Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2019/2020.
Master1_EDP&Appli_S2

Théorie des éléments finis

- Approximation variationnelle -

(Support de cours)

par Fethi ABI-AYAD

III. Théorie de l'approximation variationnelle

On se donne alors un $\mathbb{R}$ espace de Hilbert V muni d'une norme $\|\cdot\|_V$, une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ continue sur $V\times V$ et V-elliptique et on se donne aussi une forme linéaire L continue sur V ($L \in V'$).

On sait alors que le problème : Trouver $u \in V$ t.q. $\forall v \in V$ $a(u,v) = L(v)$ $(\mathcal{P})$ admet une solution unique u. Afin d'obtenir une approximation numérique de la solution u du P.V.G. $(\mathcal{P})$, on introduit un problème approché noté $(\mathcal{P}_h)$ posé dans un espace de dimension finie $V_h \subset V$ (V_h est dit sous-esp. d'approximation de V).

Il sera donc nécessaire de vérifier d'abord l'existence et l'unicité de la solution du problème approché $(\mathcal{P}_h)$ et ensuite montrer que la solution approchée u_h converge vers la solution unique u du P.V.G. $(\mathcal{P})$.

Puisque V_h est de dimension finie N et est un sous-espace de l'espace de Hilbert V alors $(\mathcal{P}_h)$: Trouver $u_h \in V_h$ t.q. $\forall v_h \in V_h$ $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ admet une solution unique u_h ($\dim V_h < +\infty \Rightarrow V_h$ complet $\Rightarrow V_h$ $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert car $V_h \subset V$).

N étant la dimension de V_h, soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ base de V_h. Ce qui nous permet d'écrire : $u_h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i = \overline{1,N}$.

Le problème $(\mathcal{P}_h)$ équivaut alors au système linéaire de N équations à N inconnues : (SL_h) : $\sum_{i=1}^{N} a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_i = L(\varphi_j)$ $1 \leq j \leq N$. (Dém. laissée aux étudiants)

Ainsi, pour montrer que $(\mathcal{P}_h)$ admet une solution unique u_h il suffit de montrer que le système linéaire (SL_h) admet un vecteur-solution unique $(\alpha_i)_{i=1}^{N}$ (α_i ($i=\overline{1,N}$) étant les coefficients de la combinaison linéaire de représentation de u_h ds la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$).

Sous forme matricielle (SL_h) s'écrit comme suit : $A\,\mathcal{U}_h = L_h$ où $A = \left(a(\varphi_i, \varphi_j)\right)_{1 \leq i,j \leq N}$, $\mathcal{U}_h = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ et $L_h = (L(\varphi_1), \dots, L(\varphi_N))^T$.

La matrice A du système linéaire (SL_h) est inversible. Pour prouver cela il suffit de se rappeler qu'une matrice carrée A est inversible ssi le système linéaire homogène associé $A\mathcal{V} = O_N = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{N\,fois}^T$ admet comme seule solution la solution triviale : $\mathcal{V} = O_N$.

Il faut aussi se rappeler que la forme bilinéaire et continue $a(\cdot,\cdot)$ étant V-elliptique, elle est aussi V_h-elliptique ($V_h \underset{s.e.v.}{\subseteq} V$) c.à.d. on a $\forall v_h \in V_h$ $a(v_h, v_h) \geq \alpha_a \|v_h\|_V^2$.

La preuve détaillée de l'inversibilité de la matrice carrée A est laissée aux étudiants (à titre d'exo.)

Conclusion : (SL_h) admet une solution unique $\mathcal{U}_h \Leftrightarrow (\mathcal{P}_h)$ admet une solution unique $u_h = \sum_{i=1,N} \alpha_i \varphi_i$ avec $\mathcal{U}_h = (\alpha_i)_{i=1}^{N} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$

A ce niveau, on examine l'erreur commise lors de l'approximation de la solu-
-tion u du P.V.G. $(\mathcal{P})$ par la solution u_h du P.A.V.G. $(\mathcal{P}_h)$:

<u>Théorème de convergence</u> : $\exists\, C>0$, une constante indépendante du sous-espace V_h de V telle que : $\|u-u_h\|_V \leq C \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_V$

<u>Preuve</u> : Soit $v_h \in V_h$ qcq et posons $w_h = v_h - u_h$ mais $V_h \underset{sev}{\subset} V$ donc $w_h \in V_h \subset V$ et nous savons que u vérifie le problème variationnel général : $a(u,v) = L(v)\ \forall v\in V \Rightarrow a(u,w_h) = L(w_h)$.

