

Théorie de Pontryagin-Rodygin pour les
systèmes lents-rapides
Stabilité pratique¹

Karim Yadi ²
Université de Tlemcen

¹Notes du cours donné lors de l'Ecole Symposium Réduction des Systèmes Différentiels et Applications, à IUDL Sidi Bel Abbes, mars 2012.

²Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications. E-mail :
k_yadi@mail.univ-tlemcen.dz ; yadikdz@yahoo.fr

Table des matières

1	Systèmes lents-rapides	2
2	Théorie de Pontryagin-Rodygin	5
2.1	Idée de la preuve du théorème 1	7
2.2	Exemples	10
3	Tikhonov, Pontryagin-Rodygin et la stabilité	14
3.1	Quelques exemples	14
3.2	Stabilité pratique	17

Chapitre 1

Systemes lents-rapides

Les systemes suivants sont parmi les modeles les plus etudies des perturbations singulieres :

$$\begin{aligned} \varepsilon dx/dt &= F(x, y, \varepsilon), & x(0, \varepsilon) &= \alpha_\varepsilon, \\ dy/dt &= G(x, y, \varepsilon), & y(0, \varepsilon) &= \beta_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le couple (x, y) est dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et ε est un reel positif suffisamment petit. Les fonctions F, G sont continues par rapport a leurs arguments ainsi que les conditions initiales. En remplaçant ε par 0, la premiere equation du systeme degene en une equation algebrique. Le probleme obtenu peut ne pas satisfaire les conditions initiales (α_0, β_0) . Le theoreme classique de dependance continue par rapport aux conditions initiales et/ou aux parametres (perturbation reguliere) est mis en defaut. De tels systemes dits algebroidiffereentiels ont donne lieu a des etudes independantes et interessantes en soi. Ils sont resolus comme limites de systemes obtenus en introduisant artificiellement un petit parametre qu'on fait tendre vers zero. On ne peut esperer qu'une solution eventuelle du probleme (1.1) converge uniformement vers celle supposee connue du probleme obtenu pour $\varepsilon = 0$. C'est un probleme de *perturbation singuliere*. L'approche classique pour la description du comportement des solutions de (1.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour $0 \leq t \leq L$, ou L peut etre infini, est celle des *echelles de temps multiples* [Voir cours dans cette ecole de T. Sari sur la comparaison entre la theorie geometrique de Fenichel et la theorie de Tikhonov]. Nous adoptons naturellement le vocabulaire de la cinematique ou la variable independante t est desormais le temps et $(x(t), y(t))^T$ la position d'un mobile dans l'espace de phases¹ a l'instant t . Quand l'echelle est double, on parle de champs ou de systemes *lents-rapides*. La variable x est dite rapide et la variable y lente. Le changement de l'echelle du temps $\tau = t/\varepsilon$ (temps rapide) transforme le systeme en

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= F(x, y, \varepsilon), & x(0, \varepsilon) &= \alpha_\varepsilon, \\ dy/d\tau &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon), & y(0, \varepsilon) &= \beta_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.2}$$

¹On omettra dans la suite de presenter les solutions comme des vecteurs colonnes.

où nous conservons les mêmes notations pour les variables. Ce problème est une *déformation à un paramètre* du système

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= F(x, y, 0), & x(0) &= \alpha_0, \\ dy/d\tau &= 0, & y(0) &= \beta_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Relativement à la composante y qui demeure d'abord proche de sa valeur initiale β_0 , la composante x varie très vite et est approchée par la solution de l'équation dite *de la couche limite*

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \beta_0, 0) =: F_0(x, \beta_0), \quad x(0) = \alpha_0. \quad (1.4)$$

C'est la phase rapide du mouvement. On définit alors l'*équation rapide*² par

$$\frac{dx}{d\tau} = F_0(x, y), \quad (1.5)$$

où la composante y est considérée comme un paramètre. La théorie des perturbations régulières donne, sous des hypothèses convenables, une approximation des solutions de (1.2) par une solution de (1.3) pour des temps τ de l'ordre de 1 seulement, correspondant à des temps t de l'ordre de ε . Il s'agit alors de décrire la phase lente du système d'origine (1.1) et nous allons voir qu'elle dépend du comportement des solutions de l'équation rapide (1.5). Une solution de (1.5) pourrait ne pas être bornée quand $\tau \rightarrow +\infty$, ou tendre vers un point d'équilibre, ou vers un autre type d'attracteur. Ce comportement dépend naturellement des données initiales. Par exemple, si l'équation (1.5) admet pour tout y dans un compact Y de \mathbb{R}^m un équilibre $x = \xi(y)$ asymptotiquement stable uniformément par rapport à y , on définit habituellement l'*équation lente* par

$$\frac{dy}{dt} = G(\xi(y), y, 0) =: G_0(\xi(y), y). \quad (1.6)$$

Le théorème de Tikhonov [11, 3] [Voir aussi le cours dans cette école de T. Sari] dit alors principalement que si, pour toute condition initiale fixée, la propriété d'unicité des solutions est satisfaite pour les équations considérées, alors les limites suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \xi(\bar{y}(t)), \quad t \in]0, T], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

où $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est la solution de (1.1) et $\bar{y}(t)$ la solution de (1.6) de condition initiale β_0 définie sur $[0, T]$. La première limite n'est pas vérifiée pour $t = 0$ où s'observe une couche limite pour la composante x . Si, de plus, l'équation lente (1.6) admet un équilibre y_∞ asymptotiquement stable qui ait β_0 dans son bassin d'attraction, alors $y(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \xi(\bar{y}(t)), \quad \text{pour tout } t > 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

²Cette équation est appelée parfois *équation de la couche limite*, mais nous réservons cette dernière appellation à l'équation rapide assujettie à une condition initiale.

