1ère année sciences de la terre et de l'univers **AU 2019-2020**

Matière : Mathématiques 2

Cours 2 : Les probabilités

1-Expérience aléatoire-Epreuve-Evénement

Définitions :

1-Une expérience est dite **aléatoire** si on ne peut pas dire à l'avance le résultat de l'expérience avec certitude. Ce pendant on est capable de connaitre l'ensemble des résultats de cette expérience.

On note par ξ expérience aléatoire et Ω l'ensemble des résultats de cette expérience.

Exemple :

□ Soit l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Dans ce cas $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

□ Soit l'expérience aléatoire

ξ_2 :lancer une pièce de monnaie

Dans ce cas $\Omega = \{P, F\}$

2-**Une épreuve** (ou événement élémentaire) est le résultat d'une expérience aléatoire et on le note par ω.

Exemple :

□ Dans l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

$\omega = 3$ est une épreuve

□ Dans l'expérience aléatoire

ξ_2 :lancer une pièce de monnaie

$\omega = 3$ est une épreuve

3-**Un événement** est un fait observable lié à l'expérience aléatoire qui une fois effectuée, il se réalise ou pas. On note l'événement par une lettre majuscule.

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Soit l'événement

A : ''Avoir un chiffre pair''

Si $\omega = 4$, alors on dit que l'événement A est réalisé

Si $\omega = 1$, alors on dit que l'événement A n'est pas réalisé

4-Un événement est dit **certain** s'il se réalise à chaque expérience.

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Soit l'événement

B : ''Avoir un chiffre inférieur strictement à 10''

5-Un événement est dit **impossible** s'il ne se réalise jamais.

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Soit l'événement

C : ''Avoir un chiffre négatif ''

6-Deux événements sont dits **incompatibles** si la réalisation de l'un entraine la non réalisation de l'autre et inversement.

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

▪ Soient les événements

A : ‘’Avoir un chiffre pair‘’

D : ‘’Avoir un chiffre impair ‘’

A et D sont dits incompatibles

▪ Pour la même expérience considérons les événements

E : ‘’Avoir le chiffre 2 ou 5‘’

F : ‘’Avoir le chiffre 1 ou 3 ‘’

E et F sont dits incompatibles

Remarque : On associe à l’événement A le sous ensemble de Ω formé des ω qui réalise A, par conséquence l’événement certain est associé à Ω et l’événement impossible est associé à C

Nous avons donc la correspondance suivante :

Evénement (langage logique)	Sous-ensemble associé (langage ensembliste)
A	$\{\omega \in A \ / \ \omega \ \ réalise \ A\}$
Evénement impossible	$\emptyset$
Evénement certain	Ω
Evénement A et B	$A \cap B$
Evénement A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
Evénement A ou B	$A \cup B$
Contraire de l’événement A	$\bar{A}$
L’événement A⇒l’événement B	$A \subset B$

Exemple :

Soit l’expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Considérons les événements définis dans les exemples précédents, on écrit alors

$A = \{2, 4, 6\}$, B = Ω , C = ∅

2-Axiome du calcul des probabilités

Définition d’une probabilité : Notons par ρ(Ω) l’ensemble des événements liés à Ω. Soit ξ une expérience aléatoire. On appelle probabilité notée P, toute application de l’ensemble des événements ρ(Ω) dans $[0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1)P(Ω)=1.

2)∀A ϵ ρ(Ω), 0≤P(A)≤1.

3) $\forall A_1, A_2, \cdots, A_n$ ϵ ρ(Ω) : P$(A_1 \cup\ A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ =P(A_1)+ P(A_2)+⋯+ P(A_n) .(Les A_i sont deux à deux disjoints).

Propriétés :

1)P(∅) = 0

2)∀A ϵ ρ(Ω), P(A) + P$(\bar{A}) = 1$.

3) $\forall A, B$ ϵ ρ(Ω) : P$(A \cup\ B)$ =P(A) + P(B) – P(A∩B) .

4) $\forall A_1, A_2, \cdots, A_n$ ϵ ρ(Ω) : P$(A_1 \cup\ A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ ≤P(A_1)+ P(A_2)+⋯+ P(A_n) .

5)Si A⊂B alors P(A)≤P(B).

Définition de **l'équiprobabilité** : L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ω ont la même probabilité. Donc s'il y a N événements élémentaires, chacun possède une probabilité de $\frac{1}{N}$ d'apparaître.

Exemple :

□ Soit l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Dans ce cas $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

□ Soit l'expérience aléatoire

ξ_2 :lancer une pièce de monnaie

Dans ce cas $P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}$

Formule fondamentale :(la probabilité d'un événement)

On définit la la probabilité d'un événement par la formule suivante :

P$(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$

Où $card(A)$ (cardinal de A) est le nombre d'éléments de A.

