Chapitre 3

Variables aléatoires

Variables aléatoires continues

Définition une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple le poids d'un individu est une variable aléatoire qui peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}^+$.

Fonction de répartition

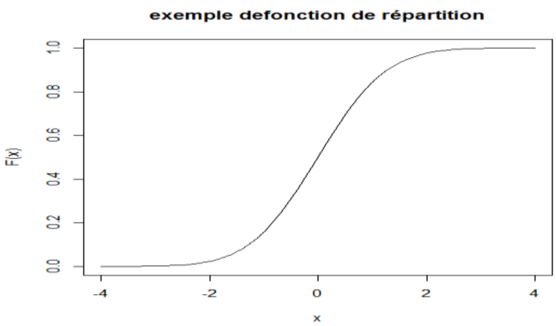
Définition Une variable aléatoire continue peut être définie par sa fonction de répartition F ou F_X, définie par

$F(x)=P(X\leq x)$

Propriétés

La fonction de répartition F est d'une v.a continue a les propriétés suivantes :
F est continue
F est croissante au sens large ; $x\leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
$\lim_{x\mapsto -\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\mapsto +\infty} F(x)=1$
$\forall x\in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$

Exemple



1) <u>La loi normale</u>

La loi normale est apparu naturellement (d'où son nom) comme limite de certains processus.

C'est la loi la plus connue des probabilités, parfois sous le vocabulaire loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche »

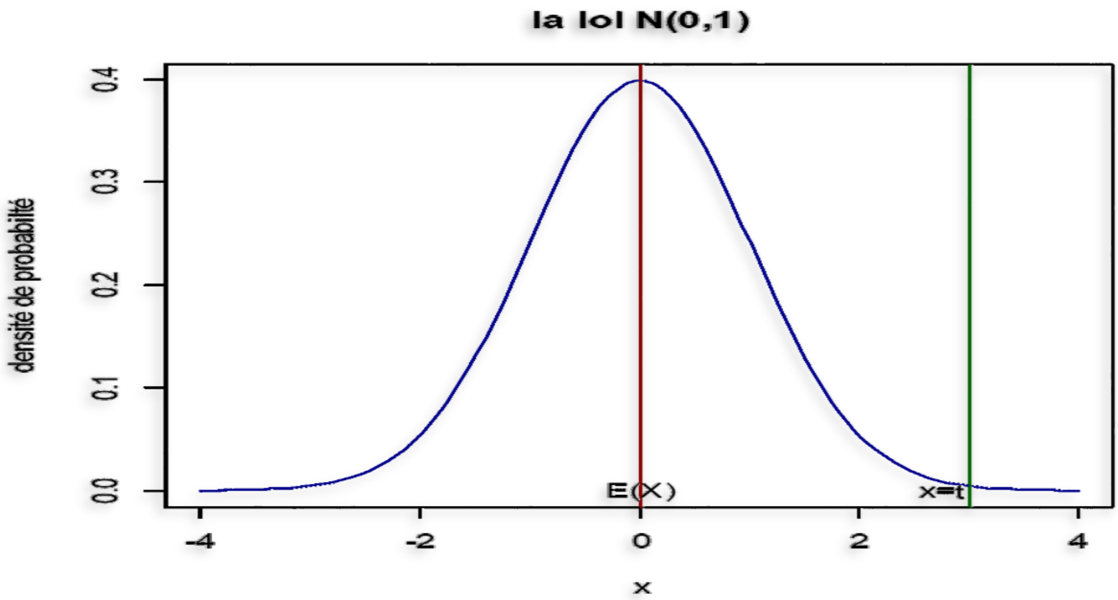
- On dit que X (une variable aléatoire) suit la loi normale $N(\mu,\sigma)$ de moyenne $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = \sigma^2$.
- *On écrit* $X \rightsquigarrow N(\mu,\sigma)$
- Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ on dit que X suit la loi normale centrée réduite.

- *On écrit* $X \rightsquigarrow N(0,1)$
- Si U $\rightsquigarrow N(0,1)$ alors $F(t) = P(X \leq t)$ est l'aire délimitée par la courbe de **la fonction de densité** de U

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

et l'axe des abscisses et la droite verticale $x = t$.

- Les valeurs de **la fonction de répartition** $F(t)$ sont répertoriées dans des tables appelées les tables de la loi Normale centrée réduite.



- $F(-t) = 1 - F(t)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

Exemple : X suit $N(2,\ 3)$ on veut calculer $P(X \leq 1)$.

$P(X \leq 1) = P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{1-2}{3}\right)$ on se ramène à la loi centrée réduite $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$.

$$P(X \leq 1) = P\left(U \leq \frac{-1}{3}\right) = F(-1/3)$$

$$= 1 - F(1/3) = 1 - F(0.33)$$

$$\approx 1 - 0.6293 = 0.3707$$

$0.33 = 0.3 + 0.03$

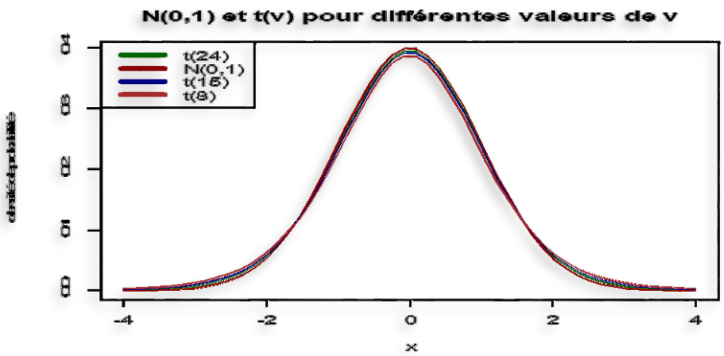
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793

2) La loi de Student la loi de Student à ν degré de liberté

On écrit $X \to t(\nu)$

On a $E(X) = 0$ pour $\nu > 1$

et $var(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$ pour $\nu > 2$.

