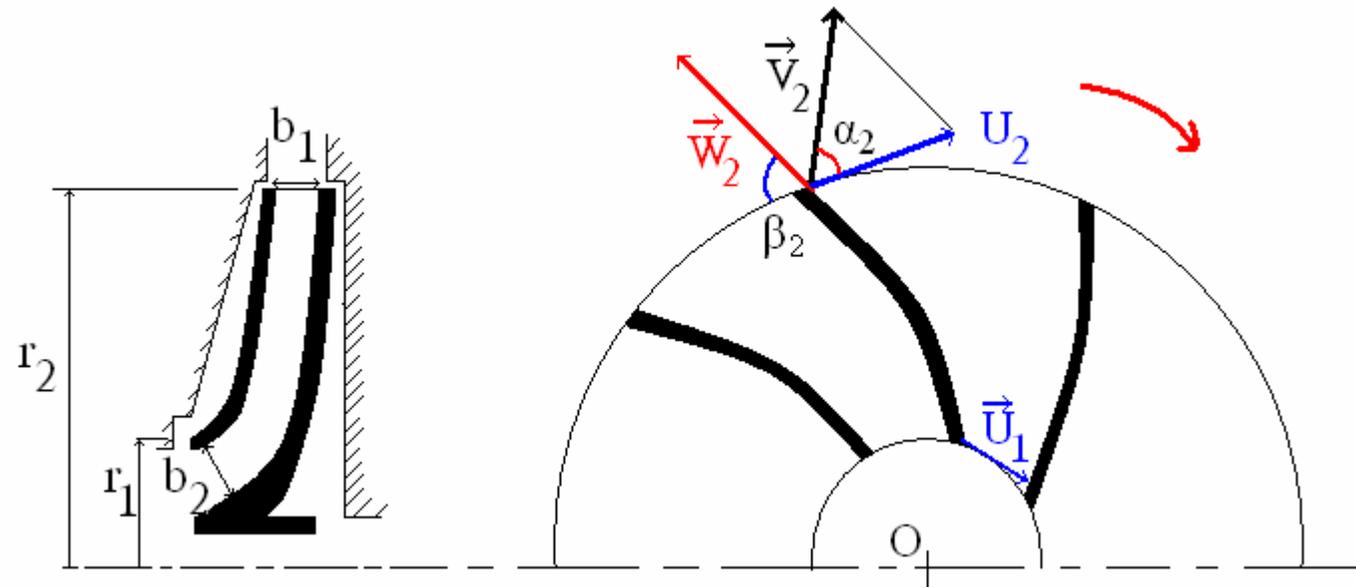
Décomposition du mouvement du fluide

Mouvement absolu = Mouvement d'entraînement + Mouvement relatif

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$$

\vec{W} : Tangente à l'aube

\vec{U} : Tangente à la circonférence



α : angle formé par les vitesses \vec{V} et \vec{U}

β : angle formé par les vitesses \vec{W} et $-\vec{U}$

Particularités

$\beta = \text{constante}$ pour une roue, dépend de sa construction

$\alpha = \text{variable}$ fonction de Q et de la vitesse de rotation n

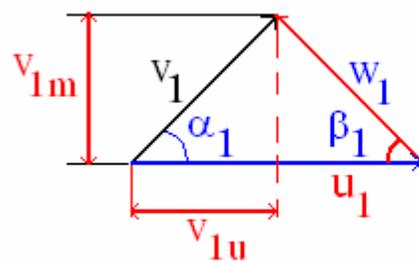
Equation fondamentale

But : Exprimer l'énergie mise en jeu par la pompe et transmise au fluide

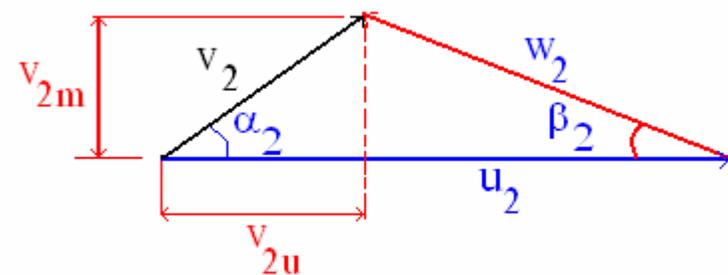
Hypothèse : Pompe idéale

- Pertes d'énergie nulles
- Ecoulement à filets liquides

Triangle des vitesses : Entrée - Sortie



Entrée



Sortie

Vitesses d'entraînement

$$u_1 = 2.\pi.r_1.n$$

$$u_2 = 2.\pi.r_2.n$$

n : vitesse de rotation de la roue en **tr/s**

Deuxième décomposition

Vitesse absolue = Vitesse méridienne + Vitesse giratoire

\vec{v}_{2u} Projection de \vec{v}_2 sur \vec{u}_2

\vec{v}_{2m} Perpendiculaire à de \vec{u}_2

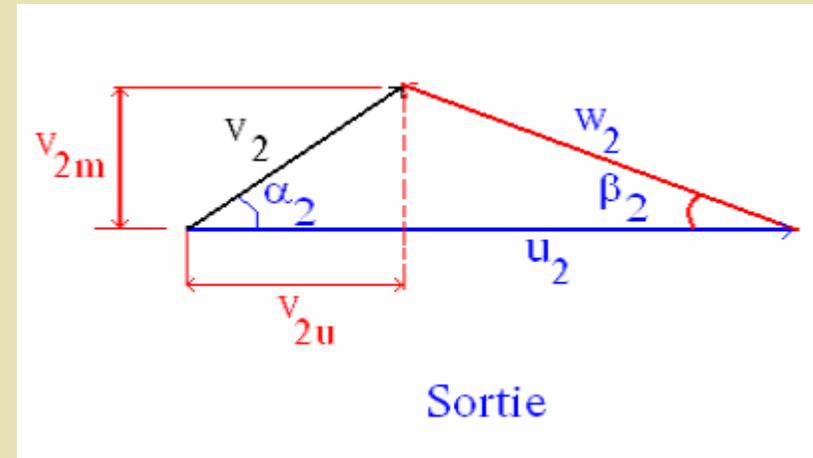


\vec{V}_{2m}

- radiale pour une roue radiale
- axiale pour une roue axiale

$$V_{2m} = V_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$V_{2u} = V_2 \cdot \cos(\alpha_2)$$



Application du théorème du moment cinétique

C : couple des forces extérieures agissant sur la roue

M : moment cinétique du fluide

$$C = \frac{dM}{dt}$$

Moment des vitesses

Entrée $r_1 \cdot v_{1u}$ \longrightarrow $r_2 \cdot v_{2u}$ Sortie

Variation du moment cinétique

$$dM = \rho \cdot Q \cdot dt \cdot (r_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - r_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1))$$

