CHAPITRE 2 : Intégrales et calcul des primitives

I) Les intégrales indéfinies :

1.1) Les primitives :

Déf 1 : Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. On appelle primitive de la fonction f, toute fonction F définie de $[a,b]$ sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] \quad , \quad F'(x) = f(x).$$

Exp : pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = 3x^2$. Alors la primitive de f est la fonction $F(x) = x^3$.

Remarque : Il existe une infinité de primitives de $f(x)$ définies à une constante c près appelée constante d'intégration. Les primitives forment l'ensemble des fonctions $\{ x \longmapsto F(x) + c, \ c \in \mathbb{R} \}$.

Déf 2 : L'ensemble des primitives d'une fonction f sur $[a,b]$ s'appelle intégrale indéfinie de f, noté $\int f(x)\,dx$.

On a :
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exp :
$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que pour beaucoup de fonctions usuelles, on connait les primitives. Voici quelques exemples.

*) primitives des fonctions usuelles :

Fonction f	primitive $F = \int f$	DF : domaine de définition de F.
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \neq 0$	$F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sh} x$	$F(x) = \operatorname{ch} x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{ch} x$	$F(x) = \operatorname{sh} x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]-1,1[$
$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arccos x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]-1,1[$

proposition 1 : (propriétés fondamentales des intégrales indéfinies).

(1) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

(2) $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(3) Si $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, alors $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

④ $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

1.2) Quelques méthodes d'intégration :

1.2.1) Intégration par décomposition :

Soit la fonction $f(x)$ définie par la somme des fonctions $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ qui admettent pour primitives respectivement $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$. Alors

$$\int f(x)\,dx = \int \left(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\right) dx$$

$$= F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exp : ① $$\int \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \int x^{-1/2}\,dx - 2\int dx + \int x^{1/2}\,dx = 2x^{1/2} - 2x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

② $$\int \left(\sin x + \frac{3}{1+x^2}\right) dx = \int \sin x\,dx + 3\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\cos x + 3\arctg x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.2.2) Primitives quasi immédiates :

On a les formules suivantes :

- $$\int (f(x))^n f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R},\ n \neq -1$$

- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- $$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- $\int f'(x)\sin(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

- $\int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \sin(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Exp: ① $\int (x^3+7)^5 x^2\,dx.$

Si on pose $f(x) = x^3+7$, alors $f'(x) = 3x^2$.

Ainsi, $\frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+7)^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

② $\int \frac{3x}{5x^2-1}\,dx$: on pose $f(x) = 5x^2-1$, alors $f'(x) = 10x$.

Ainsi, $\int \frac{3x}{5x^2-1}\,dx = \frac{3}{10}\int \frac{10x\,dx}{5x^2-1} = \frac{3}{10}\ln|5x^2-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

1.2.3) Méthode d'intégration par parties :

Théorème : Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors :

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

Preuve : De la dérivée du produit, on a :

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)' = \int (u'v + uv')$$

$$\Rightarrow uv = \int u'v + \int uv'$$

Ainsi, $\int uv' = uv - \int u'v.$

Remarque : Dans la pratique, en général, un bon nombre d'intégrales peuvent être calculées par une intégration par parties.

- $\displaystyle\int f'(x)\sin(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \sin(f(x)) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

Exp: ① $\displaystyle\int (x^3+7)^5 x^2\,dx.$

Si on pose $f(x) = x^3+7$, alors $f'(x) = 3x^2$.

Ainsi, $\displaystyle\frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+7)^6}{6} + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

② $\displaystyle\int \frac{3x}{5x^2-1}\,dx$: on pose $f(x) = 5x^2-1$, alors $f'(x) = 10x$.

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{3x}{5x^2-1}\,dx = \frac{3}{10}\int \frac{10x\,dx}{5x^2-1} = \frac{3}{10}\ln|5x^2-1| + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

1.2.3) Méthode d'intégration par parties :

Théorème : Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

preuve : De la dérivée du produit, on a :

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)' = \int (u'v + uv')$$

$$\Rightarrow uv = \int u'v + \int uv'$$

Ainsi, $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v.$

Remarque : Dans la pratique, en général, un bon nombre d'intégrales peuvent être calculées par une intégration par parties.

par exemple, $\int f(x)\ln x\,dx$; $\int f(x)\arcsin x\,dx$, $\int f(x)\arccos x\,dx$; $\int f(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$ dans le cas où f admet une primitive.

