Université de Tlemcen.
Faculté des sciences.
L2 Mathématiques

le 12/03/2020

Série n° 4 : Réduction des endomorphismes. "suite et fin"

Exercice n° 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable et inversible.
2. En déduire $m_A(x)$ et à l'aide de ce dernier déterminer A^{-1}

Exercice n° 17

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. A l'aide du spectre de A, montrer que $(A+I)$ est inversible.
3. Calculer $(A+I)^{-1}$ dans le cas où A est diagonalisable.
4. En prenant dans A, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, réduire A en blocs triangulaires.
5. Calculer A^2 et résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exercice n° 18

On suppose que $P_A(x) = (-1)^{\alpha}(x-\lambda)^{\alpha}$; $m_A(x) = (x-\lambda)^{\beta}$ et $\dim E_{\lambda} = \gamma$.

Montrer que $\frac{\alpha}{\beta} \leq \gamma \leq 1 + \alpha - \beta$.

Exercice n° 19

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

En discutant selon les valeurs de α, donner une forme réduite de JORDAN ainsi qu'une matrice de passage.

Devoir n° 4

Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, on suppose que :

$P_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$ et $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.

1. Que peut-on dire des dimensions propres ?
2. Quelles sont les forme de Jordan possibles ?

Solution

Exercice 16 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1% A est diagonalisable inversible

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} (+)$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & -4+\lambda \\ 2 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} (+)$$

$\times(-1)$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & -4+\lambda \\ 4 & 6-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2 \left[(6-\lambda)^2 - 4 \right] = (4-\lambda)^2 \left[\lambda^2 - 12\lambda + 32 \right]$$

$$= (4-\lambda)^2 (\lambda - 4)(\lambda - 8)$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (4-\lambda)^3 (8-\lambda)$$

vu que $1 \leq \dim \mathbb{E}_\lambda \leq mul(\lambda)$ donc $\dim \mathbb{E}_8 = 1$

car $mul(8) = 1$.

$v \in \mathbb{E}_4 \Rightarrow (A - 4I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow x + y + z - t = 0 \Rightarrow t = x + y + z$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{E}_4 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \dim \mathbb{E}_4 = 3 = mul(4)$

de plus P_A est scindé donc A est diagonalisable

vu que $0 \notin Sp(A)$ donc A est inversible.

2°/ A est diagonalisable $\Rightarrow m_A$ est scindé

admet des racines simples $\Rightarrow m_A = (4-\lambda)(8-\lambda)$

$\Rightarrow m_A = \lambda^2 - 12\lambda + 32$

$m_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 12A + 32I = 0$

$\Rightarrow A[A - 12I] = -32I$

$\Rightarrow A\left[\frac{12I - A}{32}\right] = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{12I - A}{32}$.

Exercice 17 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1°/ une condition pour que A soit diagonalisable.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha-\lambda & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha-\lambda & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} \quad \times(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & \alpha-1 & -\beta \\ -1 & -\alpha & 1-\alpha-\lambda & 1+\beta \\ \lambda & \alpha & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & \alpha-1 & -\beta \\ 0 & -\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ 1 & \alpha-\lambda & \alpha-1 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \ \times(-1) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ 1 & 1-\lambda & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^2 (1-\lambda)^2$$

il faut et il suffit que pour que A soit diagonalisable il faut que $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$ donc il faut que.

$A(A-I) = 0$

$$A(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha-1 & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & -\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & -1 \end{pmatrix} \cdots (1)$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha & * & \\ & & \end{pmatrix} = 0$$

donc une première condition est que $\alpha = 0$

on remplace $\alpha = 0$ dans (1) on a

$$A(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1-\beta & 0 & -1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-\beta & -1 & -1 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & 1+\beta \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dots (2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & & * & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = 0$$

donc une deuxième condition est que $\beta = 0$

on remplace $\beta = 0$ dans (2) on a

$$A(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

donc A est diagonalisable ssi $\alpha = \beta = 0$.

2/ vu que $Sp(A) = \{0, 1\}$ donc $Sp(A+I) = \{1, 2\}$

Vu que $0 \notin Sp(A+I)$ donc $A+I$ est inversible.

3/ dans le cas où A est diagonalisable on a

$$m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = (\lambda+1-1)(\lambda+1-2)$$

$$= (\lambda+1)^2 - 3(\lambda+1) + 2.$$

$$m_A(A) = 0 \Rightarrow (A+I)^2 - 3(A+I) + 2I = 0$$

$$\Rightarrow (A+I)\left[(A+I) - 3I\right] = -2I.$$

$$\Rightarrow (A+I)\left[\frac{2I - A}{2}\right] = I \Rightarrow (A+I)^{-1} = I - \frac{1}{2}A.$$

4°/ on considère $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$v \in E_0 \Rightarrow E_0 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$v \in E_1 \Rightarrow E_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$A' = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Aw_1 & Aw_2 & Aw_3 & Aw_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} Aw_1 = 0 & \Rightarrow w_1 \in E_0 \\ Aw_2 = w_1 & \dots(1) \\ Aw_3 = w_3 & \Rightarrow w_3 \in E_1 \\ Aw_4 = w_4 & \Rightarrow w_4 \in E_1 \end{cases}$$

on prend $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z + t = -1 \\ x + y = 1 \\ -y + t = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ 1-y \\ -1+y \end{pmatrix} \xrightarrow{y=0} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

5°/ $A^n = [P A' P^{-1}]^n = P A'^n P^{-1}$.

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^n & & 0 \\ & 1^n & \\ 0 & & 1^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-k} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k}_{\text{nilpotente de taille 2}}$$

$$= C_n^0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + C_n^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^1$$

$$= 0.$$

donc $A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$

$$\frac{dX}{dt} = AX \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = A'Y \quad \cdots (1) \\ X = PY. \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 & \Rightarrow y_1 = c_2 t + c_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 0 & \Rightarrow y_2 = c_2 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_3 & \Rightarrow y_3 = e^t c_3 \\ \dfrac{dy_4}{dt} = y_4 & \Rightarrow y_4 = e^t c_4. \end{cases}$$

Exercice 18:

$P_A(x) = (-1)^\alpha (x-\lambda)^\alpha$; $m_A(x) = (x-\lambda)^\beta$

$\dim E_\lambda = \gamma.$

α : la taille de la matrice ($\dim E$)

β : Taille du plus grand bloc de Jordan

γ : le nombre des blocs de Jordan donc :

$$\sum_{k=1}^{\gamma} \text{Taille}(J_k(\lambda)) = \alpha$$

or $\text{Taille}(J_k(\lambda)) \leq \beta \Rightarrow \sum_{k=1}^{\gamma} \text{Taille}(J_k(\lambda)) \leq \gamma\beta$

donc $\alpha \leq \gamma\beta \Rightarrow \gamma \geq \frac{\alpha}{\beta}$.

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\gamma} \text{Taille}(J_k(\lambda)) = \text{Taille}\, J_1(\lambda) + \sum_{k=2}^{\gamma} \text{Taille}(J_k(\lambda))$$

$$= \beta + \sum_{k=2}^{\gamma} \text{Taille}(J_k(\lambda)) \geq \beta + \sum_{k=2}^{\gamma} 1 = \beta + (\gamma - 1)$$

$\Rightarrow \alpha \leq \beta + \gamma - 1 \Rightarrow \gamma \geq 1 + \alpha - \beta.$