$$\longrightarrow C = \rho \cdot Q \cdot (r_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - r_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1))$$

\longrightarrow Puissance théorique : $P_{thé}$

$$P_{thé} = C \cdot \omega \quad \omega : \text{vitesse angulaire}$$

$$P_{thé} = \rho \cdot Q \cdot (r_2 \cdot \omega \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - r_1 \cdot \omega \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1))$$



Pompe idéale

$$P_{th} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{thé}$$

Puissance appliquée à

La roue

Puissance hydraulique

reçue par le fluide

H_{th} : hauteur d'élevation théorique créée par la pompe

d'où

$$H_{th} = \frac{u_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - u_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1)}{g}$$

$$H_{th} = \frac{u_2 \cdot v_{2u} - u_1 \cdot v_{1u}}{g}$$

Equation d'Euler

H_{th} ne tient pas compte des pertes de charge



Pour une pompe

H : hauteur réelle ou hauteur manométrique totale (H.M.T.)

$$H < H_{th}$$

$$\underline{H = H_{th} - \text{pertes de charge}}$$

Pour une turbine

$$H_{th} = \frac{u_1 \cdot V_{1u} - u_2 \cdot V_{2u}}{g}$$

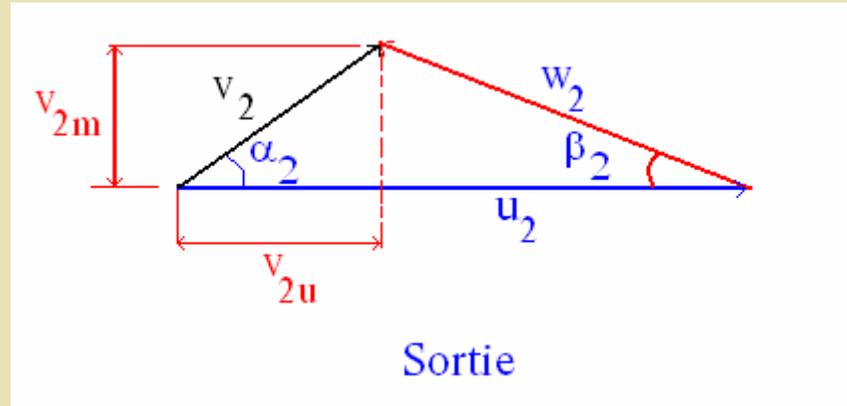
H : hauteur réelle, hauteur nette

$$H > H_{th}$$

$$\underline{H = H_{th} + \text{pertes de charge}}$$



Autre expression de la relation d'Euler



$$w_2^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2 \cdot u_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$w_1^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2 \cdot u_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$\rightarrow H_{th} = \underbrace{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g}}_1 + \underbrace{\frac{u_2^2 - u_1^2}{2 \cdot g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2 \cdot g}}_2$$

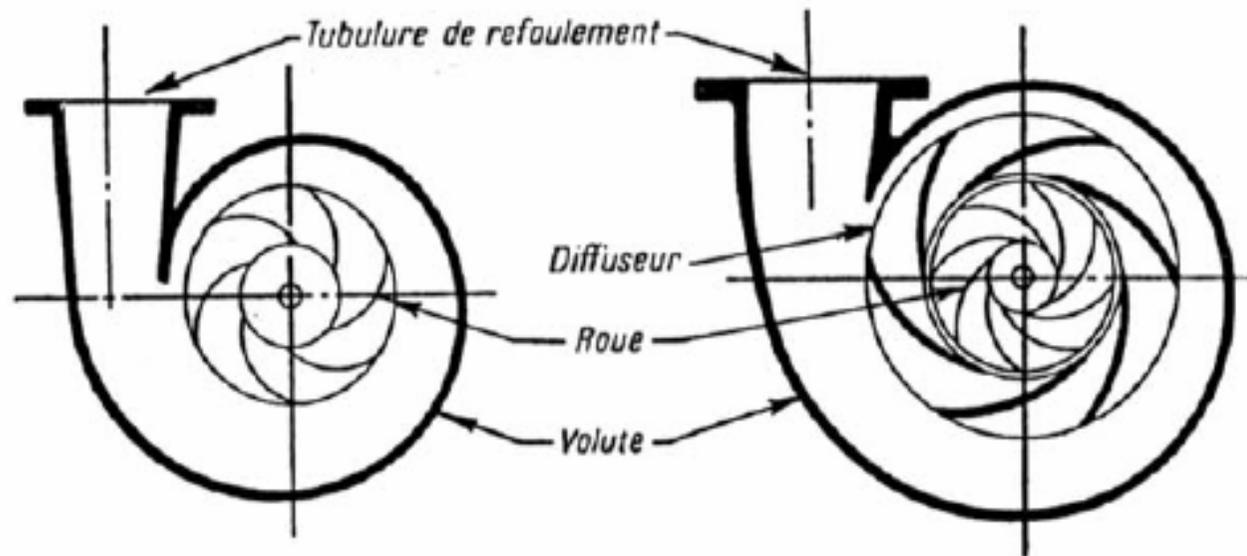
(1) : Augmentation de l'énergie cinétique