Par ailleurs u_h est solution du problème d'approximation variationnelle général $(\mathcal{P}_h)$: $a(u_h, v_h) = L(v_h)\ \forall v_h \in V_h$

Donc nous avons aussi $a(u_h, w_h) = L(w_h)$

$$\begin{cases} a(u,w_h) = L(w_h) \\ a(u_h, w_h) = L(w_h) \end{cases} \Rightarrow a(u,w_h) - a(u_h,w_h) = 0 \Rightarrow a(u-u_h, w_h) = 0$$

On obtient donc
$$\begin{aligned} a(u-u_h, u-u_h) &= a(u-u_h, u-v_h+v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, \underbrace{v_h-u_h}_{w_h}) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) \end{aligned}$$

En se rappelant que "a" est continue et V-elliptique c.à.d $\exists\, C_a>0$ et $\alpha_a>0$ t.q. $a(v_1,v_2) \leq C_a \|v_1\|_V \|v_2\|_V\ \forall v_1, v_2 \in V$

et $a(v,v) \geq \alpha_a \|v\|_V^2\ \forall v\in V$,

on obtient alors pour $u-u_h$ et $u-v_h \in V$ que :

$$\alpha\|u-u_h\|_V^2 \leq a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h) \leq C_a \|u-u_h\|_V \cdot \|u-v_h\|_V$$

$$\Rightarrow \|u-u_h\|_V \leq \frac{C_a}{\alpha_a} \|u-v_h\|_V\ \forall v_h \in V_h$$

$$\Rightarrow \|u-u_h\|_V \leq \frac{C_a}{\alpha_a} \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_V \ \blacksquare$$ <u>c.q.f.d.</u>

Ce théorème montre donc que le problème de l'évaluation de l'erreur $u-u_h$ se ramène à 1 problème de la théorie de l'approximation : Evaluer la quantité $\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V$ i.e la distance dans V entre la solution u du P.V.G. et le sous espace V_h de V.

<u>Référence de base</u> : P.-A. Raviart et J.-M. Thomas
Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Edition Masson ou Dunod.

Théorème 2 de convergence : Supposons qu'il existe un S/espace V_0 de V dense dans V et 1 application r_h de V_0 dans V_h tels que

$$\forall v \in V_0 \quad \lim_{h\to 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0.$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle converge c.à.d. $\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_V = 0$ (u sol. du P.V.G.(P) et u_h sol. de P.A.V.G. (P_h))

Dém. : Soit $\varepsilon > 0$; puisque V_0 est dense dans V, $\exists v \in V_0 / \|u - v\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2C}$

mais $\lim_{h\to 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \ h \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|v - r_h(v)\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2C}$

et donc pour h assez petit nous avons : $r_h(v) \in V_h$ et Thm 1 de convergence

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_V \leq C\|u - r_h(v)\|_V \leq C\left(\|u - v\|_V + \|v - r_h(v)\|_V\right)$$

$$\leq C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \|u - u_h\| = 0 \ \blacksquare$$

c.q.f.d.

Lorsque la méthode converge (c.à.d. lorsque l'on a $\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_V = 0$) On cherche l'ordre de convergence de la méthode d'approximation c.à.d une constante $k > 0$ telle que $\|u - u_h\| \leq D h^k$ où D est 1 cste > 0 indépendante de h.

L'ordre de convergence nous renseigne sur la rapidité de convergence de la méthode lorsque $h \to 0$: Une méthode d'approximation est d'autant plus rapide en termes de convergence que l'ordre k est plus grand.

III. 1 La méthode de Ritz - Galerkin

V étant toujours un espace de Hilbert, on a :

Définition 1 : Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ 1 suite de sous-espaces fermés de V. On dit que V est somme hilbertienne des E_n ($n \geq 1$) et on note $V = \bigoplus_{n\geq 1} E_n$ $= E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots$ si : (i) Les E_n sont deux à deux orthogonaux c.à.d.

