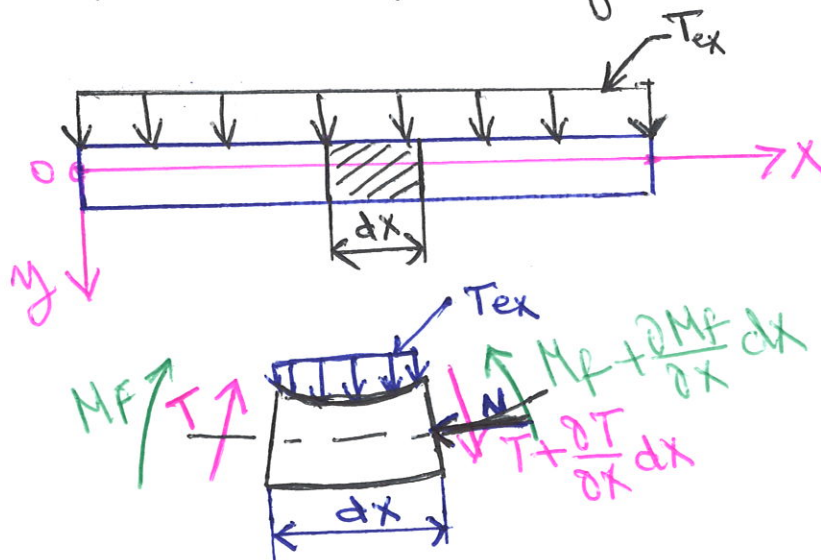


# Vibration des poutres en flexion

Soit une poutre en  $M^{\text{vt}}$  de flexion. Pour étudier son  $M^{\text{vt}}$ , on prend un élément de longueur  $dx$ .



Ce  $M^{\text{vt}}$  est défini par  $y(x,t)$  : Déplacement vertical.

$M_f$  : Moment flechissant.  $\psi(x,t)$  : pente due à  $M_f$ .

$T$  : Effort tranchant.  $S$  : Section de la poutre.

$N$  : force normale à la section.  $I$  : Moment d'inertie par unité de longueur.

$T_{\text{ex}}$  : force extérieure par unité de longueur.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m \vec{\ddot{\delta}} \Rightarrow \rho S dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T + T_{\text{ex}} dx \\ \sum \vec{M} = I \vec{\ddot{\theta}} \Rightarrow \rho I dx \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -M_f - M_f - \frac{\partial M_f}{\partial x} dx + T dx + N \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} + T_{\text{ex}} \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial M_f}{\partial x} + T + N \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

on a  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-M_f}{EI}$  ;  $\psi'' = \frac{-M_f}{EI}$  et  $\psi = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{T}{\rho S G}$

avec  $T = \frac{\partial M_f}{\partial x} = \psi'_{MF} + \psi'_T$

$a$  : facteur de forme ( $\approx 1$  pour les sections usuelles).

les termes  $\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  et  $\frac{T}{aSG}$  sont les effets secondaires de flexion. le premier est l'effet d'inertie de rotation mais est évident par Rayleigh. le second terme est l'effet de cisaillement de Timoshenko (poutre de Timoshenko) le cas contraire est la poutre d'Euler-Bernoulli.

Dans ce qui suit, les effets secondaires ne seront pas pris en considération.

$$\text{Donc (1)} \Rightarrow \begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} + T_{ex} & (2.1) \\ -\frac{\partial M_f}{\partial x} + T + N \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0 & (2.2) \end{cases} \quad (2)$$

$$(2.2) \Rightarrow T = \frac{\partial M_f}{\partial x} - N \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} - N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$(2.1) \Rightarrow \rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} - N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + T_{ex} \quad (3)$$

$$\text{Or } M_f = -EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$(3) \Rightarrow \rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] - N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + T_{ex}$$

Dans le cas où la poutre est homogène et de section constante. le  $M_f$  libre ( $T_{ex}=0$ ) est défini par :

$$\rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{N}{\rho S} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

pour résoudre cette eq, nous utilisons la méthode de séparation de variables :  $y(x,t) = v(x) \cdot f(t)$ .