(2) : Augmentation de l'énergie de pression

$$H_{th} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2.g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho.g}$$

→ Nécessité de transformer le gain d'énergie cinétique en énergie de pression

↓
Rôle du diffuseur

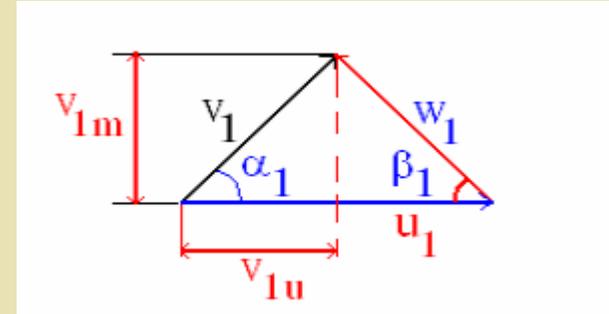


Puissance maximale

$$P_{thé} = \rho \cdot Q \cdot (u_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - u_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1))$$

$$V_{1u} = V_1 \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$\text{si } V_{1u} = 0$$



- Mouvement parallèle à l'axe de la roue : Roue axiale
- Mouvement radial : Roue radiale

$$P_{thé} = \rho \cdot Q \cdot u_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$H_{thé} = u_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) / g$$

$H_{thé}$ maximale

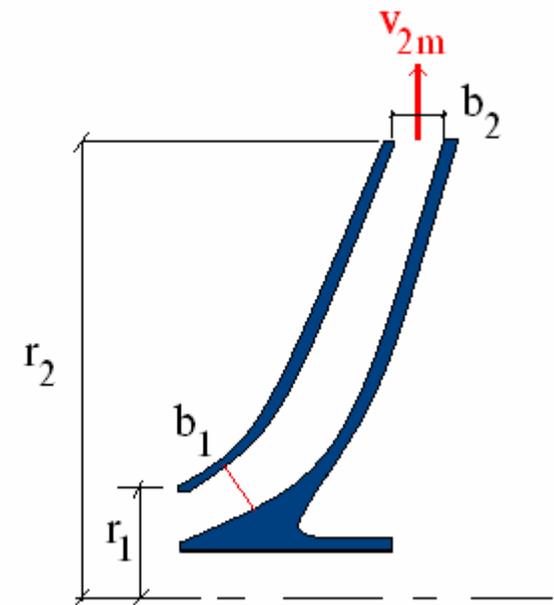
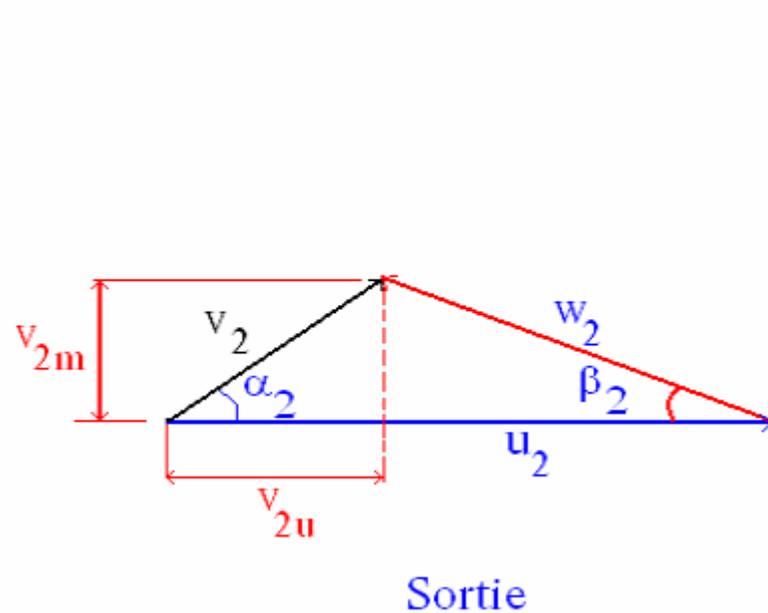
• augmenter u_2