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in E_m, \forall v \in E_n \quad m \neq n$$

(ii) L'espace vectoriel engendré par les E_n ($n \geq 1$) au sens algébrique V_0 est dense dans V (c.à.d l'espace vectoriel engendré par toutes les combinaisons linéaires finies des éléments des sous-espaces fermés E_n, est dense dans V)

$$V_0 = \left\{ x \in V / \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n(i)} \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R} \ (i = \overline{1,m}), x_{n(i)} \in E_{n(i)} \text{ avec } n(i) \in \mathbb{N}^* \ (i = \overline{1,m}) \right\}$$

Théorème 3 Supposons que V est somme hilbertienne des sous-espaces fermés E_n ($n \geq 1$). Soit $u \in V$ et soit $u_n = \Pi_n u$ (où Π_n est l'opé-rateur de projection orthogonale sur E_n). Alors on a:

Donc $\langle u-u_n, v\rangle_V = 0$ $\forall v \in E_n$

Voir pour cela H. Brezis: Analyse fonctionnelle Th. et Appli. page 80

a) $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ c.à.d. $u = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$

b) $\|u\|_V^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_V^2$ (égalité de Bessel-Parseval)

Preuve Soit $S_k = \sum_{n=1}^{k} \Pi_n$, S_k étant 1 somme finie d'opérateurs de projections orthogonales sur E_n $1 \leq n \leq k$. S_k est donc linéaire con-tinu de V dans V. Soit $u \in V$ alors nous avons : $u_n = \Pi_n u$ $1 \leq n \leq k$ $u_n \in E_n$ et $\langle u_i, u_j \rangle_V = \langle \Pi_i u, \Pi_j u \rangle_V = 0$ si $i \neq j$ $1 \leq i,j \leq k$ car les E_i sont deux à deux orthogonaux: $E_i \perp E_j$ si $i \neq j$ $1 \leq i,j \leq k$

Ceci entraîne que: $\|S_k u\|_V^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{k} \Pi_n u, \sum_{m=1}^{k} \Pi_m u \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{k} u_n, \sum_{m=1}^{k} u_m \right\rangle$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{n=1}^{k} \langle u_n, u_n \rangle = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|_V^2$$

Par ailleurs, puisque les E_n sont des sous-espaces vectoriels fermés de V alors si $u \in V$ et $u_n = \Pi_n u \in E_n$ nous avons $\langle u - \Pi_n u, v \rangle = 0$ $\forall v \in E_n$ et ceci $\forall n$. En particulier puisque $u_n \in E_n$: $\langle u - u_n, u_n \rangle = 0$ ce qui entraîne que : $\langle u, u_n \rangle = \langle u_n, u_n \rangle = \|u_n\|_V^2$.

et Après sommation nous obtenons alors:

$$\langle u, S_k u \rangle = \sum_{n=1}^{k} \langle u, u_n \rangle = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|_V^2 = \|S_k u\|_V^2$$

D'où $\|S_k u\|_V^2 = \langle u, S_k u \rangle \leq \|u\|_V \cdot \|S_k u\|_V \Rightarrow \|S_k u\|_V \leq \|u\|_V$ $\forall u \in V$

$$\Rightarrow \|S_k(u-v)\|_V \leq \|u-v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

Soit V_0 l'espace vectoriel engendré par les E_n. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\bar{u} \in V_0 / \|u - \bar{u}\| < \varepsilon$ (car $\overline{V_0}^V = V$ par hypothèse). Pour k assez grand nous avons : $S_k \bar{u} = \bar{u}$ c.à.d que $\bar{u}$ est combinaison linéaire d'éléments de k sous-espaces fermés E_n ($1 \leq n \leq k$ pour k assez grand), la preuve de cela est laissée aux soins des étudiants (à titre d'exercice).

D'un autre côté, puisque S_k est linéaire, nous avons:

$$\|S_k(u - \bar{u})\| = \|S_k u - S_k \bar{u}\| \leq \|u - \bar{u}\|.$$

Par conséquent $\|S_k u - u\|_V \leq \|S_k u - S_k \bar{u}\|_V + \|S_k \bar{u} - \bar{u}\|_V + \|\bar{u} - u\|_V$

$$\leq 2\|u - \bar{u}\| < 2\varepsilon \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

$\Rightarrow \lim_{k\infty} S_k u = u$ c.à.d. $u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n = \lim_{k\infty} \sum_{1}^{k} \Pi_n u$

et nous avons vu que $\|S_k u\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2$ et donc lorsque $k \to +\infty$ nous obtenons $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ ■

<u>Définition 2</u> On appelle base hilbertienne une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de V tels que (i) $\|e_n\| = 1$ $\forall n$ et $\langle e_m, e_n\rangle_V = 0$ $\forall m,n$ $m \neq n$.