• Si P est un polynôme, alors en posant $u(x)=P(x)$, on peut calculer par la même méthode $\int P(x)\cos(\alpha x)dx$, $\int P(x)\sin(\alpha x)\,dx$; $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exemples : ① $\int x\ln x\,dx = ?$

On pose $u=\ln x \Rightarrow u'=\frac{1}{x}$

$v'=x \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

Ainsi $\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$, $c\in\mathbb{R}$.

② $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = ?$

On pose $u=\mathrm{arctg}\,x \Rightarrow u'=\frac{1}{1+x^2}$

$v'=x \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

Ainsi, $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\left[\int x\,dx - \int\frac{dx}{x^2+1}\right]$

$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + c$, $c\in\mathbb{R}$.

1.2.4) Méthode d'intégration par changement de variables :

• **Théorème :** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J avec $\varphi(J) \subset I$. On a alors la formule de changement de variable

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

On pose $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$

Donc $dx = \cos t\,dt$.

D'où
$$\int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt = \int dt$$
$$= t + c$$
$$= \arcsin x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que

$x \in]-1,1[\Leftrightarrow t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$|\cos t| = \cos t$ si $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

• **Changement de variable $u = \psi(x)$:**

Dans le calcul de $F(x) = \int f(x)\,dx$ si $f(x)\,dx$ peut se mettre sous la forme $g(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx$, alors en posant $u = \psi(x)$, $du = \psi'(x)\,dx$, nous obtenons

$$F(x) = G(\psi(x)) + c \quad \text{où} \quad G(u) = \int g(u)\,du.$$

Exemples : ① $\int \sqrt{\sin x}\cos x \, dx$

On pose $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$. Ainsi,

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
$$= \frac{2}{3}\sin x^{3/2} + C.$$

② $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

on pose $u = \frac{x}{a}$
$\Rightarrow x = au$
$\Rightarrow dx = a\,du$

Ainsi, $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

1.2.5) Intégration des fractions rationnelles :

Défn : Une fraction rationnelle est une fonction f, quotient de deux fonctions polynômes

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont des coefficients réels. m = degré de P et n = degré de Q, $m, n \in \mathbb{N}$

Remarque : Si $m \geq n$, alors la fraction rationnelle peut s'écrire comme la somme d'un polynôme et une fraction rationnelle.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$ où le degré de R est inférieur au degré de Q.

Exemple : $$\frac{x^2+2x+3}{x-1} = x+3+\frac{6}{x-1}.$$

La fraction $\frac{R(x)}{Q(x)}$ est formée de termes appelé éléments simples de la forme

- $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, $A, x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$
  appelé élément simple de première espèce.
- $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}$, $B, C, p, q \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}^*$
  tel que $p^2-4q<0$
  appelé élément simple de $2^{ème}$ espèce.

- Intégration des éléments simples de première espèce :

pour les intégrales de la forme $\int \frac{A}{(x-x_0)^k} dx$, on a deux cas

- $k=1$, $\int \frac{A}{(x-x_0)} dx = A \ln|x-x_0| + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- $k>1$, $\int \frac{A}{(x-x_0)^k} dx = A\int (x-x_0)^{-k} dx = A\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exp : $$\int \frac{2\,dx}{(x-1)^3} = 2\int (x-1)^{-3} dx = 2\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
$$= \frac{-1}{(x-1)^2} + C.$$

• Intégration des éléments simples de deuxième espèce :

Pour les intégrales de la forme

$$I = \int \frac{(Bx+C)}{(x^2+px+q)^k}\,dx .$$

Remarquons que $p^2-4q<0 \Leftrightarrow q-\frac{p^2}{4}>0$.