• diminuer α_2

Caractéristiques théoriques

Courbes caractéristiques : $H-Q$, $P-Q$, $\eta-Q$

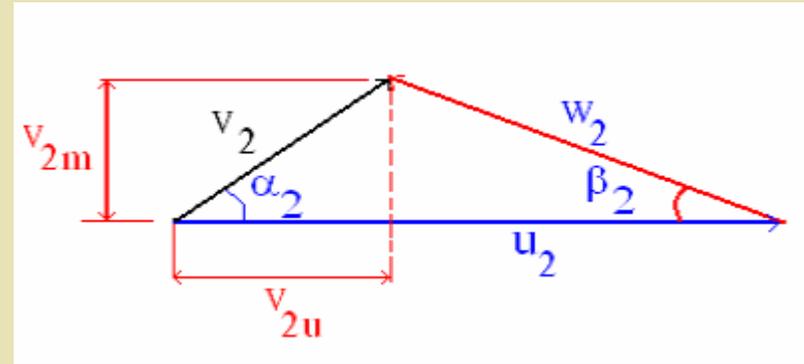
1. Relation entre H_{th} et Q



V_{2m} : vitesse méridienne \longrightarrow vitesse débitante

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b_2 \cdot v_{2m}$$

$$v_{2m} = (u_2 - v_{2u}) \cdot \operatorname{tg} \beta_2$$



$$Q = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot (u_2 - v_2 \cdot \cos(\alpha_2)) \cdot \operatorname{tg} \beta_2$$

si $V_{1u} = 0$ $H_{thé} = u_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) / g$

$$Q = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 \cdot \left(u_2 - g \cdot \frac{H_{th}}{u_2} \right)$$



D'où la relation $H_{th} - Q$

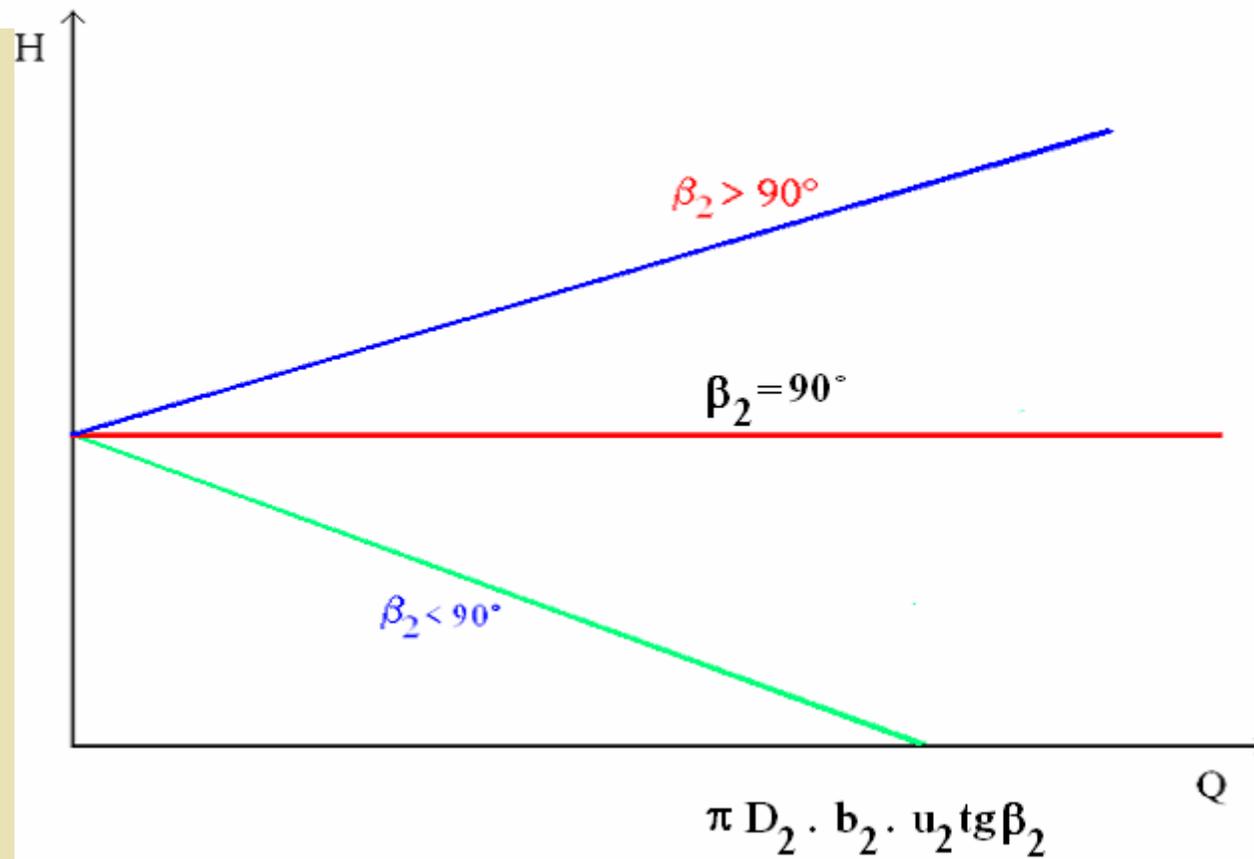
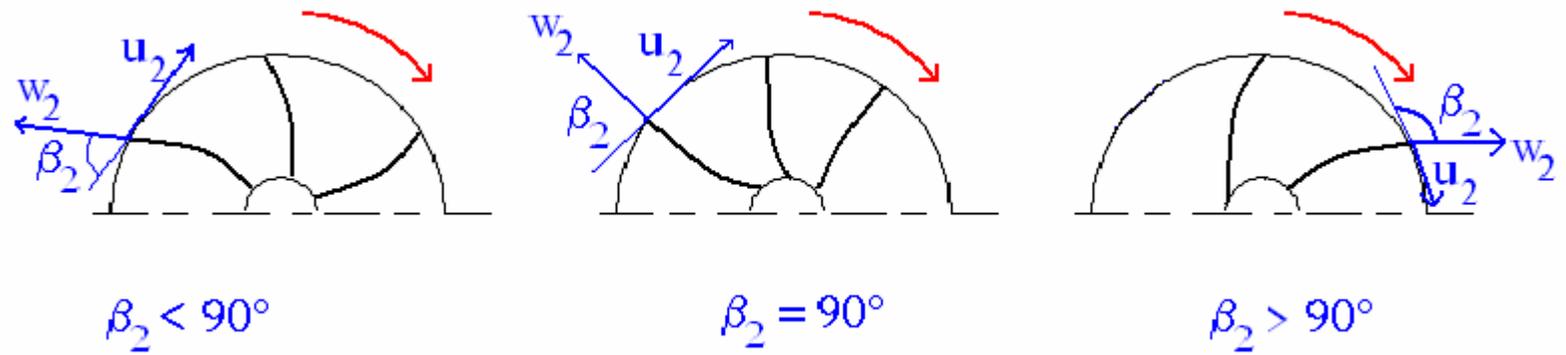
$$H_{th} = \frac{u_2 \cdot \left(u_2 - \frac{Q \cdot \cotg \beta_2}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2} \right)}{g}$$