(ii) L'espace vectoriel engendré par les $\langle e_n\rangle = \mathrm{Vect}(e_n)$ $n\geq 1$ est dense dans V.

Il résulte du théorème précédent que si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est 1 base hilbertienne alors $\forall u \in V$, u peut s'écrire sous la forme :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n\rangle e_n \quad \text{avec} \quad \|u\|_V^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2.$$

En effet, si on considère les $E_n = \langle e_n\rangle$ comme des espaces dont chacun est engendré par 1 élément de la base hilbertienne alors

$\langle u, e_n\rangle e_n \in E_n$ et $\Pi_n u \in E_n = \{\lambda e_n / \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \exists \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$u_n := \Pi_n u = \lambda_n e_n$ mais les E_n $(n\geq 1)$ constituent une somme hilbertienne pour l'espace V $\xRightarrow{\text{Thm 1 (a)}} u = \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n$ $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$

Par ailleurs $E_i = \langle e_i\rangle \perp \langle e_j\rangle = E_j$ si $i \neq j \Rightarrow \langle u, e_i\rangle_V = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle e_n, e_i\rangle_V = \lambda_i \|e_i\| = \lambda_i$

Donc $\boxed{\langle u, e_n\rangle = \lambda_n}$ $(n\geq 1) \Rightarrow u = \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n\rangle e_n$

et $\|u\|_V^2 = \sum_{n\geq 1} \|u_n\|_V^2 = \sum_{n\geq 1} \|\Pi_n u\|_V^2 = \sum_{n\geq 1} \|\lambda_n e_n\|_V^2 = \sum_{n\geq 1} |\lambda_n|^2 \underbrace{\|e_n\|_V^2}_{=1}$

$= \sum_{n\geq 1} |\lambda_n|^2 = \sum_{n\geq 1} |\langle u, e_n\rangle_V|^2$ (d'après thm 3 (b))

<u>Théorème 4</u> : Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne [<u>exple</u> : $V = H^1(\Omega)$ est séparable]

<u>Démonstration</u> : Soit $\{v_n\}_{n\geq 1}$ un sous-ensemble dénombrable dense ds V.

Soit F_k l'espace vectoriel engendré par $v_1, v_2, \dots, v_k$: $F_k = \langle v_1, \dots, v_k\rangle$.

Les F_k forment une suite croissante de sous-espaces de dimension finie telle que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ est dense dans V. On choisit une base orthonormale de F_1 que l'on complète en base orthonormale de F_2 (par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) etc...

On obtient alors une base hilbertienne de V ■ <u>c.q.f.d.</u>

Etant donnée une base hilbertienne de V, la méthode de Galer-kin consiste à chercher u_m l'élément de $V_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ $V_m \underset{sev}{\subseteq} V$, solution de: $\forall v \in V_m$, $a(u_m, v) = L(v)$. (P_m)

Théorème 5: $\forall m \geqslant 1$, le problème (P_m): $\forall v \in V_m$ $a(u_m, v) = L(v)$ admet 1 solution u_m et une seule dans V_m et l'on a:

$\lim\limits_{m\infty} \|u - u_m\|_V = 0$ où u est solution du P.V.G $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in V$

Preuve : Pour l'existence et l'unicité, on se réfère à ce que l'on a démontré sur le sous-espace $V_h \underset{s.e.v}{\subseteq} V$ où V_h est de dimension finie et sur lequel on définit le P.A.V.G associé:

$$a(u_h, v) = L(v) \ \forall v \in V_h : (P_h).$$

Pour la vérification de la convergence de la méthode de Galerkin, on applique le théorème 2 de convergence avec : $h = \frac{1}{m}$, $V_h = V_m$, $V_0 = V$ et $r_h = S_m$: projection orthogonale de V sur V_m et l'on vérifie facilement que (ii) de la définition d'une base hilbertienne entraîne que $\lim\limits_{m\infty} \|v - S_m v\|_V = 0$ $\forall v \in V$. ($S_m v \in V_m \Rightarrow S_m v = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle S_m v, e_i \rangle_V e_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \Pi_i v$)