En posant, $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, alors

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$$

En posant $\frac{p}{2}=\lambda$, on a :

$$\int \frac{(Bx+C)}{((x+\lambda)^2+a^2)^k}\,dx = \frac{1}{a^{2k}}\int \frac{Bx+C}{\left(\left(\frac{x+\lambda}{a}\right)^2+1\right)^k}\,dx .$$

On pose $t=\frac{x+\lambda}{a} \Rightarrow dx = a\,dt$.

Ainsi,

$$I = \frac{a}{a^{2k}}\int \frac{B(at-\lambda)+C}{(1+t^2)^k}\,dt$$

$$= \frac{(-B\lambda+C)}{a^{2k-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^k} + \frac{B}{a^{2k-2}}\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^k}.$$

Ainsi, on a deux intégrales à calculer.

• $\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^k}$. En faisant le changement de variable $u=1+t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt$

Donc $$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|u|+c = \frac{1}{2}\ln|1+t^2|+c, \quad c\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{(1-k)u^{k-1}}+c = \frac{1}{2(1-k)(1+t^2)^{k-1}}+c \end{cases}$$

• $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^k}$.

Si $k=1$, alors $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Si $k>1$, alors on pose $I_k = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^k}$ et on fait une intégration par parties.

On pose $u = \dfrac{1}{(1+t^2)^k} \Rightarrow u' = \dfrac{-2kt}{(1+t^2)^{k+1}}$

$v' = 1 \Rightarrow v = t$.

Alors
$$I_k = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{k+1}}\, dt$$
$$= \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k \int \frac{dt}{(1+t^2)^k} - 2k \int \frac{dt}{(1+t^2)^{k+1}}$$

Ainsi,
$$I_k = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k\, I_k - 2k\, I_{k+1}$$
$$\Rightarrow 2k\, I_{k+1} = \frac{t}{(1+t^2)^k} + (2k-1)\, I_k, \quad k \geq 1.$$

Il suffit de connaître I_1 et de calculer I_k par récurrence.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^3}\, dx$.

La fraction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{x^4}{1+x^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

par une division Euclidienne, on a :

$$\frac{x^4}{1+x^3} = x - \frac{x}{(1+x)(x^2-x+1)}$$

$$= x + \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{(x^2+x+a)(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{1+x^3}$$

$$= \frac{x^4+x^2(a+b)+x(-a+b+c+1)+a+c}{1+x^3}.$$

par identification, on a :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ -a+b+c+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=-1/3 \\ c=-1/3 \end{cases}$$

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^3}\,dx = \int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + 2\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$.

Ainsi,

$$2\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,du}{1+u^2} = \sqrt{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \sqrt{3}\,\operatorname{arctg} u + c$$

$$= \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

1.2.6) Intégration des fonctions trigonométriques :

- primitives des fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$;

Soit $I = \int f(\sin x, \cos x)\,dx$ où f est une fonction rationnelle.

En effectuant le changement de variable $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment sous forme des fonctions rationnelles.

$$\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \frac{2\,tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2u}{1+u^2}$$

et

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Exemples : $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = ?$ on pose $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} u$

$\Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} u$

$\Rightarrow dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$.

Ainsi,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2}$$

$$= 2\int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{1+u} + \int \frac{du}{1-u}$$

$$= \ln|1+u| - \ln|1-u| + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= \ln\left|1+tg\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|1-tg\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + c.$$

- **primitives des fonctions polynômes en $\sin x$ et $\cos x$:**

Soit $I = \displaystyle\int \cos^p x \sin^q x \, dx$.

① si p est impair $(p = 2n+1)$, alors

$$\int \cos^p x \sin^q x\,dx = \int \cos^{2n+1} x \sin^q x\,dx = \int (\cos^2 x)^n \sin^q x \cos x\,dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^n \sin^q x \cos x\,dx$$

On pose $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$. Ainsi,

$\displaystyle\int \cos^p x \sin^q x\,dx = \int (1-u^2)^n u^q\,du$ et ceci est un polynôme.