→ Pour une vitesse de rotation donnée $n = \text{Cte}$ d'où $u_2 = \text{Cte}$

Courbe $H_{th} = f(Q)$ une droite

Pente dépend de β_2

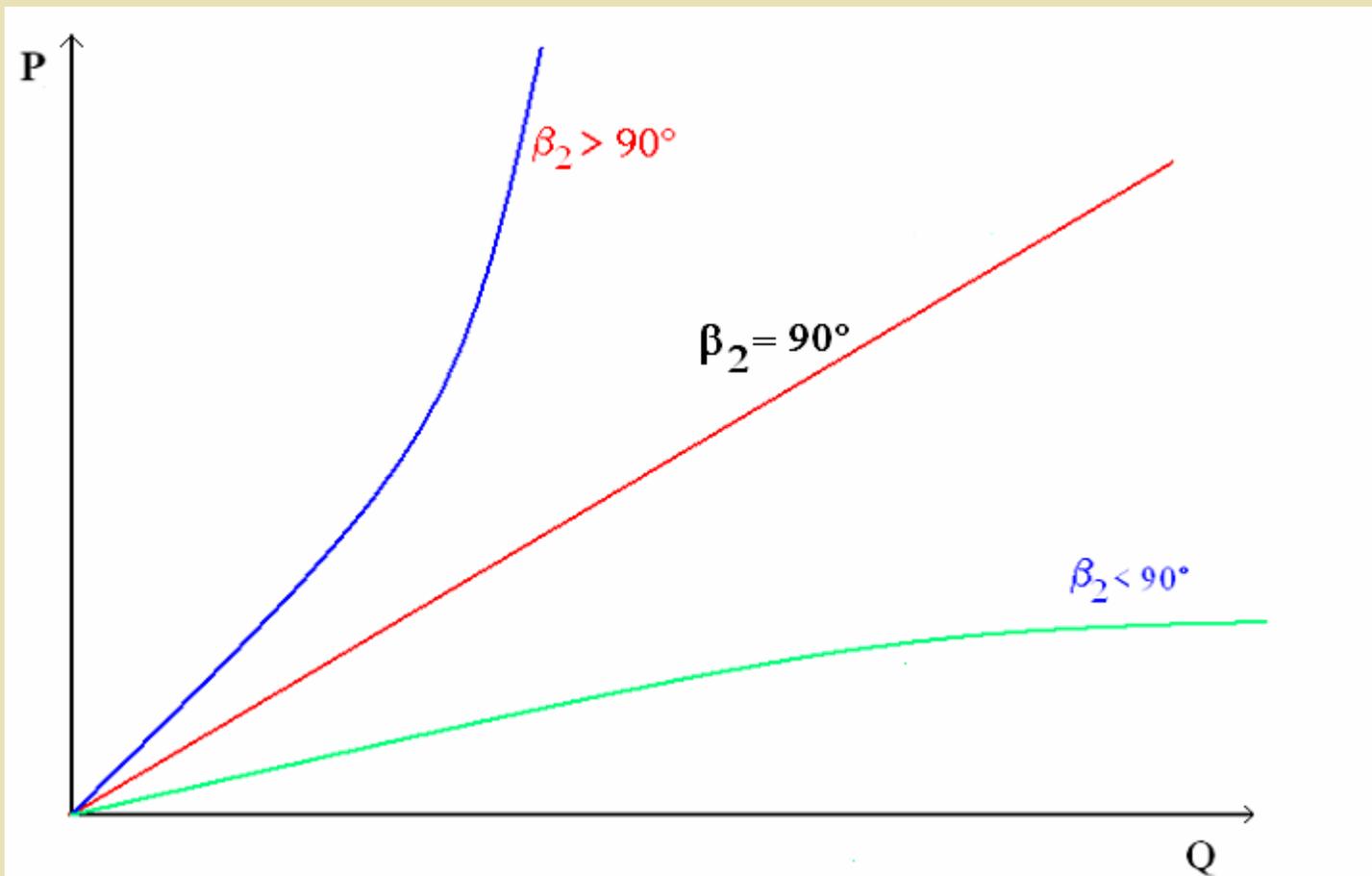




2. Relation entre P_{th} et Q

$$P_{th} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{th}$$

$$\longrightarrow P_{th} = \rho \cdot \left(u_2^2 \cdot Q - \frac{Q^2 \cdot u_2}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot \text{tg} \beta_2} \right)$$