La variété définie par $x = \xi(y)$, pour y variant dans le compact Y , est appelée *variété lente* du système (1.1). Elle est formée des points d'équilibre de l'équation rapide (1.5) et est donc attractive.

Chapitre 2

Théorie de Pontryagin-Rodygin

D'après Pontryagin et Rodygin [6], lorsque la dynamique rapide admet des cycles Γ_y asymptotiquement stables, le comportement limite du problème singulièrement perturbé est le suivant : après une transition rapide près des cycles Γ_y , les orbites de solutions s'enroulent très vite autour de la surface engendrée par ces cycles. C'est en quelque sorte l'équivalent de la variété lente. Le reste du mouvement, en fait la lente dérive de la variable y , est approchée par la moyenne sur les cycles. Ce résultat était obtenu pour des champs de vecteurs de classe au moins C^2 , sous l'hypothèse de stabilité asymptotique des cycles Γ_y pour l'approximation linéaire, c'est-à-dire que l'équation variationnelle correspondant au cycle a des multiplicateurs de modules inférieurs à l'unité avec une seule exception. Cependant, le résultat que nous énonçons ici montre que la description des solutions par Pontryagin et Rodygin demeure vraie pour des champs de vecteurs C^0 avec stabilité asymptotique des cycles. Nous désignons les hypothèses par la lettre P . A partir d'ici, le point (\cdot) au dessus d'une variable désignera la dérivation d/dt et l'apostrophe ($'$) la dérivation $d/d\tau$, où $\tau = t/\varepsilon$.

P1 : Pour tout y , l'équation rapide (1.5) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.

P2 : Il existe une famille de solutions $x^(\tau, y)$ dépendant continûment de $y \in Y$, où $Y \subset \mathbb{R}^m$ est un compact d'intérieur non vide, telle que $x^*(\tau, y)$ est une solution périodique de l'équation rapide (1.5) de période $T(y) > 0$. L'application $y \rightarrow T(y)$ est continue.*

P3 : Le cycle Γ_y correspondant à la solution périodique $x^(\tau, y)$ est asymptotiquement stable et son bassin d'attraction est uniforme sur Y .*

De ce qui précède on déduit que le cycle Γ_y dépend continûment de y et est localement unique, i.e. il existe un voisinage W de Γ_y tel que l'équation rapide (1.5) n'admet pas d'autre cycle dans W . La solution $x^*(\tau, y)$ est dite orbitalement asymptotiquement stable.

Nous définissons l'équation lente dans l'intérieur $\overset{\circ}{Y}$ de Y par le système

moyennisé

$$\dot{y} = \bar{G}(y) := \frac{1}{T(y)} \int_0^{T(y)} G_0(x^*(\tau, y), y) d\tau. \quad (2.1)$$

Supposons ce qui suit :

P4 : L'équation lente (2.1) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.

P5 : β_0 est dans \dot{Y} et α_0 est dans le bassin d'attraction de Γ_{β_0} .

Nous nous référons à l'équation de la couche limite comme étant l'équation (1.4) et au problème réduit comme étant

$$\dot{y} = \bar{G}(y), \quad y(0) = \beta_0. \quad (2.2)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Theorem 1 [7] *Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P5. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de l'équation de la couche limite (1.4). Soit $\bar{y}(t)$ la solution du problème réduit (2.2) et L un nombre réel dans son intervalle positif de définition. Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, toute solution $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ du problème (1.1) est définie au moins sur $[0, L]$ et il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau, \varepsilon) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ \text{dis}(x(t, \varepsilon), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &< \eta \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La distance mentionnée est la distance usuelle dans \mathbb{R}^n définie pour chaque t par $\inf_{\gamma \in \Gamma_{y(t)}} \|x(t, \varepsilon) - \gamma\|$.

Les approximations du théorème 1 peuvent être obtenues également pour tout $t \geq 0$ en supposant qu'il existe dans \dot{Y} un point d'équilibre y_∞ de l'équation lente moyennisée (2.1) qui soit asymptotiquement stable.

P6 : L'équation lente (2.1) admet un point d'équilibre y_∞ dans \dot{Y} qui est asymptotiquement stable et β_0 est dans son bassin d'attraction.