Exp : $\displaystyle\int \cos^5 x \sin^2 x\,dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x\,dx$

on pose $u = \sin x$, ainsi

$$\int \cos^5 x \sin^2 x\,dx = \int (1-u^2)^2 u^2\,du = \int (1+u^4-2u^2)u^2\,du$$

$$= \int (u^2+u^6-2u^4)\,du$$

Donc,

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx = \frac{u^3}{3} + \frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^7 x}{7} - 2\frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

(2) Si q est impair, alors on pose le changement de variable $u = \cos x$.

(3) Si p et q sont impairs, alors on pose soit $u = \cos x$ ou $u = \sin x$.

(4) Si p et q sont pairs, alors on linéarise et on intègre

- Intégrales de la forme $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$:

On utilise les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\right]$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right]$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[-\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\right].$$

Exp : $\int \sin(3x)\sin(2x)\,dx = ?$

On sait que $\sin(3x)\sin(2x) = \frac{1}{2}\left[-\cos(5x) + \cos x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos(5x)\right).$$

Ainsi,

$$\int \sin(3x)\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin(5x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) Les intégrales définies :

2.1) Intégrale d'une fonction en escalier :

Déf 1 : On appelle " subdivision " de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, un ensemble fini de points $x_0, x_1, \dots, x_n$ tel que

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b.$$

On remarque que $x_i - x_{i-1} > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

On appelle pas de la subdivision, le réel

$$\underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{Max}} (x_i - x_{i-1}).$$

Exp : $S_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $S_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ sont des subdivisions de $[0,1]$.

Déf 2 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, \dots, n$

c à d $f(x) = C_i$, pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$.

Exp :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ 3 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une fonction en escalier sur $[0,1]$.

Déf 3 : On appelle intégrale d'une fonction f en escalier sur $[a,b]$, le nombre

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$
$$= c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1}).$$

On note ce nombre par $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque. Le nombre $I(f)$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

Exp. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ 3 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Alors :

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Proposition 1. Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

(2) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(3) $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

(4) $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

(5) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$

(6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in [a,b]$.

Cette dernière est dite relation de Chasles.

(7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2.2) Intégration d'une fonction bornée :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et on définit une subdivision $\{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ avec $h = \frac{b-a}{n}$ le pas. càd

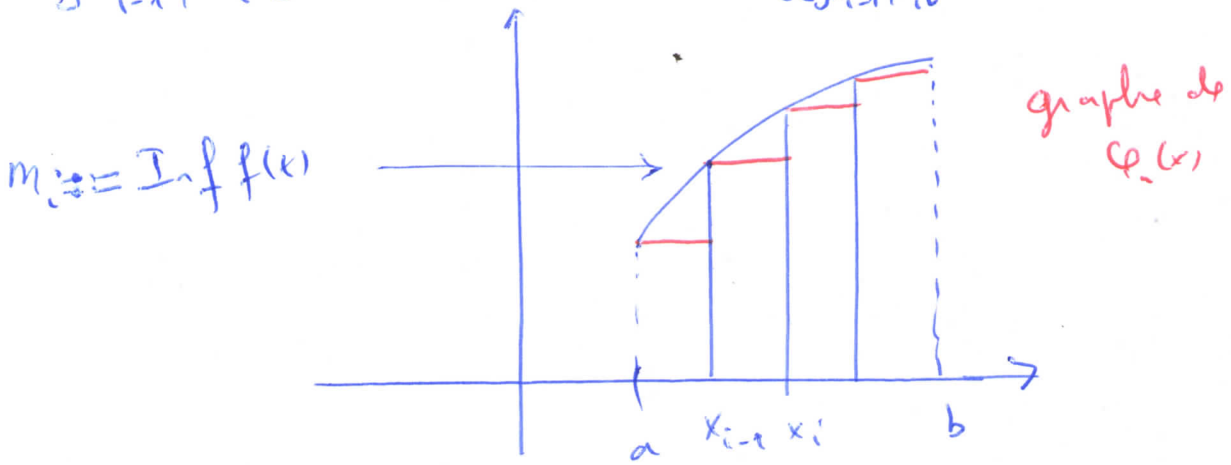
$$x_0 = a \,, \quad x_i = x_{i-1} + h \,, \quad \dots \quad i = 1, 2, \dots n.$$

$$x_n = a + nh \,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On considère les fonctions en escalier suivantes