qui nous donne :

$$\frac{EI}{SS} f(t) \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + \frac{N}{SS} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} f(t) = -\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} v(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{EI}{SS} \frac{1}{v(x)} \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} - \frac{N}{SS} \frac{1}{v(x)} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \text{cte} = -W^2$$

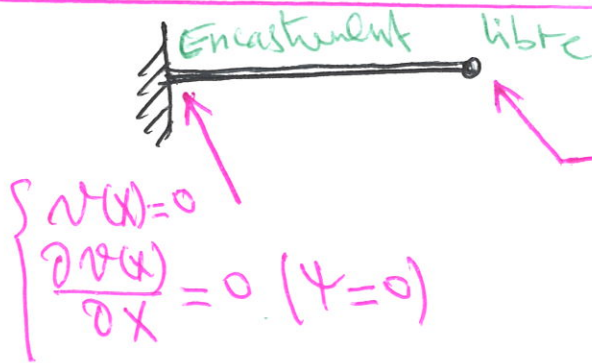
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + W^2 f(t) = 0 \\ \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + g^2 \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - \lambda^4 v(x) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec  $g^2 = \frac{N}{EI}$  et  $\lambda^4 = \frac{SS}{EI} W^2$

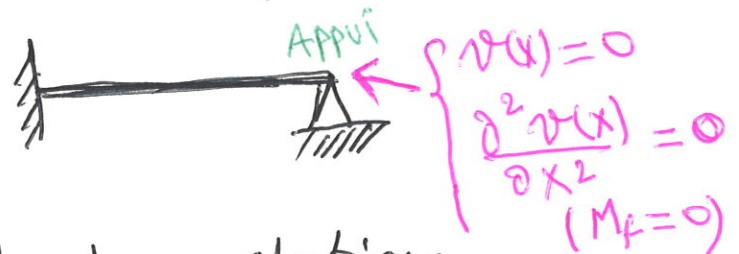
Les solutions des 2 éqts différentielles de l'éq(5) sont :

$$\begin{cases} f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \\ v(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x. \end{cases}$$

↳ Conditions aux limites (C.L)



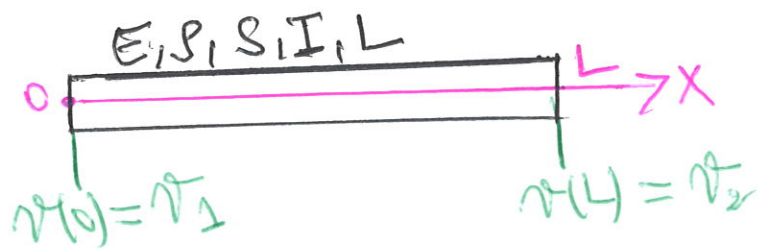
$$\begin{cases} T(x) = 0 \quad \left( \frac{\partial^3 v(x)}{\partial x^3} = 0 \right) \\ M(x) = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0 \right) \end{cases}$$



↳ Si  $\lambda = 0 \Rightarrow W_0 = 0 \Rightarrow$  flambage statique.

↳ Dans le cas où la force axiale n'existe pas :  $N = 0 \Rightarrow g = 0$ .

↳ Détermination de la matrice de transfert dans le cas du Mouvement de flexion d'une poutre :



$$v(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x$$

$$\text{avec } \lambda^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2$$

$$\psi(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \lambda [C_1 \cos \lambda x - C_2 \sin \lambda x + C_3 \operatorname{ch} \lambda x + C_4 \operatorname{sh} \lambda x]$$

$$M(x) = EI \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = EI \lambda^2 [-C_1 \sin \lambda x - C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x]$$

$$T(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = EI \lambda^3 [-C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \operatorname{ch} \lambda x + C_4 \operatorname{sh} \lambda x]$$

$$\text{à } x=0: \begin{cases} v(0) = v_1 = C_2 + C_4 & (1) \\ \psi(0) = \psi_1 = \lambda(C_1 + C_3) & (2) \\ M(0) = M_1 = EI \lambda^2 (-C_2 + C_4) & (3) \\ T(0) = T_1 = EI \lambda^3 (-C_1 + C_3) & (4) \end{cases}$$

