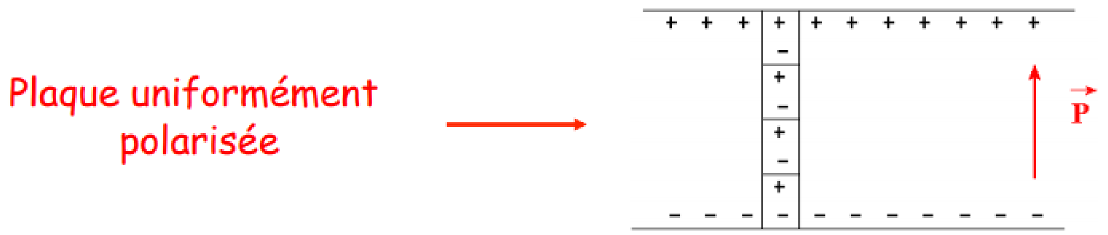
CHAPITRE II

ETUDE MACROSCOPIQUE DE LA POLARISATION EN REGIME STATIQUE

I. APPROCHE INTUITIVE DES CHARGES DE POLARISATION

Dans l'expérience de Faraday, la capacité C = Q/V augmente à charge constante : Le champ E doit donc diminuer : des charges opposées aux charges des armatures doivent apparaître. D'où viennent-elles ?



On remplace (par la pensée) la plaque par un empilement de dipôles:

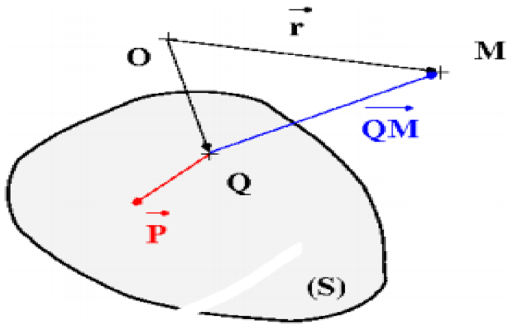
- La charge volumique sera nulle

- La charge surfacique sera non nulle

On appelle charges de polarisation les excédents locaux de charges engendrés par la polarisation.

En remplaçant la polarisation par un empilement de dipôles, on observe cette fois que les densités volumiques et surfaciques sont non nulles. Il apparaît un excédent de charges de polarisation dans le volume du diélectrique , lié à $\partial P/\partial z$.

II. DENSITES DE CHARGES EQUIVALENTES



On appelle (V) le volume du diélectrique (initialement neutre) et (S) la surface qui l'entoure. Le potentiel scalaire Φ M) correspondant au diélectrique s'écrit ($\overrightarrow{QM} = \vec{r}$ et $d^3Q = d^3\vec{r}$):

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \frac{\vec{P}\,.\overrightarrow{QM}}{QM^3}\, d^3Q$$

Par ailleurs on a:

$$\vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM}\right) = \frac{\vec{\nabla}_Q(\vec{P})}{QM} + \vec{P}\,.\vec{\nabla}_Q\left(\frac{1}{QM}\right) = \frac{\vec{\nabla}_Q(\vec{P})}{QM} + \vec{P}\,.\frac{\overrightarrow{QM}}{QM^3}$$

d'où

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[\vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM}\right) - \frac{\vec{\nabla}_Q \cdot (\vec{P})}{QM}\right] d^3Q$$

$$\boxed{\Phi(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[\vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla}_Q \cdot (\vec{P})}{QM} \right] d^3Q}$$

En utilisant le théorème de la divergence on obtient:

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \oiint_{(S)} \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) . \vec{n}\; dS - \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[\frac{\vec{\nabla}_Q \cdot (\vec{P})}{QM} \right] d^3Q$$

Le potentiel Φ créé par la distribution de dipôles qui constitue le diélectrique est donc égal au potentiel créé par une distribution surfacique σ_P et une distribution volumique ρ_P telles que :

$$\sigma_P = \vec{P} . \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P = -\vec{\nabla} . \vec{P}$$

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal, en tout point, à la surface et orienté vers l'extérieur.

Tout se passe comme si on pouvait remplacer le diélectrique et sa polarisation par les distributions de charges σ_P et ρ_P appelées charges de polarisation.

D'un point de vue macroscopique, la polarisation P du diélectrique est équivalente pour Φ (ou E) à une distribution macroscopique de charges de polarisation.

Ces charges ne sont pas des charges « comme les autres ». Ce ne sont pas des charges libres. On les appelle charges liées.

La signification physique du terme charge liée apparaîtra dans l'étude des régimes variables

Attention à bien distinguer σ_P et ρ_P des densités de charges libres σ et ρ si le milieu contient les deux types de charge.

Pour un régime statique, les charges de polarisation sont fictives du point de vue macroscopique. Les deux descriptions (en polarisation ou en charges) sont équivalentes.