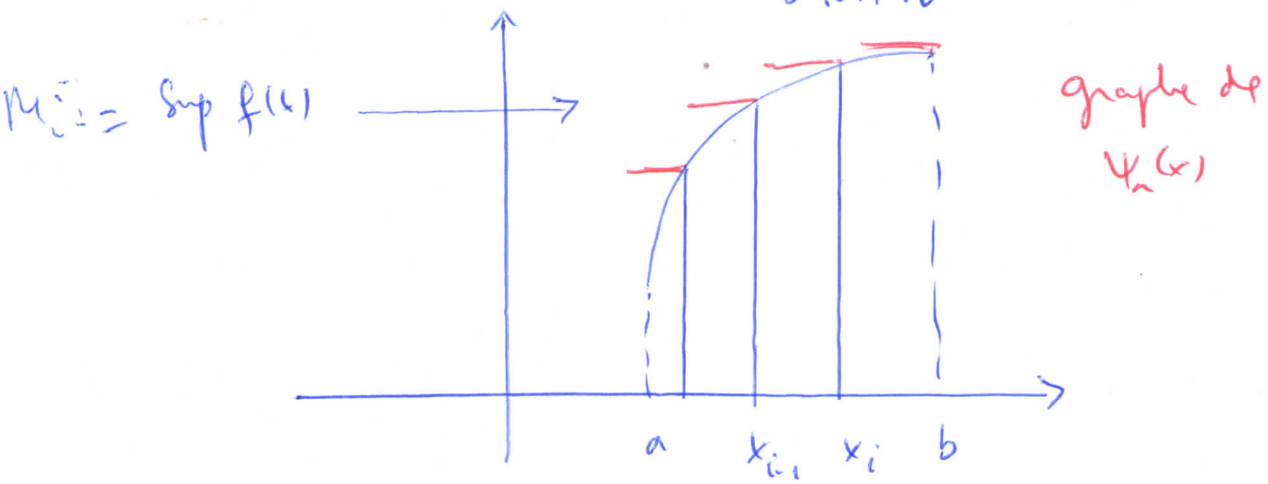
$\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour

$$x \in]x_{i-1}, x_i[\,, \quad \varphi_n(x) = \underset{t \in]x_{i-1}, x_i[}{\operatorname{Inf}} f(t)$$



et $\psi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour

$$x \in]x_{i-1}, x_i[\,, \quad \psi_n(x) = \underset{t \in]x_{i-1}, x_i[}{\operatorname{Sup}} f(t)$$



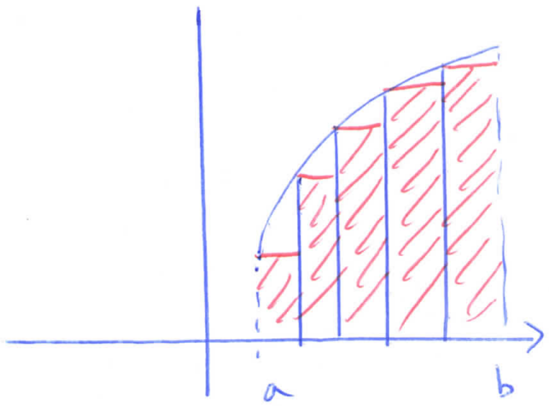
Défin (Somme de Darboux)

- On appelle somme de Darboux inférieure I_n, l'intégrale de la fonction en escalier φ_n càd :

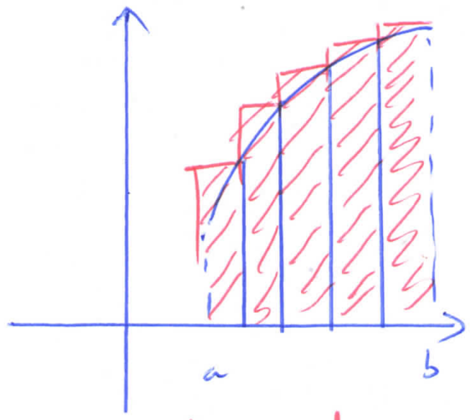
$$I_n = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{t \in]x_{i-1}, x_i[} f(t).$$

- On appelle somme de Darboux supérieure J_n, l'intégrale de la fonction en escalier ψ_n càd

$$J_n = \int_a^b \psi_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{t \in]x_{i-1}, x_i[} f(t)$$



I_n : somme de Darboux inférieure



J_n : somme de Darboux supérieure.