Theorem 2 [7] *Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P6. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de l'équation de la couche limite (1.4) et $\bar{y}(t)$ la solution du problème réduit (2.2). Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, toute solution $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ du problème (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau, \varepsilon) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } t \geq 0, \\ \text{dis}(x(t, \varepsilon), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &< \eta \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

En cas d'unicité de la solution $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ de (1.1), le théorème 1 dit que les limites suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}(x(t, \varepsilon), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &= 0, \quad t \in]0, L], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad t \in [0, L]. \end{aligned}$$

La première limite n'est pas vérifiée pour $t = 0$ où s'observe une couche limite pour la composante x . Si l'hypothèse $P6$ est vérifiée, le théorème 2 dit quant à lui que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}(x(t, \varepsilon), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &= 0, \quad \text{pour tout } t > 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1 Idée de la preuve du théorème 1

D'abord on montre qu'une solution $(x(\varepsilon\tau, \varepsilon), y(\varepsilon\tau, \varepsilon))$ de (1.1) reste proche de la solution $(\tilde{x}(\tau), \beta_0)$ de l'équation de la couche limite (1.4) en vertu de la dépendance continue par rapport aux paramètres et aux conditions initiales. On utilise un lemme de permanence, un outil de l'Analyse Non Standard (ANS) [1, 5] qui permet d'affirmer que cette approximation demeure vraie jusqu'à un temps $\tau = \omega$ "infiniment grand" correspondant tout de même à un temps $t_0 = \varepsilon\omega$ "infinitésimal". La trajectoire atteint donc très vite la surface \mathcal{S} engendrée par les cycles limites et ne s'en éloigne plus. Elle s'enroule rapidement autour tout en présentant une dérive lente de y décrite par la moyenne sur les cycles. On établit qu'une trajectoire qui arrive infiniment près de \mathcal{S} à un temps \bar{t} reste près du cycle $\Gamma_{\bar{y}(\bar{t})}$ le long duquel elle oscille rapidement avec une période approximative de $\varepsilon T(\bar{y}(\bar{t}))$, $\bar{y}(t)$ étant la solution du problème réduit (2.2).

Pour approcher cette moyenne, on utilise un autre outil puissant de la théorie non standard des perturbations : la méthode de stroboscopie. C'est une méthode proposée by J. L. Callot et G. Reeb et améliorée par R. Lutz T. Sari (voir par exemple [9]). Il est demandé au lecteur non habitué au langage de l'ANS d'admettre dans ce qui suit le sens intuitif du symbole " \simeq " i.e. "infiniment proche de". Le principe de la méthode stroboscopique est le suivant : soit $\phi(t)$ une fonction. Supposons que nous savons définir une suite $(t_n, \phi_n = \phi(t_n))$ telle que $t_{n+1} \simeq t_n$, $\phi(t) \simeq \phi_n$ dans $[t_n, t_{n+1}]$ et

$$\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{t_{n+1} - t_n} \simeq H(t_n, \phi_n),$$

où H est une fonction continue. On peut alors conclure que la fonction $\phi(t)$ est infiniment proche d'une solution de l'équation différentielle $\frac{d\phi}{dt} = H(t, \phi)$. Les t_n sont appelés des instants d'observation successifs.

Appliquons cette approche à notre problème¹. Supposons que la trajectoire considéré est arrivée infiniment près de \mathcal{S} . Soit t_n un instant d'observation. Soit

¹D'aucuns pourraient reprocher l'heuristicité de la présente démonstration, mais la preuve détaillée et rigoureuse [7] nous obligerait à nous livrer aux subtilités de l'ANS, et ce n'est pas notre intention dans ce cours.

$x_n = x(t_n)$ et $y_n = y(t_n)$ tel que $x_n \in \Gamma_{y_n}$. Le changement de variables

$$\tau = \frac{t - t_n}{\varepsilon}, \quad U(\tau) = \frac{y(t_n + \varepsilon\tau) - y_n}{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

transforme le problème

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= F(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= G(x, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

de condition initiale (x_n, y_n) en

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y_n + \varepsilon U), \\ U' &= G(x, y_n + \varepsilon U), \end{aligned}$$

de condition initiale $(x_n, 0)$. La solution du dernier système est notée $(x(\tau), U(\tau))$. Ce problème est une perturbation régulière de

$$\begin{aligned} x' &= F_0(x, y_n), \\ U' &= G_0(x, y_n), \end{aligned} \quad (2.6)$$

de condition initiale $(x_n, 0)$. D'après le théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres, on a

$$\begin{aligned} x(\tau) &\simeq x_0(\tau), \\ U(\tau) &\simeq U_0(\tau), \end{aligned} \quad \text{pour tout } t \in [0, \Lambda], \quad (2.7)$$

où $(x_0(\tau), U_0(\tau))$ est la solution de (2.6) de condition initiale $(x_n, 0)$ avec Λ dans son intervalle positif de définition. La première équation de (2.6) n'est rien d'autre que l'équation rapide (1.5) de condition initiale x_n et de paramètre $y = y_n$. Il existe $\tau_n \in [0, T(y_n)]$ tel que $x^*(\tau_n, y_n) = x_n$. D'où

$$x_0(\tau) = x^*(\tau + \tau_n, y_n), \quad U_0(\tau) = \int_0^\tau G_0(x^*(s + \tau_n, y_n), y_n) ds.$$

En utilisant (2.6) et (2.7) et la périodicité de x^* , nous avons

$$U(T(y_n)) \simeq \int_0^{T(y_n)} G_0(x^*(s, y_n), y_n) ds. \quad (2.8)$$

Considérons à présent l'instant successif d'observation $t_{n+1} := t_n + \varepsilon T(y_n)$. Soit $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ et $y_{n+1} = y(t_{n+1})$. D'après (2.5) et (2.8), nous avons

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{U(T(y_n))}{T(y_n)} \simeq \bar{G}(y_n).$$

D'après la méthode de stroboscopie, $y(t, \varepsilon) \simeq \bar{y}(t)$ pour tout $0 \leq t \leq L$.