On a déjà vu, d'après le thm 3, que $v = \lim\limits_{m\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \Pi_i v$

Donc $v = \lim\limits_{m\infty} S_m v$

Lorsqu'en outre la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, on a alors la solution u_m évoquée précédemment dans le thm 5 n'est autre que que la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle J sur le sous-espace V_m. La suite $(J(u_m))_{m \geqslant 1}$ est décroissante puisque $V_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ est 1 sous-espace de $V_{m+1} = \langle e_1, \dots, e_m, e_{m+1} \rangle$ et cette suite converge vers $J(u)$ puisque d'après le thm 5 précédent, u_m converge vers u dans V et J continue sur V.

$J(u_m) = \inf\limits_{V_m} J(v)$, $J(u_{m+1}) = \inf\limits_{V_{m+1}} J(v)$ et $V_m \subset V_{m+1} \Rightarrow J(u_{m+1}) \leq J(u_m)$

Dans ce cas particulier u_m est appelée l'approximation de Ritz-Galerkin de u dans V_m.

Remarque : $V_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_m\})$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de base : $e_1, \dots, e_m$.

III.2 Application

On considère un problème de Dirichlet homogène monodimensionnel :

$$(1)\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=f & \text{ds } \Omega=]0,1[\\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

Hypothèses : $f\in L^2(0,1)=L^2(]0,1[)$
$p,q\in L^\infty(]0,1[)=L^\infty(0,1)$
$\exists \alpha_p>0$ t.q. $p(x)\geq\alpha_p>0\ \forall x\in\Omega=]0,1[$
$q(x)\geq 0\ \forall x\in]0,1[$ (c.à.d. $q\geq 0$ sur $]0,1[$)

Soit donc $\Omega=]0,1[$ et l'on considère, comme espace de Hilbert pour l'étude du problème continu et la formulation variationnelle, l'espace $\underline{V=H_0^1(]0,1[)}$. Après multiplication des deux membres de l'équation par la fonction test $v\in H_0^1(\Omega)$ ($\Rightarrow v(0)=v(1)=0$) et intégration entre 0 et 1, on obtient :

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)v+q\,u\,v=fv\Rightarrow-\int_0^1\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)v\,dx+\int_0^1 quv\,dx=\int_0^1 fv\,dx.$$

$$\Leftrightarrow-\left[p\frac{du}{dx}v\right]_0^1+\int_0^1 p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx+\int_0^1 q\,u\,v\,dx=\int_0^1 fv\,dx.$$

Donc on peut écrire : $a(u,v)=\int_0^1 pu'v'\,dx+\int_0^1 qu\cdot v\,dx$

et $L(v)=\int_0^1 fv\,dx$.

Le P.V.G s'écrit : Chercher $u\in H_0^1(]0,1[)\,/\,a(u,v)=L(v)\ \forall v\in V$.

Supposant que $p,q\in L^\infty(]0,1[)\Rightarrow\exists\ C_1$ et $C_2>0\,/\,\|p\|_{L^\infty}\leq C_1$ et $\|q\|_{L^\infty}\leq C_2$ c.à.d. $\sup_{x\in]0,1[}|p(x)|\leq C_1$ et $\sup_{x\in]0,1[}|q(x)|\leq C_2$

et que $p(x)\geq\alpha>0\ \forall x\in]0,1[$ et $q(x)\geq 0\ \forall x\in]0,1[$.

alors, sous ces conditions, a est continue et V-elliptique.