Théorème :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors les suites (I_n) et (J_n) de terme général $I_n = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ et $J_n = \int_a^b \psi_n(x)\,dx$ sont convergentes et convergent vers la même limite lorsque n tend vers $+\infty$ et on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} J_n$$

Preuve : Prenons une fonction f croissante sur $[a,b]$, alors la fonction est bornée car

$\forall x \in [a,b]$, on a : $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Remarquons que la suite (I_n) est croissante et majorée par $\int_a^b f(x)dx$ et la suite (J_n) est décroissante et minorée par $\int_a^b f(x)dx$.

D'autre part, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (J_n - I_n) = 0$ car

$$\lim_{n\to+\infty}(J_n - I_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(M_i - m_i)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} h \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) = 0$$

Ainsi, (I_n) et (J_n) sont adjacentes et

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n$$

Remarque : On peut généraliser le résultat précédent pour les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et les fonctions monotones.

2.3) Sommes de Rieamann :

Déf 1 : On appelle somme de Rieamann d'une fonction f définie sur $[a,b]$, le réel

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right)$$

Donc
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i)$$
$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Remarque: Si $[a,b] = [0,1]$, alors $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

Déf 2: On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n$ càd, la somme de Darboux inférieure, supérieure est égale à la somme de Darboux inférieure.

Dans ce cas, le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ est dit intégrale de Riemann

Remarque: Si f est intégrable au sens de Riemann, alors on a:
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Exemples: (1) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f est bornée mais elle n'est pas intégrable car pour toute subdivision de $[a,b]$, on a
$$I_n = 0 \quad \text{et} \quad J_n = 1$$
En plus, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} J_n = 1$

(2) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) = x.$$

Soit la subdivision suivante
$$\{ x_i = \frac{i}{n} , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n\} \text{ càd: }$$
$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} , \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$
Alors
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)| = \frac{i-1}{n}$$
et
$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)| = \frac{i}{n}.$$
Ainsi,
$$I_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2n^2}.$$
$$J_n = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$
On remarque que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \frac{1}{2}$ et
$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$
Maintenant, en utilisant la somme de Rieamann, Calculons $\int_0^1 x \, dx$.

On fait une subdivision de $[0, 1]$ avec $h = \frac{1}{n}$. Alors
$$S_n = h(f(x_1) + \dots + f(x_n)) \quad \text{avec } f(x) = x.$$
On sait que $x_i = a + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$ et $a = 0$.

Donc, $S_n = \frac{1}{n}(h + 2h + \dots + nh)$
$$= \frac{1}{n} (h(1 + 2 + \dots + n)) = \frac{h}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$

2.4) Calcul de l'intégrale définie :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $x \in [a,b]$.

posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Théorème 1 : La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$ càd

F est une primitive de f.

Le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est dit intégrale définie sur f et on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque : En général, les fonctions intégrables n'admettent pas forcément des primitives. Les fonctions en escalier sont intégrables au sens de Riemann et n'admettent pas forcément de primitives.

Exemples : (1) $\displaystyle\int_3^1 x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_3^1 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -20$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx = ?$ par une intégration par parties,

on a : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$= \frac{-\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

(3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$ On pose $x = \cos u$

$\Rightarrow dx = -\sin u\,du$

Remarquons que l'application $u \mapsto \cos u$ est C^1 et c'est une bijection de $[0,\pi/2]$ dans $[0,1]$.