$$\text{à } x=L: \begin{cases} v(L) = v_2 = C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L + C_3 \operatorname{sh} \lambda L + C_4 \operatorname{ch} \lambda L & (5) \\ \psi(L) = \psi_2 = \lambda [C_1 \cos \lambda L - C_2 \sin \lambda L + C_3 \operatorname{ch} \lambda L + C_4 \operatorname{sh} \lambda L] & (6) \\ M(L) = M_2 = EI \lambda^2 [-C_1 \sin \lambda L - C_2 \cos \lambda L + C_3 \operatorname{sh} \lambda L + C_4 \operatorname{ch} \lambda L] & (7) \\ T(L) = T_2 = EI \lambda^3 [-C_1 \cos \lambda L + C_2 \sin \lambda L + C_3 \operatorname{ch} \lambda L + C_4 \operatorname{sh} \lambda L] & (8) \end{cases}$$

$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow \begin{cases} v_1 = C_2 + C_4 \\ \frac{M_1}{EI \lambda^2} = -C_2 + C_4 \end{cases} \Rightarrow C_4 = \frac{v_1}{2} + \frac{M_1}{2EI \lambda^2}$$

$$C_2 = v_1 - C_4 = \frac{v_1}{2} - \frac{M_1}{2EI \lambda^2} = C_2$$

$$(2) \text{ et } (4) \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = \lambda(C_1 + C_3) \\ T_1 = EI \lambda^3 [-C_1 + C_3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \frac{\psi_1}{2\lambda} + \frac{T_1}{2EI \lambda^3} \\ C_1 = \frac{-T_1}{2EI \lambda^3} + \frac{\psi_1}{2\lambda} \end{cases}$$

après remplacement des constantes trouvées ( $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ ) dans les eqs (5), (6), (7) et (8), on trouve :

$$\hookrightarrow v_2 = \left( \frac{\cos \lambda L + \operatorname{ch} \lambda L}{2} \right) v_1 + \left( \frac{\sin \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L}{2 \lambda} \right) \psi_1 + \left( \frac{\operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L}{2 E I \lambda^2} \right) M_1 + \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L}{2 E I \lambda^3} \right) T_1$$

$$\hookrightarrow \psi_2 = \left( \frac{\lambda (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L)}{2} \right) v_1 + \left( \frac{\cos \lambda L + \operatorname{ch} \lambda L}{2} \right) \psi_1 + \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda L + \sin \lambda L}{2 E I \lambda} \right) M_1 + \left( \frac{\operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L}{2 E I \lambda^2} \right) T_1$$

$$\hookrightarrow M_2 = \left( \frac{E I \lambda^2 (\operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L)}{2} \right) v_1 + \left( \frac{E I \lambda (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L)}{2} \right) \psi_1 + \left( \frac{\cos \lambda L + \operatorname{ch} \lambda L}{2} \right) M_1 + \left( \frac{\sin \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L}{2 \lambda} \right) T_1$$

$$\hookrightarrow T_2 = \left( \frac{E I \lambda^3 (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L)}{2} \right) v_1 + \left( \frac{E I \lambda^2 (\operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L)}{2} \right) \psi_1 + \left( \frac{\lambda (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L)}{2} \right) M_1 + \left( \frac{\operatorname{ch} \lambda L + \cos \lambda L}{2} \right) T_1$$

