Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Introduction

- Nous avons vu les méthodes appelées méthodes directes car elles fournissent des solutions exactes.
- Cependant, ces calculs peuvent être lourds pour de très grandes matrices.
- Une alternative consiste à faire converger des suites vers la solution.
- Nous perdrons alors l’exactitude de la solution, mais nous gagnerons en rapidité d’exécution dans l’approximation de la solution (suivant le degré de précision voulu).

Principe des méthodes itératives

Nous décomposons A inversible sous la forme $A = M - N$. Nous avons alors

$$Ax = b \text{ équivalent à } Mx = Nx + b.$$

Sous cette forme, nous cherchons à approcher la solution du problème par la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in K^n & \text{donné,} \\ Mx_{k+1} & = Nx_k + b, \quad \text{pour tout entier } k \geq 0. \end{cases}$$

A chaque itération, nous devons résoudre un système linéaire de matrice M pour calculer x_{k+1} en fonction de x_k.

La méthode est 'intéressante" quand M est "facile" à inverser (ou plutôt le système facile à résoudre).

Montrons que cette méthode, si elle converge, approche bien la solution de $Ax = b$.

Soit $x \in \mathbb{K}^n$ solution de $Ax = b$.

Supposons que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $x_0 \in \mathbb{K}^n$ nous avons

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k - x_0\| = 0$$

pour une norme quelconque.

Comme M et N sont linéaires, elles sont continues (nous sommes en dimension finie), donc à la limite $k \to +\infty$ dans $Mx_{k+1} = Nx_k + b$. Nous obtenons

$$Mx_\infty = Nx_\infty + b, \text{ soit encore } Ax_\infty = b.$$

Et comme A est inversible, par unicité de la solution nous avons $x_\infty = x$
-Étude de la convergence :
Notons $e_k = x_k - x$, l'erreur commise au rang k. La méthode converge si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} e_k = 0$ ou encore $\lim\limits_{k\to+\infty} \|e_k\| = 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x.$$

Nous choisirons M inversible dans cette décomposition. De telle sorte que

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b,$$

équivalent à

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b.$$

De même

$$Ax = b = Mx - Nx,$$

qui est équivalent à

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

Nous pouvons en déduire que

$$e_{k+1} = M^{-1}Ne_k.$$

Par une récurrence immédiate nous obtenons

$$e_k = (M^{-1}N)^k e_0.$$

Nous démontrerons dans les sections suivantes les résultats permettant d'énoncer le théorème de convergence.

Théorème 11 (CONVERGENCE DE LA MÉTHODE ITÉRATIVE)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. La méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$, avec M inversible, converge si et seulement si le rayon spectral $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Tout le problème consiste dès lors à bien choisir la décomposition $M - N$. Les trois décompositions proposées ci-dessous sont les trois méthodes les plus connues.

Trois méthodes classiques

Nous écrivons

$$A = D - E - F,$$

de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

où $D = \mathrm{diag}(a_{11}, ..., a_{nn})$, et E et F sont des matrices triangulaires définies par

$$-(E)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad -(F)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Nous supposerons que A ne possède pas de zéros sur sa diagonale.

Méthode de Jacobi

Dans cette méthode, nous prenons

$$M = D, \text{ et } \quad N = E + F,$$

l'avantage de cette méthode est que dans ce cas là, M est très facile à inverser. La méthode de Jacobi s'exprime alors par la suite

$$\begin{cases} x_0 \in K^n & \text{donné,} \\ Dx_{k+1} & = (E + F)x_k + b, \quad \text{pour tout entier } k \geq 0. \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Seidel

Dans cette méthode, nous prenons

$$M = D - E, \text{ et } \quad N = F.$$

La méthode de Gauss-Seidel s'exprime alors par la suite

$$\begin{cases} x_0 \in K^n & \text{donné,} \\ (D-E)x_{k+1} & = Fx_k + b, \quad \text{pour tout entier } k \geq 0. \end{cases}$$

Méthode de relaxation

C'est une méthode intermédiaire entre les deux méthodes précédentes. Nous mettons un peu de diagonale de chaque côté en posant Dans cette méthode, nous prenons

$$M = \frac{1}{\omega}D - E, \text{ et } N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F,$$

où $\omega \neq 0$ est un paramètre de relaxation. La méthode de relaxation s'exprime alors par la suite

$$\begin{cases} x_0 \in K^n & \text{donné}, \\ (\frac{1}{\omega}D - E)x_{k+1} & = (\frac{1-\omega}{\omega}D + F)x_k + b, \quad \text{pour tout entier } k \geq 0. \end{cases}$$

Critère général de convergence

Théorème . CONVERGENCE ET MATRICE SYMÉTRIQUE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, définie, positive. Nous la décomposons sous la forme $A = M - N$, où M est inversible. Alors

1. $M^T + N$ est symétrique,
2. si de plus $M^T + N$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

1. Si A est symétrique, si A et $2D - A$ sont définies positives alors la méthode de Jacobi converge.

2. Si A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

3. Si A est symétrique définie positive, et si $0 < \omega < 2$, alors la méthode de relaxation converge.

Exercice d'application 1

1. Calculer dans chacun des cas suivants le rayon spectral de la matrice de la méthode de Jacobi et de la matrice de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Que peut-on déduire ?

2. Montrer que si la matrice A est à diagonale dominante stricte :

$$\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

   alors la méthode itérative de Jacobi pour la résolution de $Ax = b$ est convergente (on pourra montrer que $\|J\|_\infty < 1$).

3. Etudier la convergence de la méthode de relaxation (pour la résolution du système $Ax = b$) lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Faire une recherche concernant le rayon spectral

Exercice d'application 2

On considère le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer A sous la forme LU et en déduire que (3) admet une solution unique x^*.
2. Ecrire l'itération de Gauss–Seidel pour ce système, c'est–à–dire, le système linéaire donnant $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en fonction de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leqslant a\|e_n\|_\infty.$$

En déduire la convergence de la suite.

4. Déterminer la matrice de Gauss–Seidel $\mathscr{L}_1$ associée à A. Calculer $\|\mathscr{L}_1\|_\infty$. En déduire la convergence de (X_n) vers x^*.

5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\begin{array}{lcll} |a_{ij}| & \geqslant & \sum_{j\neq i}|a_{ij}| & i = 2,\cdots,n \\ |a_{11}| & > & \sum_{j\neq 1}|a_{1j}| & \end{array}$$

et sur chaque ligne de A il existe il existe un terme non nul a_{ij} pour $i \geqslant 2$ et $j < i$.

Montrer qu'alors la méthode de Gauss–Seidel converge.