Ainsi, $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arccos 0}^{\arccos 1} \left(\sqrt{1-\cos^2 u}\right)(-\sin u)\,du$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} -\sin^2 u\,du = \int_0^{\pi/2}\sin^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2u)\,du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Théorème: (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors on a :

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Preuve: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\big(|f(x)| + \lambda|g(x)|\big)^2 \geq 0$, alors le polynôme de degré 2 en λ

$$\lambda^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx + 2\lambda \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\, dx + \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

est positif si et seulement si

$$\Delta = 4\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right) < 0.$$

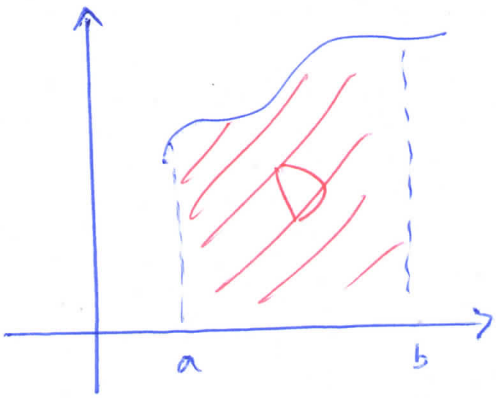
• **Interprétation géométrique de l'intégrale :**

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et Γ_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine D délimité par Γ_f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

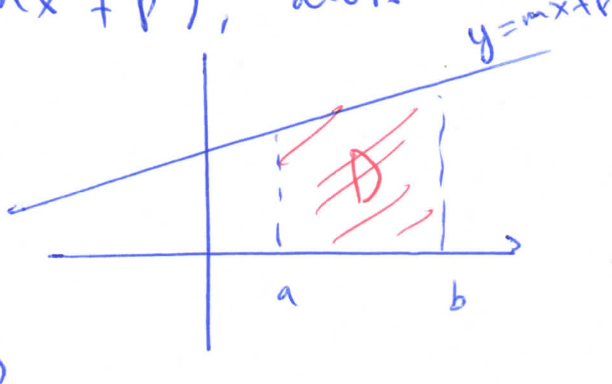
$\int_a^b f(x)dx =$ aire du domaine D.



2.5) Calculs d'aires :

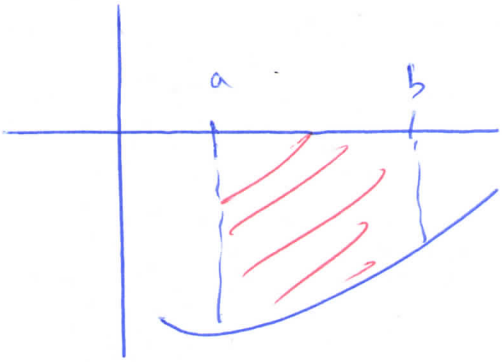
Suivant les valeurs de $f(x)$ sur $[a,b]$, nous avons les cas suivants :

(1) Si f est affine ($f(x) = mx + p$), alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du trapèze D.



② Si f est une fonction négative sur $[a,b]$, alors

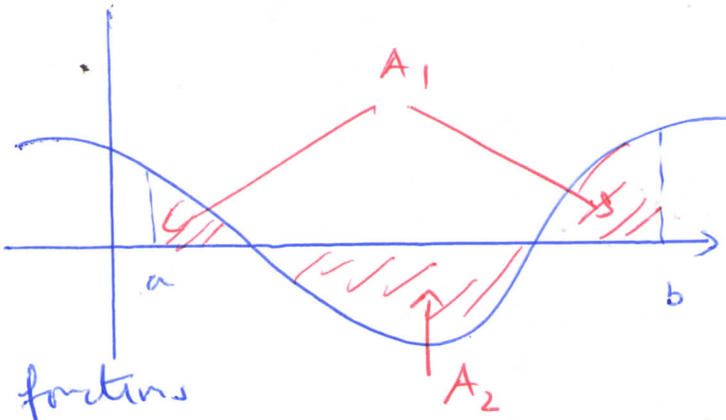
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



③ Si f est une fonction de signe quelconque sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

où A_1 est l'aire de la partie de la région délimitée par la courbe Γ_f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ située au dessus et A_2 la région au dessous de l'axe des abscisses.