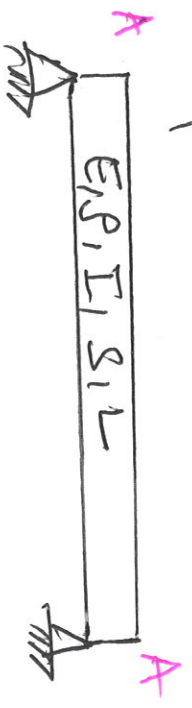
sous forme matricielle, on trouve la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\cos \alpha L + \cosh \alpha L}{2}\right) & \left(\frac{\sin \alpha L + \sinh \alpha L}{2 \alpha}\right) & \left(\frac{\cosh \alpha L - \cos \alpha L}{2 E I \alpha^2}\right) & \left(\frac{\sinh \alpha L - \sin \alpha L}{2 E I \alpha^3}\right) \\ \alpha \left(\frac{\sinh \alpha L - \sin \alpha L}{2}\right) & \left(\frac{\cos \alpha L + \cosh \alpha L}{2}\right) & \left(\frac{\sin \alpha L + \sinh \alpha L}{2 E I \alpha}\right) & \left(\frac{\cosh \alpha L - \cos \alpha L}{2 E I \alpha^2}\right) \\ \left(\frac{E I \alpha^2 (\cosh \alpha L - \cos \alpha L)}{2}\right) & \left(\frac{E I \alpha (\sinh \alpha L - \sin \alpha L)}{2}\right) & \left(\frac{\cos \alpha L + \cosh \alpha L}{2}\right) & \left(\frac{\sinh \alpha L - \sin \alpha L}{2 \alpha}\right) \\ \left(\frac{E I \alpha^3 (\sin \alpha L + \sinh \alpha L)}{2}\right) & \left(\frac{E I \alpha^2 (\cosh \alpha L - \cos \alpha L)}{2}\right) & \left(\frac{\alpha (\sinh \alpha L - \sin \alpha L)}{2}\right) & \left(\frac{\cosh \alpha L + \cos \alpha L}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix}$$

Matrice de Transfert [T]

Exemples :

1) Déterminer l'expression qui permet de calculer les vibrations propres d'une poutre bi-appuyée en mouvement de flexion. Sachant que les paramètres physiques de système tri-pous E, I, L sont connus.



## 1<sup>ère</sup> Méthode.

$$v(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x$$

$$v'(x) = \lambda [C_1 \cos \lambda x - C_2 \sin \lambda x + C_3 \operatorname{ch} \lambda x + C_4 \operatorname{sh} \lambda x]$$

$$M(x) = EI \lambda^2 [-C_1 \sin \lambda x - C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x]$$

$$C.L. : \begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ M(0) = 0 \Rightarrow EI \lambda^2 (-C_2 + C_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0$$
$$\begin{cases} v(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin \lambda L + C_3 \operatorname{sh} \lambda L = 0 \\ M(L) = 0 \Rightarrow -C_1 \sin \lambda L + C_3 \operatorname{sh} \lambda L = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sin \lambda L = 0}$$

$$\text{Donc } \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } \lambda_n^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega_n^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

## 2<sup>ème</sup> Méthode (par MMT)

En utilisant la relation matricielle de la page (6), on trouve :  
pour  $v_1 = 0$  ;  $v_2 = 0$  et  $M_1 = 0, M_2 = 0$  (le cas A-A) :

$$\begin{cases} 0 = \left( \frac{\sin \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L}{2\lambda} \right) \psi_1 + \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L}{2EI\lambda^3} \right) T_1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \left( \frac{EI\lambda(\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L)}{2} \right) \psi_1 + \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda L + \sin \lambda L}{2\lambda} \right) T_1 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} EI\lambda^2 (\sin \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L) \psi_1 + (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L) T_1 = 0 & (3) \\ EI\lambda^2 (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L) \psi_1 + (\operatorname{sh} \lambda L + \sin \lambda L) T_1 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \psi_1 = \frac{\sin \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L}{EI\lambda^2 (\sin \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L)} T_1 \quad (5)$$

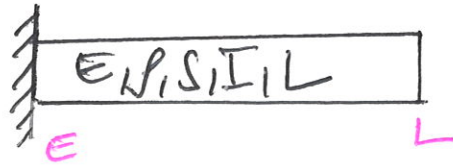
$$(5) \text{ dans } (4) \Rightarrow \frac{EI\lambda^2 (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L) (\sin \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L)}{EI\lambda^2 (\sin \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L)} T_1 + (\operatorname{sh} \lambda L + \sin \lambda L) T_1 = 0$$

$$\Rightarrow (\operatorname{sh} \lambda L + \sin \lambda L)^2 - (\operatorname{sh} \lambda L - \sin \lambda L)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 \sin \lambda L \operatorname{sh} \lambda L = 0 \Rightarrow \boxed{\sin \lambda L = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_n L = n\pi \Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

2) La même question est posée pour une poutre encastée-libre (E-L) :