En effet $V=H_0^1(\Omega)\ni v\Rightarrow\|v\|_V=\|v\|_{H_0^1(0,1)}=|v|_{H^1(0,1)}=\left(\int_{]0,1[}v'^2dx\right)^{1/2}=\underbrace{\sqrt{\int_0^1\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx}}_{=\|v'\|_{L^2(0,1)}}$

$v,w\in V=H_0^1(0,1)\Rightarrow|a(v,w)|\leq\int_0^1|p(x)|\cdot|v'(x)|\cdot|w'(x)|\,dx+\int_0^1|q(x)||v(x)w(x)|\,dx$

$p,q\in L^\infty(0,1)\longrightarrow\ \leq C_1\int_0^1|v'|\cdot|w'|\,dx+C_2\int_0^1|v|\cdot|w|\,dx$

Cauchy-Schwartz $\longrightarrow\ \leq C_1\|v'\|_{L^2(0,1)}\|w'\|_{L^2(0,1)}+C_2\|v\|_{L^2(0,1)}\cdot\|w\|_{L^2(0,1)}$

Inégalité de Poincaré $\longrightarrow$ $\forall v\in H_0^1(0,1)\ \|v\|_{L^2(0,1)}\leq C(0,1)\|v\|_{H_0^1(0,1)}$

$$\leq C_1\underbrace{\|v'\|_{L^2(0,1)}}_{=\|v\|_{H_0^1(0,1)}}\underbrace{\|w'\|_{L^2(0,1)}}_{=\|w\|_{H_0^1(0,1)}}+C_2C^2(]0,1[)\|v\|_{H_0^1(0,1)}\cdot\|w\|_{H_0^1(0,1)}$$

Donc $|a(v,w)|\leq C_a\|v\|_{H_0^1(0,1)}\cdot\|w\|_{H_0^1(0,1)}$ avec $C_a=C_1+C_2C(]0,1[)^2$. $\forall v,w\in V=H_0^1(0,1)$

D'où la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ sur $V\times V$.

$a(\cdot,\cdot)$ est aussi $H_0^1(0,1)$-elliptique c.à.d. $\exists \alpha_a>0 / a(v,v) \geq \alpha_a \|v\|^2_{H_0^1(0,1)} \forall v\in H_0^1(0,1)$
puisque $a(v,v)=\int_0^1 p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx+\int_0^1 q v^2 dx = \int_0^1 p(x)(v'(x))^2 dx + \int_0^1 q(x) v^2(x)\,dx$
$\geq \alpha_p \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 q v^2 dx \geq \alpha_p \|v\|^2_{H_0^1(0,1)}$ car $\int_0^1 q v^2 dx \geq 0$ car $q\geq 0$
Donc $a(\cdot,\cdot)$ est $H_0^1(0,1)$-elliptique et $\alpha_a=\alpha_p$ sa constante de V-ellipticité.
Par ailleurs L est continue sur $H_0^1(0,1)$ puisque : $\forall v\in V=H_0^1(0,1)$
$|L(v)| = \left|\int_0^1 f(x)v(x)dx\right| \leq \int_0^1 |fv|dx \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)}$ (Cauchy-Schwartz)
$\leq \|f\|_{L^2(0,1)} C(]0,1[)\|v\|_{H_0^1(0,1)}$ (Inégalité de Poincaré)
Donc L est continue sur $V=H_0^1(]0,1[)$ avec $C_L = C(]0,1[)\|f\|_{L^2(0,1)}$ sa constante de continuité.

Ainsi, pour tout $f\in L^2(]0,1[)$, Le P.V.G $a(u,v)=L(v)\ \forall v\in H_0^1(0,1)$ admet 1 solution unique $u\in V=H_0^1(]0,1[)$

Pour construire une approximation u_h de u, nous choisirons donc un sous espace V_h de V constitué de fonctions continues affines par intervalles. Soit donc donné un entier naturel N tel que $h=1/N+1$.

h est donc un pas de discrétisation auquel on associe les points $a_i=ih$, $0\leq i\leq N+1$ qui subdivisent l'intervalle $\overline{\Omega}=[0,1]$ en $N+1$ intervalles $K_i=[a_i,a_{i+1}]$, $0\leq i\leq N$ de longueur h chacun
L'espace V_h sera, ainsi, construit :

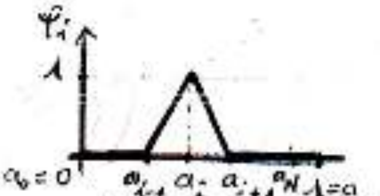
$$V_h=\left\{v\in V / \ v|_{K_i}\in P_1,\ 0\leq i\leq N\right\},$$