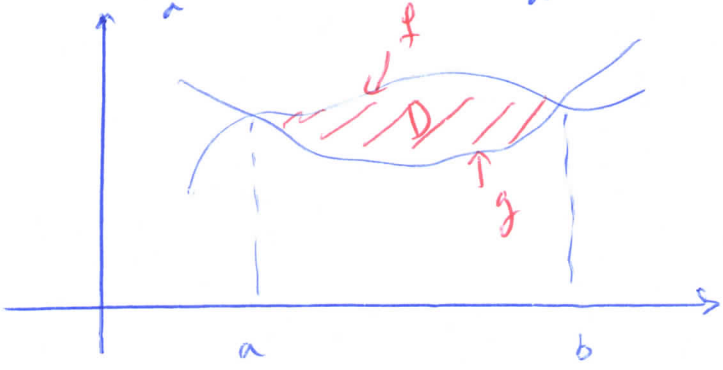


④ Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que $0 \leq g \leq f$ sur $[a,b]$.

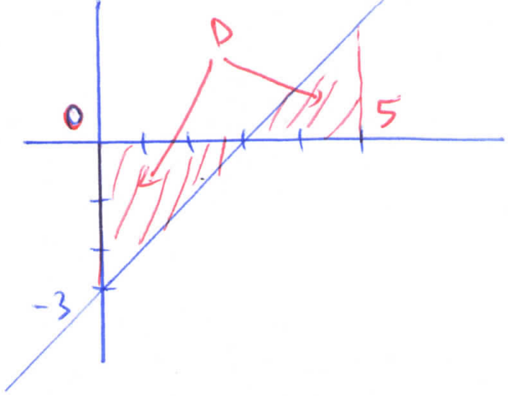
Alors, l'aire du domaine D définie par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; a \leq x \leq b \;,\; g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

est donné par $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$



Exemples : (1) $\int_0^5 |x-3|\, dx = ?$



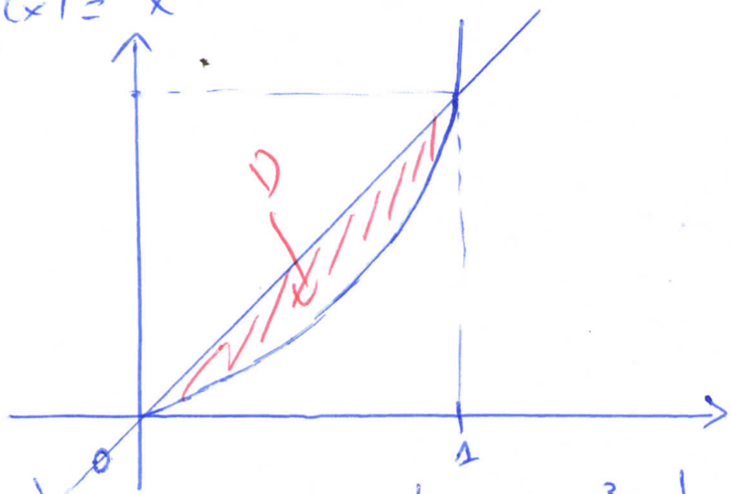
$$\int_0^3 (x-3)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2} - 9 = -\frac{18}{2}$$

$$\int_3^5 (x-3)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5 = \frac{13}{2}.$$ Ainsi,

$$\text{Aire}(D) = \frac{18}{2} + \frac{13}{2} = \frac{31}{2}.$$

(2) Soient f et g deux fonctions définies sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$

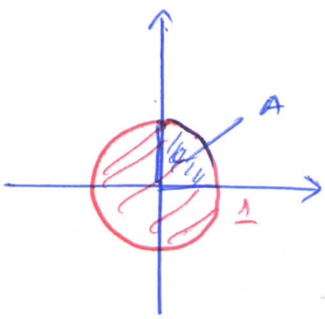


$$\text{Aire}(D) = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(3) Calculer l'aire d'un disque D de centre O et de rayon 1.

On sait que $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$



$$\text{Aire}(A) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Aire}(D) = 4\, \text{Aire}(A) = 4\frac{\pi}{4} = \pi.$$