La charge totale portée par le diélectrique est:

$$Q = \iiint_{(V)} \rho_P \, dV + \iint_{(S)} \sigma_P \, dS = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dV + \iint_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$Q = - \iint_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{d'après le théorème de la divergence}$$

$$Q = 0$$

On retrouve que le diélectrique est globalement neutre (car constitués de dipôles)

III. VECTEUR DEPLACEMENT ELECTRIQUE $\vec{D}$

Dans un diélectrique de polarisation P, l'équation de Maxwell Gauss s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre} + \rho_P}{\varepsilon_0}$$

par conséquent:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{P}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_{libre}$$

On introduit donc naturellement le vecteur $\vec{D}$ tel que:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

La définition de $\vec{D}$ est étendue au vide pour lequel:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$\vec{D}$ est le vecteur Déplacement électrique ou Induction électrique ou Excitation électrique ou Densité de flux électrique. L'unité de D est celle de P ($C.m^{-2}$).

La forme locale du théorème de Gauss s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Sa forme intégrale s'écrit:

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

Dans le cas général on a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre} + \rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} \quad \Leftrightarrow \quad \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

Les calculs avec le champ électrique E (et donc le potentiel Φ ou V) utilisent les densités totales. Les calculs avec D utilisent uniquement les densités de charges libres. L'intérêt de l'introduction de ce vecteur déplacement réside justement dans le fait qu'il ne dépend que des charges libres qui sont contrôlées par l'expérimentateur au moyen du voltage appliqué. Le champ électrique est plus difficile à connaitre car il dépend en outre des charges de polarisation dont la connaissance est compliquée.

Cependant il est possible d'utiliser E ou D indifféremment. En particulier, si « P est uniforme », alors la densité volumique de charges de polarisation est nulle car:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv 0$$

Ceci est vrai dans tout diélectrique homogène et uniforme.

IV. RELATIONS CONSTITUTIVES

Un milieu est linéaire si les composantes de sa polarisation sont des fonctions linéaires des composantes du champ électrique :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left[\chi_e\right] \vec{E}$$

Cette linéarité reste valable tant que le champs ne soit pas trop fort. La limite dépend de chaque corps.

[χe] est le tenseur de susceptibilité diélectrique (matrice 3x3) sur une base orthonormée). Il existe une base principale sur laquelle :

$$[\chi_e] = \begin{bmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{bmatrix}$$

Les éléments diagonaux χ_i sont les susceptibilités diélectriques principales.

Si le milieu homogène alors [χe] est indépendante du point de l'espace considéré.

Si le milieu isotrope, aucune direction n'est privilégiée. Cela signifie en particulier que P n'a aucune raison d'être dans une autre direction que E :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \; \chi_e(M, \vec{E}) \; \vec{E}$$

χ_e: susceptibilté électrique

La susceptibilité électrique χ_e est parfois appelée simplement susceptibilité (et notée χ) lorsqu'il n'existe pas de risque de confusion. C'est un nombre réel positif sans dimension.

Un milieu est dit linéaire, homogène et isotrope (ou lhi) si les valeurs propres de $[\chi_e]$ sont égales (isotropie) et indépendantes de l'espace (homogénéité) et du champ (linéarité) :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \; \chi \; \vec{E}$$

Dans un milieu (lhi):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \; \chi \; \vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \; \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \; (1+\chi) \; \vec{E} = \varepsilon_0 \; \varepsilon_r \; \vec{E} = \varepsilon \; \vec{E}$$

ε_r la permittivité diélectrique relative et ε est permittivité absolue: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\epsilon_0}$

Le théorème de Gauss s'écrit alors:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0 \, \varepsilon_r} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} \quad \Leftrightarrow \quad \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{libre}}{\varepsilon_0 \, \varepsilon_r} = \frac{Q_{libre}}{\varepsilon}$$

V. MILIEU (lhi) PLONGE DABS UN CHAMP ELECTRIQUE CONSTANT

Le champ E_0 d'un système de conducteurs dans le vide vérifie l'équation de Maxwell Faraday (MF):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{0}$$

et l'équation de Maxwell Gauss (MG):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0}$$

Par la pensée, on peut remplacer le vide par un milieu lhi. Le champ E vérifie alors :

(MF) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ **(MG)** $\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \, \varepsilon_r \, \vec{E}\right) = \rho_{libre}$

Soit encore :

(MF) $\vec{\nabla} \times \left(\varepsilon_r \, \vec{E}\right) = \vec{0}$ **(MG)** $\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_r \, \vec{E}\right) = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0}$