Théoriquement : $\beta_2 > 90^\circ$ est plus intéressante

Pratiquement : $\beta_2 < 90^\circ$. roue plus économique

. rendement élevé

. très utilisée

Valeurs pratiques

$$15^\circ < \beta_2 < 35^\circ$$

$$15^\circ < \beta_1 < 50^\circ$$



Rendements

1. Rendement hydraulique

Tient compte des pertes de charge à l'intérieur de la pompe
(entrée , roue , bête spirale, ...) h_p

Pompe idéale \longrightarrow Hauteur théorique H_{th}

Hauteur réelle : H.M.T. H

$H = H_{th} - \text{Pertes de charge}$

$$\eta_h = \frac{H}{H_{th}} = \frac{H_{th} - h_p}{H_{th}}$$



Détail des pertes de charge

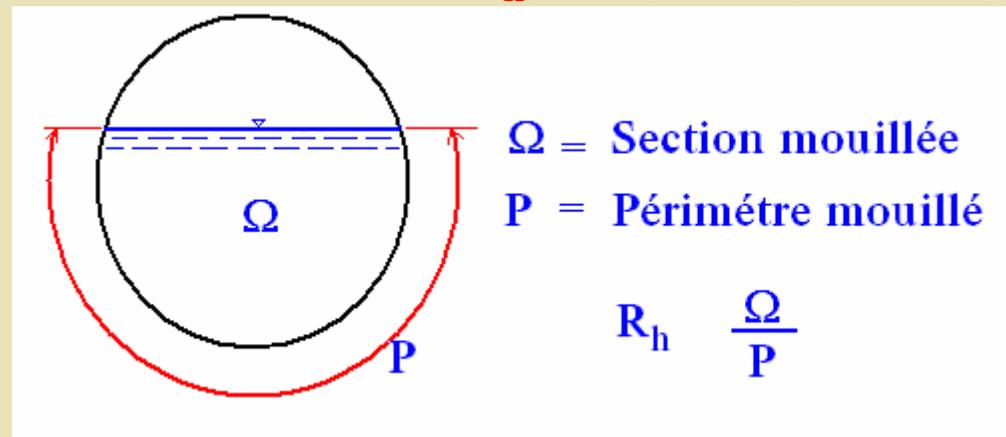
a- Pertes de charge par frottement : h_f

- Frottement du fluide contre la paroi
- Linéaires

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{4R_h} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

λ : Coefficient de pertes de charge linéaires

L : Longueur V : Vitesse R_h : Rayon hydraulique



Pertes de charge à calculer pour :

- Volute
- Pièce d'aspiration
- Canaux de roue
- Tubulure de sortie

$$h_f = K_1 \cdot Q^2$$

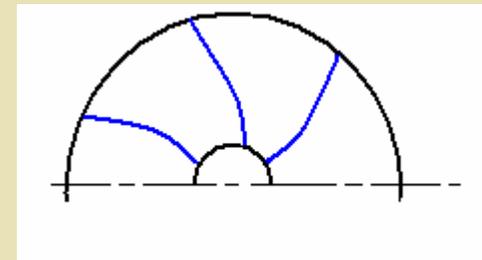
b- Pertes de charge par divergence : h_d

- Variations de la section d'écoulement
- Singulières

$$h_d = K_2 \cdot Q^2$$

Pertes de charge à calculer pour :