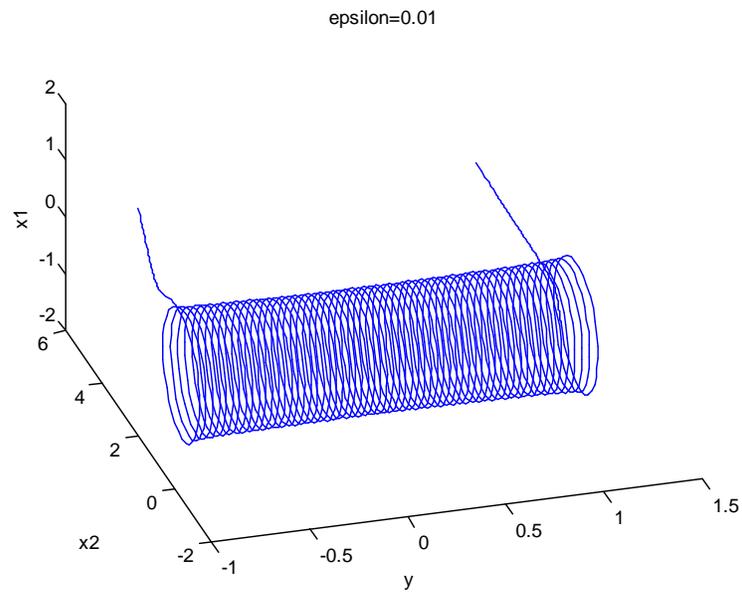


FIG. 2.1 – Une solution de (2.9) avec $\varepsilon = 0.01$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\beta = -1$ dans l'espace de phase (x_1, x_2, y) . La trajectoire continue à s'enrouler autour de la surface engendrée par les cycles Γ_y , même quand ces derniers sont instables, jusqu'à $y = +1$.

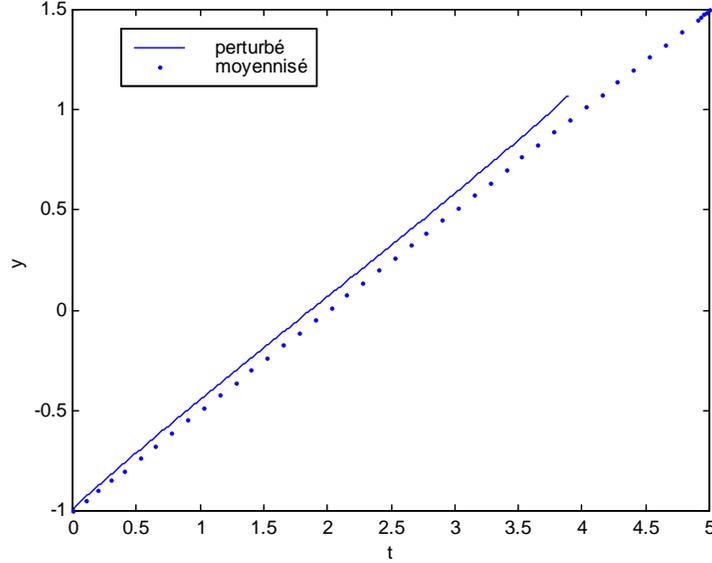


FIG. 2.2 – Comparaison de la composante $y(t, \varepsilon)$ de la solution de (2.9) et de la solution $\bar{y}(t)$ de l'équation moyennisée (2.12) correspondant aux données de Fig.2.1. L'approximation de $y(t, \varepsilon)$ par $\bar{y}(t)$ est valable jusqu'à $t = 4$.

2.2 Exemples

Exemple 1 [7]

L'exemple suivant illustrera le résultat du théorème 1 mais aussi un phénomène de retard à la bifurcation. Considérons le système lent-rapide tridimensionnel

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= x_2 - yx_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= -x_1 - yx_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ \dot{y} &= x_1^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

d'équation rapide

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - yx_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ x_2' &= -x_1 - yx_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où y est un paramètre. En coordonnées polaires ($x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$), l'équation (2.10) s'écrit

$$\begin{aligned} r' &= -ry(1 - r^2)^3, \\ \theta' &= -1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.11) nous voyons que l'équation rapide (2.10) possède un cycle unique non trivial Γ_y pour toute valeur non nulle de y , qui n'est autre que le cercle

de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Soit $x^*(\tau, y) = (\cos \tau, -\sin \tau)$ une solution 2π -periodique d'orbite Γ_y . Ces cycles sont asymptotiquement stables pour tout $y < 0$ et instables pour $y > 0$. Si $y = 0$, l'origine de (2.10) est un centre. Le théorème de Pontryagin-Rodygin [6] ne s'applique pas car les cycles Γ_y ne sont pas exponentiellement stables. Notons aussi que pour tout $y < 0$, le bassin d'attraction de Γ_y est le plan (x_1, x_2) tout entier privé de l'origine, si bien que la stabilité est uniforme sur tout intervalle Y de $] -\infty, 0[$. Soit (S) le problème de Cauchy consistant en le système (2.9) avec la condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ telle que $\beta < 0$. Le problème réduit est défini par

$$\dot{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \beta. \quad (2.12)$$