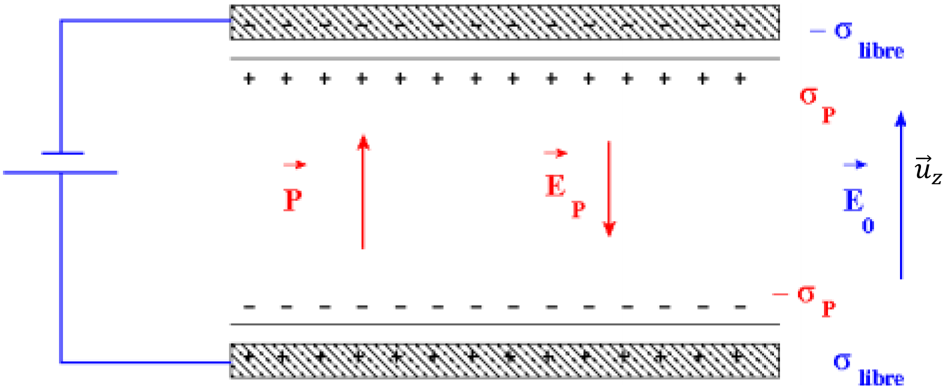
On en déduit que E vérifie :

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \quad < \quad \vec{E}_0$$

Le champ dans le diélectrique lhi est toujours plus faible que dans le vide.

VI. EXEMPLE DU CONDENSATEUR A LAME DIELECTRIQUE : CHAMP DEPOLARISANT

Considérons un diélectrique lhi plongée dans un condensateur:



Les charges libres des armatures créent le champ:

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_z$$

E_0 induit dans le diélectrique une polarisation P de même sens. Il apparaît sur les faces du diélectrique des densités de charges de polarisation.

$$\sigma = \vec{P}\,.\vec{n} = \pm P$$

Ces charges créent un autre champ dans le diélectrique:

$$\vec{E}_P = \frac{-\sigma_P}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

E_P est de sens opposé à E_0. Le champ total E dans la plaque vaut :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Généralisation : le champ E_P créé par la polarisation est toujours de sens opposé à E_0 (loi de modération). On l'appelle champ dépolarisant (même s'il n'est associé à aucun mécanisme de dépolarisation).

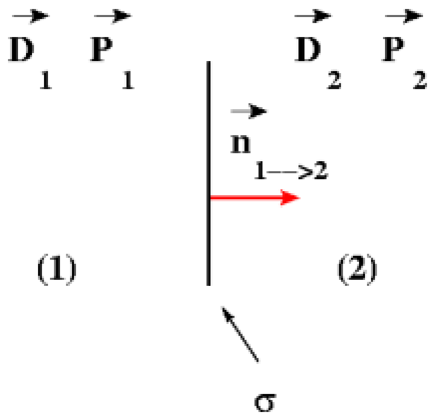
VII. SEPARATION DE DEUX MILIEUX DIELECTRIQUES

Pour une polarisation statique (champs électrique et magnétique constants), les équations de Mawwell s'écrivent:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

Si σ_{libre} est la densité de charge libres sur la surface de séparation, de deux diélectriques 1 et 2, dans un et modèle surfacique, On a :



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_{1\to 2} \quad \text{et} \quad \sigma_{P2} = -\vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{1\to 2}$$

La condition de passage pour la composante normale de E s'écrit :

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \cdot \vec{n}_{1\to 2} = \frac{\sigma_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{libre} + \sigma_{P1} + \sigma_{P2}}{\varepsilon_0}$$

Ou encore pour normale D_N de D:

$$\left(\varepsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2\right) . \vec{n}_{1\to 2} - \left(\varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1\right) . \vec{n}_{1\to 2} = \sigma_{libre} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) . \vec{n}_{1\to 2} = \sigma_{libre}$$

$$\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma_{libre} \, \vec{n}_{1\to 2}$$

On déduit alors l'équation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique et l'équation de discontinuité pour la composante normale du vecteur déplacement électrique D.

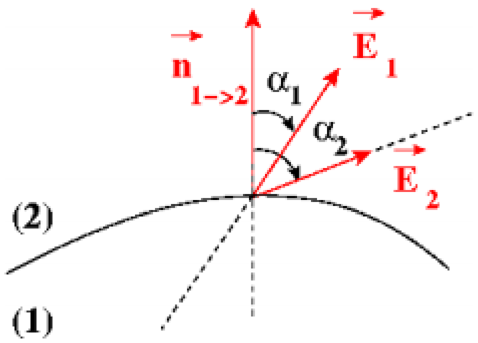
$$\vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1} \qquad \vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma_{libre} \, \vec{n}_{1\to 2}$$

Si $\sigma_{libre} = 0$, on en déduit :

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2) \qquad \varepsilon_1 E_1 \cos(\alpha_1) = \varepsilon_2 E_2 \cos(\alpha_2)$$

D'où:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\varepsilon_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{\tan(\alpha_1)}{\varepsilon_{r_1}} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\varepsilon_{r_2}}$$



Cette relation caractérise la réfraction des lignes de champ à la traversée de la surface (S) En passant dans un milieu de ε plus élevé, le champ E s'écarte de la normale.