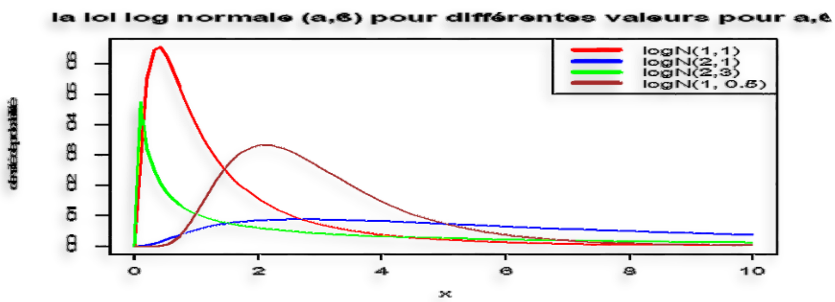


3) La loi log normale (ou loi de Galton)

Une variable aléatoire X suit une loi log-normale quand son logarithme suit une loi normale.

C'est à dire que $Y = \ln(X)$ suit une loi $N(\alpha; \beta)$ avec α et β les paramètres de la loi normale.

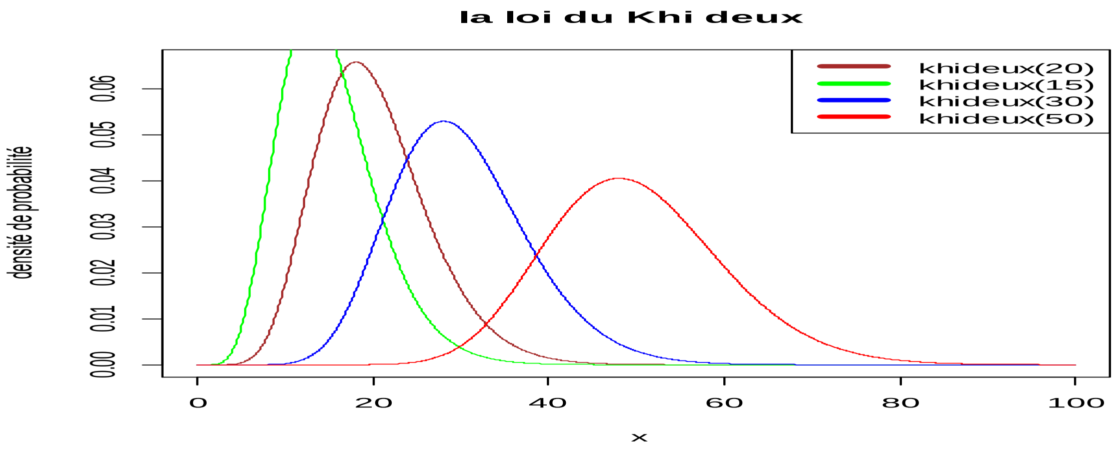
Elle est notée : $\ln N(\alpha; \beta)$.



4) <u>La loi du khi-deux</u> On dit que X suit la loi du khi-deux à ν degrés de liberté notée $\chi^2(\nu)$.

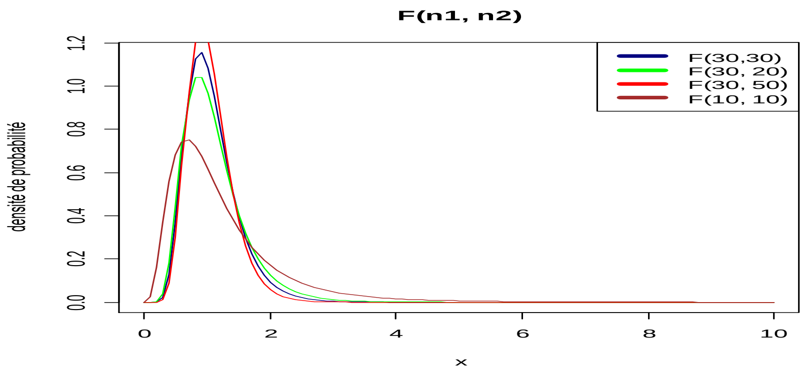
* χ^2 est positive

*$E(\chi^2) = \nu, V(\chi^2) = 2\nu$



Les valeurs de la fonction de répartition du Khi-deux dépendent de ν et α et elles sont tabulées (cf TD).

5) <u>La loi de Fisher –Snedecor</u> Notée $F(\nu_1, \nu_2)$avec deux degrés de liberté.



- $F(\nu_1, \nu_2) > 0$
- $F(\nu_1, \nu_2) \neq F(\nu_2, \nu_1)$
- Pour un $\alpha = P(F > t)$ fixé, il existe une table pour les valeurs de la fonction de répartition en fonction des deux degrés de liberté.
- (On a en général α=0.025 et α=0.05)