Sa solution est $\bar{y}(t) = \beta + t/2$. D'après le théorème 1, la solution de (2.9) satisfait $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t)$ tant que $0 \leq t \leq L < -2\beta$. De plus, $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon))$ reste près du cycle $\Gamma_{\bar{y}(t)}$, en oscillant rapidement autour, avec une période approximative de $2\pi\varepsilon$, c'est-à-dire que $r(t)$ est approchée par la solution de l'équation moyennisée

$$\varepsilon \dot{r} = -r\bar{y}(t)(1 - r^2)^3, \quad r(0) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \quad (2.13)$$

La solution de (2.13) est notée par $\bar{r}(t)$. On vérifie que $\bar{r}(-4\beta - t) = \bar{r}(t)$. En particulier, pour $t = 0$, $\bar{r}(-4\beta) = \bar{r}(0)$. Puisque $\bar{y}(-4\beta) = -\beta$, si une trajectoire du système moyennisée s'approche des cycles de rayon 1 pour une valeur $\beta < 0$, elle demeure alors proche des cycles tant que $\beta < \bar{y}(t) < -\beta$. Rappelons que, pour $0 < \bar{y}(t) < -\beta$, les cycles sont instables : il y a retard à la bifurcation pour le système moyennisé. La relation *entrée-sortie* près des cycles est définie par $\beta \mapsto -\beta$. Les figures 2.1 et 2.2 sont des simulations numériques (MATLAB) montrant que la solution $y(t, \varepsilon)$ est approchée par la solution moyennisée $\bar{y}(t)$ même au-delà du temps $t = -2\beta$ où les cycles deviennent instables. Cette approximation a lieu asymptotiquement jusqu'au *temps de sortie* $t = -4\beta$ du système moyennisé. L'enroulement de la trajectoire de $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ autour des cycles Γ_y se poursuit pour des valeurs strictement positives de y , bien que les cycles soient devenus instables.

Exemple 2

Considérons le système (Σ) suivant

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y} &= -y^3 x_1^2, \end{aligned}$$

qui se transforme en coordonnées cylindriques $(x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, y)$ en

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{y} &= -r^2 y^3 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

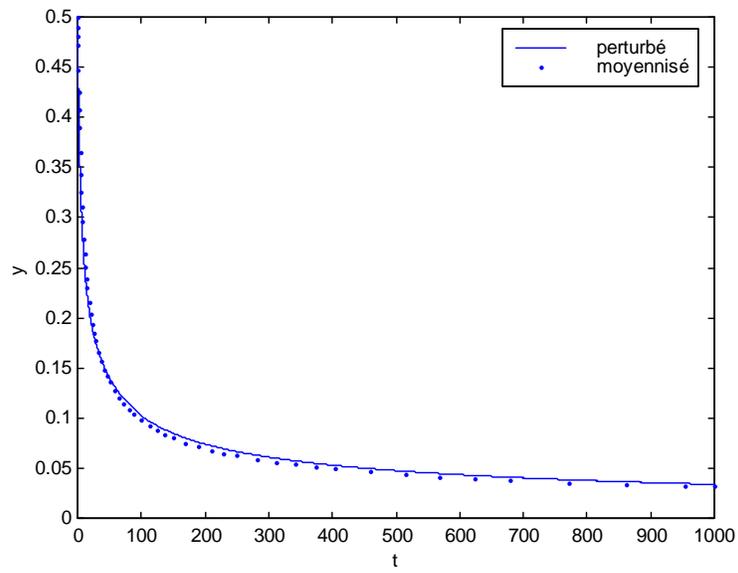


FIG. 2.3 – Comparaison de la composante $y(t, \varepsilon)$ de la solution de (Σ) de condition initiale $(1, 1, 0.5)$ et de la solution $\bar{y}(t)$ de l'équation moyennisée (2.15) avec $\varepsilon = 0.05$.

L'équation rapide

$$\begin{aligned} r' &= r(r-1)^2(1-r^2), \\ \theta' &= 1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

admet un cycle limite stable Γ_y correspondant à $r = 1$ (cercle de centre l'origine et de rayon 1). Son bassin d'attraction est uniforme par rapport à y , puisque c'est tout le plan (x_1, x_2) excepté l'origine. Ce cycle correspond par exemple à la solution 2π -périodique $x^*(\tau, y) = (\cos \tau, \sin \tau)$. D'après le théorème 1, l'équation régissant le mouvement lent est donnée par

$$\dot{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^3 \cos^2 \tau d\tau = -\frac{y^3}{2}. \tag{2.15}$$

Cette équation admet l'origine comme équilibre asymptotiquement stable. Si l'on choisit une condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ de (Σ) telle que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, la solution $\bar{y}(t)$ de (2.15) de condition initiale β est $\bar{y}(t) = \pm \sqrt{\beta^2 / (t\beta + 1)}$. Le théorème 2 permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}(x(t, \varepsilon), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &= 0, \quad t > 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

On donne un exemple de simulation sur la figure.2.3.