1<sup>ère</sup> Méthode

On a besoin de :

$$T(x) = EI\lambda^3 [-c_2 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x + c_3 \operatorname{sh} \lambda x + c_4 \operatorname{sh} \lambda x]$$

$$E-L: \begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow c_2 + c_4 = 0 \\ \psi(0) = 0 \Rightarrow \lambda [c_1 + c_3] = 0 \Rightarrow c_1 + c_3 = 0 \\ M(L) = 0 \Rightarrow EI\lambda^2 [-c_1 \sin \lambda L - c_2 \cos \lambda L + c_3 \operatorname{sh} \lambda L + c_4 \operatorname{ch} \lambda L] = 0 \\ T(L) = 0 \Rightarrow EI\lambda^3 [-c_2 \cos \lambda L + c_2 \sin \lambda L + c_3 \operatorname{ch} \lambda L + c_4 \operatorname{sh} \lambda L] = 0 \end{cases}$$

sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda L & -\cos \lambda L & \operatorname{sh} \lambda L & \operatorname{ch} \lambda L \\ -\cos \lambda L & \sin \lambda L & \operatorname{ch} \lambda L & \operatorname{sh} \lambda L \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Si } (c_i \neq 0; i=1,4) \Rightarrow \det [B] = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L = 0 \Rightarrow \boxed{1 + \operatorname{ch} \lambda L \cos \lambda L = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \lambda L = \frac{-1}{\operatorname{ch} \lambda L}}$$

On peut résoudre cette équation graphiquement.  
Les solutions sont les intersections des deux courbes  
des deux fonctions  $\cos \lambda L$  et  $\frac{-1}{\operatorname{ch} \lambda L}$

Voit les solutions dans le tableau ci-dessous (page 9)



## 2<sup>ème</sup> Méthode (par MMT):

On utilise la relation matricielle de la page (6),

pour  $v_1 = 0$ ;  $\psi_1 = 0$  et  $T_2 = 0$ ;  $M_2 = 0$  (le cas E-L) :

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{\cos \lambda L + \cosh \lambda L}{2}\right) M_1 + \left(\frac{\sin \lambda L + \sinh \lambda L}{2\lambda}\right) T_1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\lambda(\sinh \lambda L - \sin \lambda L)}{2} M_1 + \left(\frac{\cosh \lambda L + \cos \lambda L}{2}\right) T_1 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(\cos \lambda L + \cosh \lambda L) M_1 + (\sin \lambda L + \sinh \lambda L) T_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(\sinh \lambda L - \sin \lambda L) M_1 + (\cosh \lambda L + \cos \lambda L) T_1 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \lambda(\cos \lambda L + \cosh \lambda L) M_1 + (\sin \lambda L + \sinh \lambda L) \frac{\lambda(\sinh \lambda L - \sin \lambda L)}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L} M_1 = 0$$

et (4)

$$\Rightarrow (\cos \lambda L + \cosh \lambda L)^2 + \sin^2 \lambda L - \sinh^2 \lambda L = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \cos \lambda L \cosh \lambda L = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + \cos \lambda L \cosh \lambda L = 0} \Rightarrow \boxed{\cos \lambda L = -\frac{1}{\cosh \lambda L}}$$

Les premières valeurs de  $(\lambda L)$  sont données dans le tableau suivant pour différentes conditions aux limites.

C-L	Eq <sub>t</sub> caractéristique	$(\lambda_1 L)^2$	$(\lambda_2 L)^2$	$(\lambda_3 L)^2$	$(\lambda_4 L)^2$	$(\lambda_5 L)^2$
E-L	$1 + \cos \lambda L \cdot \cosh \lambda L = 0$	3,516	22,03	61,69	120,9	199,8
A-A	$\sin \lambda L = 0$	9,869	39,47	88,82	157,9	246,7
E-E						
L-L	$1 - \cosh \lambda L \cdot \cos \lambda L = 0$	22,37	61,67	120,9	199,8	298,5
E-A						
L-A	$\tanh \lambda L - \tan \lambda L = 0$	15,41	49,96	104,2	178,2	272,0

Vous pouvez démontrer ces équations caractéristiques données dans le tableau par les méthodes appliquées dans le cours (deux méthodes).