Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1ère année MI, 2019–2020

ANALYSE2
Fiche de TD 2 : Intégrales et calcul des primitives

I) Intégrales indéfinies.

Exercice 1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes

$$1) \int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad 2) \int \frac{(\ln(x))^2}{x}dx, \quad 3) \int \cos(3x+2)dx,$$
$$4) \int (\sinh(x))^2 dx, \quad 5) \int \frac{dx}{x\ln(x^2)}, \quad 6) \int \frac{e^x}{e^{-x}+e^x}dx.$$

Exercice 2. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int \frac{\ln(x)}{x^n}dx, \quad n \neq 1, \quad 2) \int (x^2-x)\sin(x)dx, \quad 3) \int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx, \quad 4) \int e^x \cos(x)dx.$$

Exercice 3. En utilisant le changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int \frac{dx}{x^2+x+1}, \qquad 2) \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2x-x^2}}, \qquad 3) \int \sqrt{a^2+x^2}dx, \qquad 4) \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales des fractions rationnelles suivantes

$$1) \int \frac{x^2}{x^2-1}dx, \qquad 2) \int \frac{2dx}{x(x^2+1)}, \qquad 3) \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2}.$$

Exercice 5. Calculer les intégrales des fonctions trigonométriques

$$1) \int \cos^3(x)dx, \qquad 2) \int \cos^2 x \sin^3 x dx, \qquad 3) \int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx.$$

Exercice 6. En utilisant le changement de variable $u = \tan(x/2)$, calculer

$$1) \int \frac{dx}{\sin(x)}, \qquad 2) \int \frac{dx}{2+\cos(x)}, \qquad 3) \int \frac{dx}{1+\sin^2(x)}.$$

II) Intégrales définies.

Exercice 7. On note $E(x)$ la partie entière du nombre x. Pour $a > 0$, soit $n = E(a)$. En utilisant la subdivision

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ldots\ldots, \quad x_n = n, \quad x_{n+1} = a,$$

calculer l'intégrale de $\int_0^a E(x)dx$.

Exercice 8. En interprétant les suites suivantes commes des sommes de Riemann, calculer leurs limites

$$1)U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}, \qquad 2)U_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 9. Calculer les intégrales définies suivantes

$$1) \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad 2) \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx, \quad 3) \int_0^1 x^2 \arctan(x) dx,$$
$$4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^n(x)}, n \in \mathbb{N}^* \quad 5) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)} dx, \quad 6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}.$$

Exercice 10. I)Calculer

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

II) Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations $y = \cos(x)$ et $y = \sin(x)$ entre 0 et $\pi/4$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.
2) Montrer que la suite $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

4) En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}}, \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$