Chapitre 3

Tikhonov, Pontryagin-Rodygin et la stabilité

3.1 Quelques exemples

Il est connu que la stabilité asymptotique n'est pas robuste sous l'effet de petites perturbations. La stabilité asymptotique, disons de l'origine d'un problème perturbé régulièrement, n'est pas assurée par la stabilité asymptotique de l'origine du problème réduit. Qu'en est-il des systèmes lents-rapides ? Supposons que l'origine d'un problème singulièrement perturbé et du problème réduit est un point d'équilibre. Il a été établi, sous des conditions de stabilité exponentielle tant de l'origine de l'équation rapide que de celle de l'équation lente, que l'origine de tout le problème est exponentiellement stable (voir par exemple [2] théorème 9.3, page 380). Pour un champ différentiable, lorsque le problème réduit possède par exemple un cycle limite Γ , la question de savoir si le problème singulièrement perturbé admet ou non une orbite périodique Γ_ε près de Γ pour de petites valeurs de ε a été traitée par des auteurs comme K. Friedrichs, W. Wasow, N. D. V. Anosov, N. Fenichel et plus récemment par F. Verhulst [12]. Il a été établi que l'orbite Γ de période \mathcal{P} peut être "prolongée" (continued) à une famille Γ_ε d'orbites fermées si (i) Γ , comme orbite du problème réduit, a 1 comme multiplicateur simple de Floquet, (ii) pour tout $y \in \Gamma$, le point d'équilibre $x = \xi(y)$ de l'équation de la couche limite est hyperbolique. Ce genre de résultats exige des conditions fortes qui assurent jusqu'à l'unicité de Γ_ε pour ε assez petit avec une période tendant vers \mathcal{P} quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et la propriété de phase asymptotique. Examinons d'abord les exemples suivants :

Exemple 3 Le système lent-rapide planaire

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -y^2 x + \varepsilon y,\end{aligned}$$

où ε est un petit paramètre positif a pour équation rapide

$$x' = -x + y.$$

La variété lente est définie par la bissectrice $x = \xi(y) := y$. Elle est formée d'équilibres (globalement) asymptotiquement stables de l'équation rapide pour toute valeur de y . En substituant, dans la deuxième équation du système, $\xi(y)$ à x et 0 à ε , on obtient l'équation lente

$$\dot{y} = -y^3.$$

L'origine $y = 0$ de l'équation lente est (globalement) asymptotiquement stable. On peut appliquer au problème le théorème de Tikhonov pour les temps infinis pour toute condition initiale (x_0, y_0) . On a alors, d'après (1.7),

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \\ \forall t > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \xi(\bar{y}(t)), \end{aligned}$$

où $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est la solution du système tout entier de condition initiale (x_0, y_0) et $\bar{y}(t)$ est la solution de l'équation réduite. A présent, sachant que $\bar{y}(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, on obtient la limite suivante pour la solution du problème d'origine

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (0, 0).$$

Cette limite ne signifie pas que l'origine du système, qui est ici un point d'équilibre, est asymptotiquement stable, ni même attractive. On vérifie par linéarisation que c'est un point-selle pour toute valeur de ε .

Exemple 4 Le système lent-rapide suivant

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x^3 + \varepsilon x, \\ \dot{y} &= -y + x^2, \end{aligned}$$

est donné uniquement pour exhiber un exemple où, contrairement au précédent, l'origine de l'équation rapide $x' = -x^3$ est asymptotiquement stable mais pas exponentiellement et celle de l'équation lente $\dot{y} = -y$ est exponentiellement stable. On peut alors affirmer que toute solution du problème perturbé tend vers $(0, 0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $t \rightarrow +\infty$. Pourtant, **l'origine $(0, 0)$ est un point-selle pour toute valeur de $\varepsilon > 0$.**

Exemple 5 Les équations rapide et lente du système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x + \varepsilon, \\ \dot{y} &= -y + \varepsilon x, \end{aligned}$$

sont données respectivement par $x' = -x$ et $\dot{y} = -y$ dont les origines sont exponentiellement stables. Toute solution du problème singulièrement perturbé

tend vers $(0, 0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $t \rightarrow +\infty$. Cependant, **l'origine n'est même pas un point d'équilibre du problème.**

Exemple 6 Reconsidérons le système (Σ) de l'exemple 2 (page 11)

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y} &= -y^3 x_1^2,\end{aligned}$$

transformé en coordonnées cylindriques en

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{y} &= -r^2 y^3 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Son équation rapide

$$\begin{aligned}r' &= r(r - 1)^2(1 - r^2), \\ \theta' &= 1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

admet le cercle unité Γ_y comme unique cycle limite stable. L'équation lente était définie par

$$\dot{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^3 \cos^2 \tau d\tau = -\frac{y^3}{2}.\tag{3.2}$$

L'origine $y = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable de (3.2) mais sa stabilité n'est pas exponentielle. On peut affirmer grâce au théorème 2 (voir les limites (2.4)) que pour toute condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ de (Σ) telle que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, on a

$$\forall t \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \forall t > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}((x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon)), \Gamma_{\bar{y}(t)}) = 0,$$

