Matière : Mathématiques 2

Cours 3 : L'analyse combinatoire

1-Notions d'analyse combinatoire

Principe fondamental : Considérons un ensemble E formé de vecteurs de p composantes tel que :

- La composante numéro 1 est choisie dans un ensemble de N_1 éléments distincts.
- La composante numéro 2 est choisie dans un ensemble de N_2 éléments distincts.

⋮

- La composante numéro p est choisie dans un ensemble de N_p éléments distincts.

Donc card E= N_1 x N_2 x…x N_p.

Ce résultat porte le nom du Principe fondamental d'analyse combinatoire.

Exemple : Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire :

On peut donc composer 3x2x4=24 menus différents.

Remarque : Pour toute la suite on considère E un ensemble à n éléments.

2-Les méthodes de dénombrement se classeront selon 3 catégories:

• les arrangements • les permutations • les combinaisons

1-Arrangement :
• Arrangement sans répétition :

Définition : On appelle arrangement de p éléments parmi n éléments de E (p ≤ n) toute suite ordonnée et sans répétition de p éléments parmi n.

Théorème : Le nombre d' arrangement de p éléments parmi n est : A_n^p=n (n-1) … (n-p+1)

Remarque : n ∈ N^*, n ! =1 x 2 x … x n , donc :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on former avec les chiffres :

1, 2, 3, 4, 5.

On voit bien que c'est un arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 5, c'est-à-dire :

$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{3!} = 4 \times 5 = 20$

On peut alors former 20 nombres de deux chiffres distincts avec les chiffres :

1, 2, 3, 4, 5.

• Arrangement avec répétition :

Définition : On appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n toute suite ordonnée de p éléments parmi n avec répétition d'un ou plusieurs éléments parmi n.

Théorème : Si on note $A_n^{'p}$ le nombre d' arrangement avec répétition de p éléments parmi n, alors :

$$A_n^{'p} = n^p \quad .$$

Exemple : Combien de nombres de deux chiffres peut-on former avec les chiffres :

1, 2, 3, 4, 5.

On voit bien que c'est un arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 5, c'est-à-dire :

$$A'^2_5 = 5^2 = 25$$

On peut alors former 25 nombres de deux chiffres avec les chiffres :

1, 2, 3, 4, 5.

2-Permutation :

• Permutation sans répétition :

Définition : On appelle permutation sans répétition de n éléments distincts tout arrangement de n éléments parmi n. Ainsi le nombre de permutation de n éléments est donné par :

$$P_n = n!$$

• P_n : nombre de permutations de n objets distincts.

Exemple : Le nombre de permutations des lettres du mot IMAGE est

$$P_5 = 5! = 120$$

• Permutation avec répétition :

Définition : Le nombre de permutations de n éléments avec répétitions est donné par :

$$P'_n(r_1, r_2, \cdots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \cdots \times r_k!}$$

où $r_1, r_2, \cdots, r_k$ désignent le nombre d'objets identiques.

Exemple : Le nombre de permutations des lettres du mot STATISTIQUES est

$$P'_{12}(3,3,2) = \frac{12!}{3!\times 3!\times 2!} = 6652800$$

3-Combinaison sans répétition :

Définition : On appelle combinaison (sans répétition) de p éléments parmi n toute partie de E à p éléments.

Théorème : Si on note C_n^p le nombre combinaison de p éléments parmi n, alors :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Exemple : Dans une classe de 30 élèves, on doit élire deux délégués. Quel est le nombre de choix possibles ?

Il s'agit d'une combinaison de 2 éléments distincts parmi 30, c'est-à-dire :

$$C_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!2!} = \frac{30!}{28!\times 2!} = \frac{28!\times 29\times 30}{28!\times 2!} = \frac{29\times 30}{2} = 29\times 15 = 435$$

Propriétés : ($p \leq n$)

1) $C_n^p = C_n^{n-p}$
2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
3) $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\ a^p\ b^{n-p}$: binôme de Newton.

Résumé :

*Arrangement sans répétition : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

* Arrangement avec répétition : $A_n^{'p} = n^p$.

* Permutation sans répétition : $P_n = n!$

* Permutation avec répétition : $P'_n(r_1, r_2, \cdots, r_k) = \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdots r_k!}$

* combinaison sans répétition : $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$.