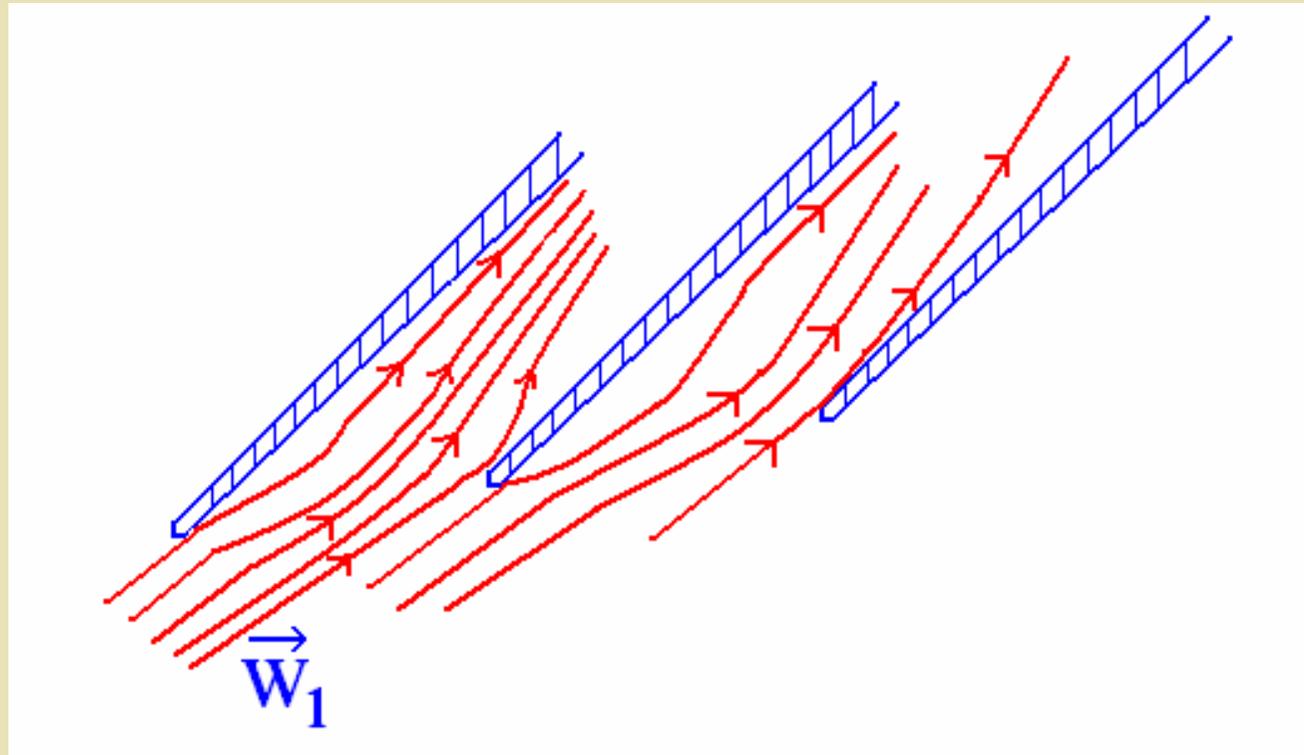
- Canaux de roue - Tubulure de sortie



Pertes par frottement et divergence : h_{fd}

$$h_{fd} = h_f + h_d = K_3 \cdot Q^2$$

c- Pertes de charge par décollements et par tourbillons : h_c



Pour un débit Q_0 la vitesse \vec{w}_1 est tangente à l'aube

⇒ Entrée dans la roue sans choc et sans tourbillons

Pour $Q = Q_0$ Pertes de charge par choc nulles $h_c = 0$

Pour $Q \neq Q_0$ la vitesse \vec{w}_1 n'est pas tangente à l'aube

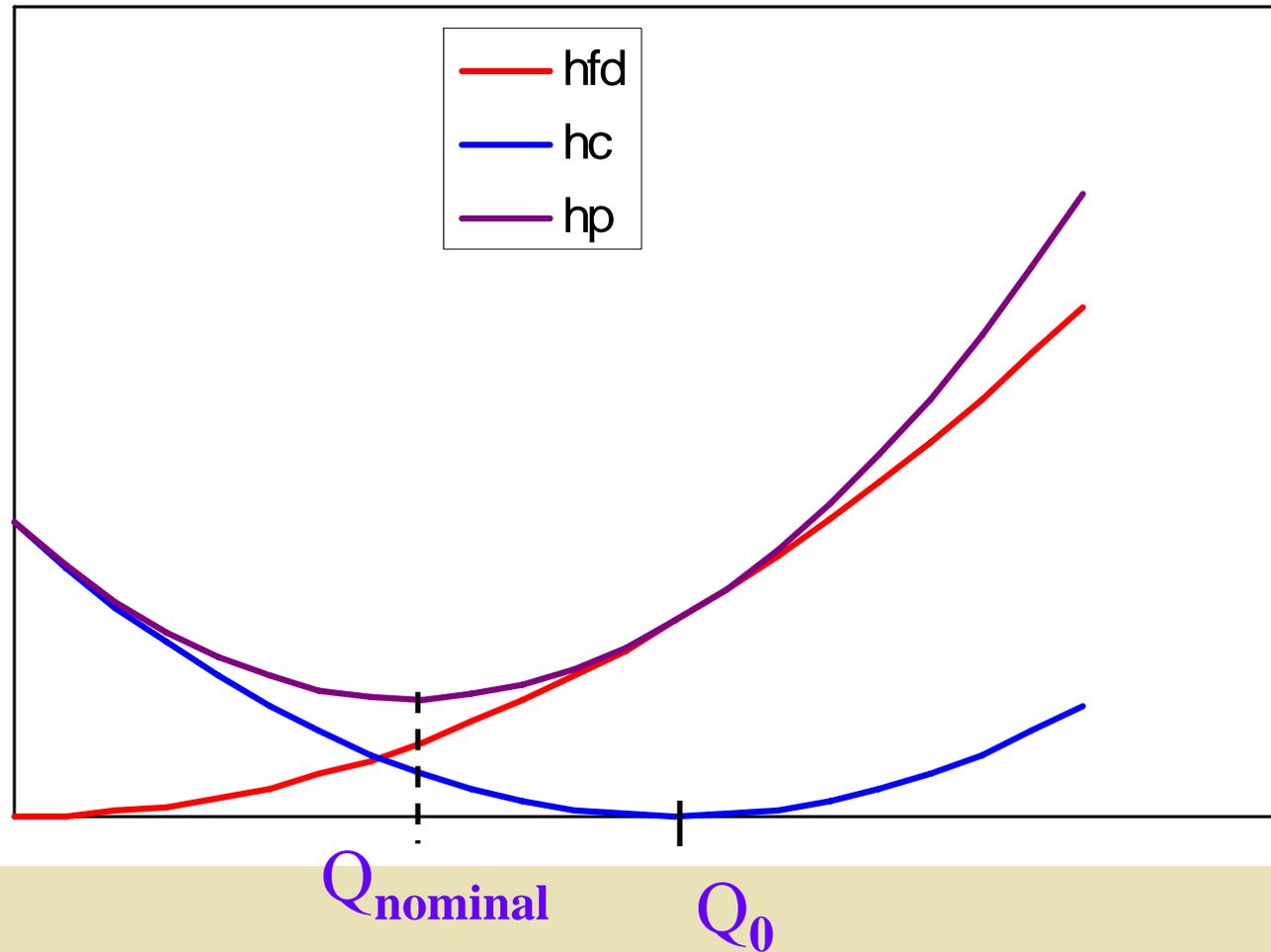
⇒ Présence de tourbillons et de décollements $h_c \neq 0$

$$h_c = K_4 \cdot (Q - Q_0)^2$$

Pertes par choc à calculer pour :