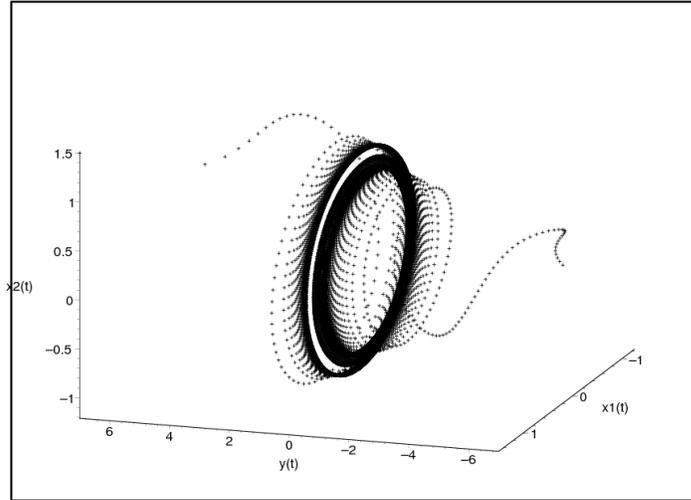
où $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est la solution du système (Σ) de condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ et $\bar{y}(t)$ est la solution de (3.2) de condition initiale β . Enfin, puisque $\bar{y}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} \text{dis}((x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t)), \Gamma_0 \times \{0\}) = 0.$$

Cette limite ne dit pas que la courbe fermée $\Gamma_0 \times \{0\}$ dans l'espace de phases \mathbb{R}^3 est un ensemble asymptotiquement stable. D'ailleurs, pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, **le cylindre formé par les cycles Γ_y est "répulsif" pour le système (Σ)** , étant compris entre deux cylindres "attractifs" correspondant à $r = 1 - \varepsilon$ et $r = 1 + \varepsilon$. Autrement dit, la dynamique rapide "exacte" du problème, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned}r' &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \theta' &= 1,\end{aligned}$$

qui est une déformation à un paramètre de (3.1), admet pour tout y et pour tout $\varepsilon > 0$ deux cycles limites $r = 1 - \varepsilon$ et $r = 1 + \varepsilon$ stables entourant le cycle limite $r = 1$ instable (voir Fig.3.1).



Simulation de l'exemple 6 avec $\varepsilon = 0.1$.

Dans les applications, il est raisonnable d'imposer la condition de stabilité de type exponentiel, ou de type exponentiel uniforme en place de la simple stabilité asymptotique (on dira que la stabilité asymptotique est critique lorsqu'elle n'est pas exponentielle). Les exemples qui précèdent montrent justement que la stabilité asymptotique n'est pas robuste. Signalons enfin que la stabilité exponentielle des origines des équations lente et rapide n'est pas une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique de l'origine, quand c'est un équilibre, du système complet ([2], exemple 9.9).

3.2 Stabilité pratique

Les limites des exemples précédents, bien que n'impliquant pas une stabilité asymptotique, apportent une information d'un intérêt pratique. Elles traduisent une sorte de stabilité "apparente" des équilibres où des cycles des systèmes en question pour de très petites valeurs du paramètre ε . Examinons le cas d'un système différentiel dépendant du paramètre positif ε

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \tag{3.3}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Notons par $x(t, x_0, \varepsilon)$ les solutions telles que $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$. Nous ne supposons pas que la limite de f est définie lorsque ε tend vers 0. Le système (3.3) peut donc être singulièrement

perturbé. Les deux définitions suivantes sont extraites du cours donné par C. Lobry et T. Sari lors de l'école CIMPA 2003 de Tlemcen, Contrôle Non Linéaire et Applications ([8], 151-177) (voir aussi des mêmes auteurs le rapport de recherche [4]). La terminologie est néanmoins empruntée à A. R. Teel et L. Praly dans [10]. Ces derniers en font usage dans la théorie de la commande en termes de stabilisation pratique des systèmes.

Definition 1 *On dit que l'origine est semiglobalement pratiquement asymptotiquement stable (SGPAS) pour le système (3.3) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ si, pour tout $R > 0$ et tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout $t \geq T$ et tout x_0 tel que $\|x_0\| \leq R$, toute solution $x(t, x_0, \varepsilon)$ de (3.3) satisfait $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| \leq r$.*

La définition dit que toute solution vérifie $\lim x(t, x_0, \varepsilon) = 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ et que la convergence est uniforme par rapport à x_0 dans la boule de \mathbb{R}^n de rayon R et de centre 0 (i.e. $\lim_{t \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \text{Sup}_{\|x_0\| \leq R} \|x(t, x_0, \varepsilon)\| = 0$). En d'autres termes, si \mathcal{B}_R et \mathcal{B}_r sont les boules de \mathbb{R}^n de centre l'origine et de rayons respectifs R et r , toute trajectoire partant d'une boule arbitrairement grande \mathcal{B}_R atteint une boule arbitrairement petite \mathcal{B}_r en un temps fini assez grand et pour ε assez petit. Ceci n'est pas une attractivité uniforme¹ par rapport aux conditions initiales à cause de la présence du paramètre ε .