Rem $\dim P_1 = 2$ $\mathcal{B}_{P_1}=\{1,x\}$ à une variable

où P_1 désigne l'espace des fonctions polynômes de degré ≤ 1
(P_1 n'est autre que l'espace des fonctions affines (ou constantes) à une variable).
V_h est donc un sous-espace de dimension finie de V (Voir explicitation de sa base ci-dessous).
D'une part, toute fonction $v\in V=H_0^1(]0,1[)=\overline{\mathcal{D}(]0,1[)}^{H^1(0,1)}$ est presque partout continue sur $[0,1]$ ($\forall v\in H_0^1(]0,1[)\ \exists v_n\in\mathcal{D}(0,1) / v_n \xrightarrow[n\to\infty]{H^1} v \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|_{H^1(0,1)}=0$)
et vérifie $v(0)=v(1)=0$. D'autre part, toute fonction v continue sur $[0,1]$, $\mathcal{C}^1$ par intervalles et qui vérifie $v(0)=v(1)=0$ appartient à $H_0^1(0,1)$ en vertu du thm 2 et thm 4 (que nous avons vu ds La section des rappels sur les espaces de Sobolev). On obtient donc la caractérisation suivante de V_h : $V_h=\left\{v\in\mathcal{C}([0,1]);\ v(0)=v(1)=0,\ v|_{K_i}\in P_1,\ 0\leq i\leq N\right\}$

La dimension de V_h est N. On constate, en effet, que la suite des fonctions continues (sur $[0,1]$) et affines par intervalles (K_i, $i=1,\dots,N+1$) : φ_i de V_h ($1 \leq i \leq N$) définies par $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $j=1,\dots,N$, constitue une base de V_h (N étant un nbre maximum de fonctions d'un tel type).
Une telle fonction est donnée analytiquement par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-a_i|}{h} & \text{si } x \in [a_{i-1}, a_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Ainsi, à l'aide de la base $\{\varphi_i\}_{1\leq i\leq N}$ on peut exprimer la solution u_h dans V_h : $u_h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i$ mais $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\begin{smallmatrix} 1\leq i\leq N \\ 1\leq j\leq N \end{smallmatrix}$

$$u_h(a_j) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(a_j) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j .$$

En prenant comme fonction test $v \in V_h$ les fonctions de la base uniquement, le P.A.V.G. s'écrit sous forme d'1 système :

$$a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad j=1,\dots,N \iff \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 f \varphi_j \, dx \quad j=1,\dots,N$$

En tenant compte du seul fait que le support d'1 fonction φ_j est l'intervalle $[a_{j-1}, a_{j+1}]$, le système précédent prendra la forme suivante :

$$\begin{cases} a(\varphi_1,\varphi_1)\alpha_1 + a(\varphi_2,\varphi_1)\alpha_2 = \displaystyle\int_{0=a_0}^{a_2} f \varphi_1 \, dx & (a_0=0) \\ --- & \\ a(\varphi_{i-1},\varphi_i)\alpha_{i-1} + a(\varphi_i,\varphi_i)\alpha_i + a(\varphi_{i+1},\varphi_i)\alpha_{i+1} = \displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_{i+1}} f \varphi_i \, dx & \\ --- & \text{pour } 2 \leq i \leq N-1 \\ a(\varphi_{N-1},\varphi_N)\alpha_{N-1} + a(\varphi_N,\varphi_N)\alpha_N = \displaystyle\int_{a_{N-1}}^{1=a_{N+1}} f \varphi_N \, dx & (a_{N+1}=1) \end{cases}$$

$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 (p \varphi_i' \varphi_j' + q \varphi_i \varphi_j) \, dx$ où les dérivées des fonctions φ_i sont prises par morceaux c.à.d. $\int_0^1 p \varphi_i' \varphi_j' \, dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} p\left(\frac{1}{h}\right)\varphi_j' \, dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} p\left(-\frac{1}{h}\right)\varphi_j' \, dx$ tant que $\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j \neq \emptyset$ c.à.d $[a_{i-1}, a_{i+1}] \cap [a_{j-1}, a_{j+1}] \neq \emptyset$.
c.à.d. Lorsque $j = i-1, i, i+1$.

<u>Exercice</u> : Montrer que la suite finie des fonctions φ_i ($1\leq i\leq N$) avec $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ $1\leq i,j\leq N$ est une base de V_h (ça s'appelle base de fctions de forme).