- ◆ Entrée – sortie de la roue
- ◆ bêche d'aspiration





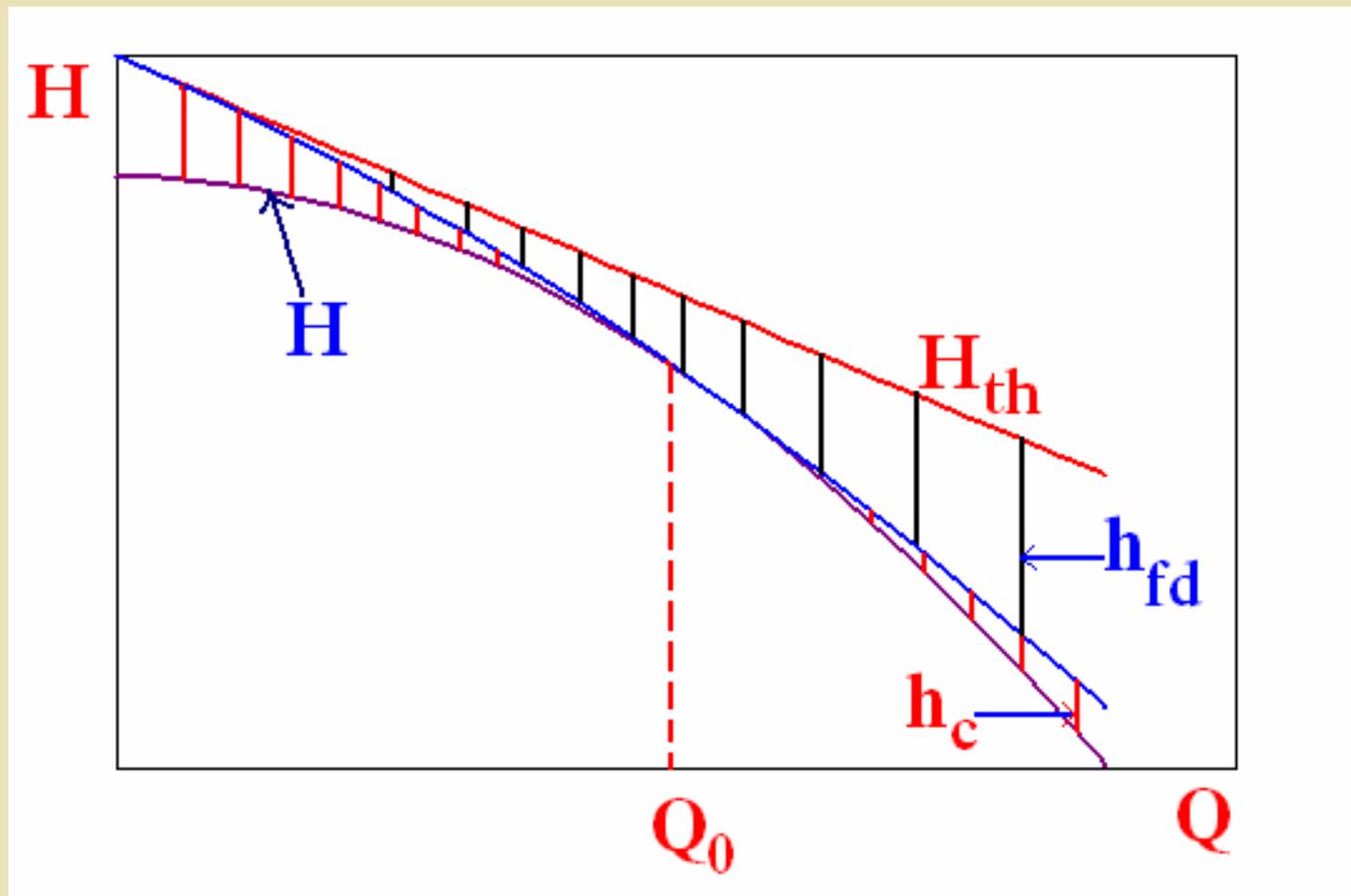
Caractéristique réelle hauteur - débit

$$h_p = h_f + h_d + h_c$$

$$H = H_{th} - h_p$$

$$H = H_{th} - K_4 \cdot (Q - Q_0)^2 - K_3 \cdot Q^2$$

$H_{th} - Q$ est une droite



2. Rendement volumétrique η_v

Présence de fuites de débit dans :

- Presse-étoupe
- Refroidissement
- Entre deux étages consécutifs d'une pompe multicellulaire

Q : débit refoulé dans la conduite

q : débit de fuite

La pompe fait tourner **$Q' = Q + q$**

$$\eta_v = \frac{Q}{Q'} = \frac{Q}{Q + q}$$



3. Rendement mécanique η_m

η_m tient compte des pertes mécaniques :

- Frottement mécanique dans les paliers
- Frottement du disque (rotor) et le liquide

$$\eta_m = \frac{P \text{ absorbée par la roue}}{P \text{ sur l'arbre (au frein)}}$$

4. Rendement global η

$$\eta = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{P \text{ sur l'arbre}}$$

$$\eta = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m$$

Fin