Exercices (équations scalaires régulièrement perturbées) : Ces exemples, vus presque tous dans [4], montrent que la propriété de stabilité asymptotique semiglobale pratique quand $\varepsilon \rightarrow 0$ signifie en quelque sorte que l'origine "semble" globalement asymptotiquement stable quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

1. Montrer que c'est le caractère de *globalité* de la stabilité asymptotique de l'origine qui est "apparent" quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour l'équation $\dot{x} = x(\varepsilon x - 1)$ (examiner le bassin d'attraction).

2. Montrer que c'est le *statut de point d'équilibre* qui est apparent pour l'origine de l'équation $\dot{x} = \varepsilon - x$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Montrer que l'origine de $\dot{x} = x^2(\varepsilon - x)$ est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Est-elle asymptotiquement stable? (*attractivité, globalité de l'attractivité et stabilité* apparentes quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

4. Peut-on dire que pour l'équation $\dot{x} = -x + \varepsilon/x$ l'origine est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$? (pourtant...).

L'attractivité uniforme par rapport aux données initiales peut ne pas être globale. Le nombre réel R n'est plus arbitraire et nous avons la définition suivante :

Definition 2 *On dit que l'origine est pratiquement asymptotiquement stable (PAS) pour le système (3.3) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ s'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $t \geq T$ et tout x_0 tel que $\|x_0\| \leq R$, toute solution $x(t, x_0, \varepsilon)$ de (3.3) satisfait $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| \leq r$.*

¹L'attractivité uniforme de l'origine d'un système par rapport aux conditions initiales implique sa stabilité asymptotique. De plus, la stabilité asymptotique globale est équivalente à l'uniformité de l'attractivité pour toute condition initiale dans une boule arbitrairement grande centrée à l'origine.

Reconsidérons le problème perturbé (1.1). Les résultats du théorème de Tikhonov sur un intervalle de temps non majoré (voir les limites (1.7)) s'interprètent en terme de stabilité pratique comme suit :

Theorem 3 *Sous les hypothèses du théorème de Tikhonov pour les temps infinis, le point $(\xi(y_\infty), y_\infty)$ de la variété lente est PAS pour le système (1.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

De même, le théorème 2 induit le résultat de stabilité asymptotique pratique suivant :

Theorem 4 *Sous les hypothèses du théorème 2, le sous-ensemble (courbe fermée) $\Gamma_{y_\infty} \times \{y_\infty\}$ de Ω est PAS pour le système (1.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Exercices :

1. Dédurre des exemples 3 à 6 des résultats de stabilité pratique.
2. Montrer à l'aide de la théorie de Tikhonov que l'équation lente du système suivant, écrit en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x + r \cos \theta, \\ \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

admet un cycle limite stable Γ . Pouvez-vous établir que le sous-ensemble $\xi(\Gamma) \times \Gamma$ de \mathbb{R}^3 est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$ ($x = \xi(y_1, y_2)$ est la variété lente du problème). En examinant l'équation lente "exacte" (i.e. les deux dernières équations de (3.4) sans négliger ε), qu'en est-il vraiment pour l'objet Γ ?

Bibliographie

- [1] F. Diener, G. Reeb, *Analyse Non Standard*, Hermann, (1989).
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, (1996).
- [3] C. Lobry, T. Sari and S. Touhami, On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, *Electronic J. Differential Equat.* Vol. 1998, No. 19 (1998), 1-22.
- [4] C. Lobry et T. Sari, *The Peaking Phenomenon and Singular Perturbations : An Extension of Tikhonov's Theorem*, Rapport de recherche n° 4051 de l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (2000).
- [5] E. Nelson, Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1165-1198.
- [6] L. S. Pontryagin, L. V. Rodygin, Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives, *Soviet. Math. Dokl.*, **1** (1960), 237-240.
- [7] T. Sari and K. Yadi, On Pontryagin–Rodygin's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, *Electron. J. Diff. Eqns*, **19** (2004), 1-17. [<http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2004/139/abstr.html>]
- [8] T. Sari, *Contrôle Non Linéaire et Applications*, Cours du CIMPA, Collection Travaux en Cours **64**, Hermann éditeur (2005).
- [9] T. Sari, *Averaging in Ordinary Differential Equations and Functional Differential Equations*, in The Strength of Nonstandard Analysis, I. van den Berg, V. Neves (editors), Springer-Verlag, Wien (2007), 286-305.
- [10] A. R. Teel, L. Praly, Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback, *SIAM J. Contr. Optim.* **33** (1995), 1443-1485.
- [11] A. N. Tykhonov, Systems of differential equations containing small parameters multiplying the derivatives, *Mat. Sborn.*, **31** (1952), 575-586.
- [12] F. Verhulst, Periodic solutions and slow manifolds, *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Engrg* **17** (2007), 2533-2540.
- [13] K. Yadi, *Perturbations singulières : approximations, stabilité pratique et applications à des modèles de compétition*, Thèse de doctorat de l'Université de Haute-Alsace de Mulhouse, 2008. [<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00411503/fr/>]

- [14] K. Yadi, Singular perturbations on the infinite time interval, *Revue Arima* – Vol. 9 - 2008, 37-56. [[http ://www-direction.inria.fr/international/arima/009/00929.html](http://www-direction.inria.fr/international/arima/009/00929.html)]