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire

ξ_1 :lancer un dé

Soit l'événement A : ''Avoir un chiffre pair''

Il faut écrire A sous forme d'un ensemble, ceci implique que $A = \{2, 4, 6\}$, et par suite $card(A) = 3$, d'un autre côté comme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors $card(\Omega) = 6$

En appliquant la formule $\mathrm{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ on obtient $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3-Probabilités conditionnelles

Définition : Soit P une probabilité sur Ω. Soit B un événement de ρ(Ω). On suppose que B est réalisé. Alors la probabilité de A sachant que B est déjà réalisé est donnée par :

$\mathrm{P}(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, on l'appelle probabilité conditionnelle.

Propriétés :

1) $\mathrm{P}(\bar{A}/B) = 1 - \mathrm{P}(A/B)$

2) Si A et B sont incompatibles $\mathrm{P}(A/B) = 0$.

3) Si A⊂B alors $\mathrm{P}(A/B) \geq \mathrm{P}(A)$.

4) Si B⊂A alors $\mathrm{P}(A/B) = 1$.

5) $P(A \cap B) = \mathrm{P}(A/B)\, P(B) = \mathrm{P}(B/A)\, P(A)$.

6) $P(A) = \mathrm{P}(A/B)\, P(B) + \mathrm{P}(B/\bar{A})\, P(\bar{A})$.

Formule des probabilités totales : Soit A_i , $i = 1, \cdots, n$ une partition de Ω. Soit B un événement quelconque, alors $\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B/A_i)\, P(A_i)$, c'est-à-dire :

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B/A_1)\, P(A_1) + \mathrm{P}(B/A_2)\, P(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(B/A_n)\, P(A_n)$

Formule de Bayes : Soit A_i , $i = 1, \cdots, n$ une partition de Ω. Soit B un événement quelconque, alors $\forall i = 1, \cdots, n$ on a : $\mathrm{P}(A_i/B) = \frac{\mathrm{P}(B/A_i)\, P(A_i)}{\mathrm{P}(B/A_1)\, P(A_1) + \mathrm{P}(B/A_2)\, P(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(B/A_n)\, P(A_n)} = \frac{\mathrm{P}(B/A_i)\, P(A_i)}{P(B)}$

Exemple : On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On choisit une urne au hasard, ensuite on tire une boule de l'urne choisit. (on suppose que les boules sont indiscernables au toucher).

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1

Réponses :

On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et par suite $card(\Omega) = 6$, d'un autre côté soit les événements suivants :

B :''obtenir une boule blanche''

N :''obtenir une boule noire''

U_1 :''le tirage s'effectue dans l'urne U_1''

U_2 :''le tirage s'effectue dans l'urne U_2''

1) En appliquant la formue des probabilités totales :

$$P(B) = P(B/U_1)P(U_1) + P(B/U_2)P(U_2)$$

$$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{13}{24} = 0{,}54$$

2) $P(U_1/B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{P(B/U_1)P(U_1)}{P(B)}$$ (c'est la formule de Bayes)

$$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{13}{24}} = \frac{9}{13} = 0{,}69$$

4-Evénements indépendants :

Définition : Deux événements A et B sont dits indépendants relativement à la probabilité P si : P(A∩B)= P(A)xP(B)

Exemple :

Dans un espace probabilisé on considère deux événements A et B tels que :

P(A) = 0,5 ; P(B) = 0,3 ; P(A∪B) = 0,65.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Pour répondre à cette question il faut vérifier la relation suivante : P(A∩B)= P(A)xP(B)

Calculons alors P(A∩B) et P(A)xP(B) et comparons entre les deux résultats.

▪ $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}3 \Rightarrow P(A) \times P(B) = 0{,}15$

▪ D'un autre côté, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ceci veut dire que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}65$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}15$

On voit bien que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On conclut alors que les événements A et B sont indépendants.

<u>Remarque :</u> Il ne faut confondre entre indépendant et incompatible. Si deux événements A et B sont indépendants, alors :

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P(B/A) = P(B) \\ P(A/B) = P(A) \end{cases}$$

Cela signifie que Deux événements sont indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre, tandis que Deux événements sont incompatibles si et seulement si la réalisation de l'un entraine la non réalisation de l'autre.

<u>Propriétés :</u> Soient A et B deux événements indépendants, alors :

1) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
2) $\overline{A}$ et B sont indépendants.
3) A et $\overline{B}$ sont indépendants.