Enseignant : Bentalha Chakib

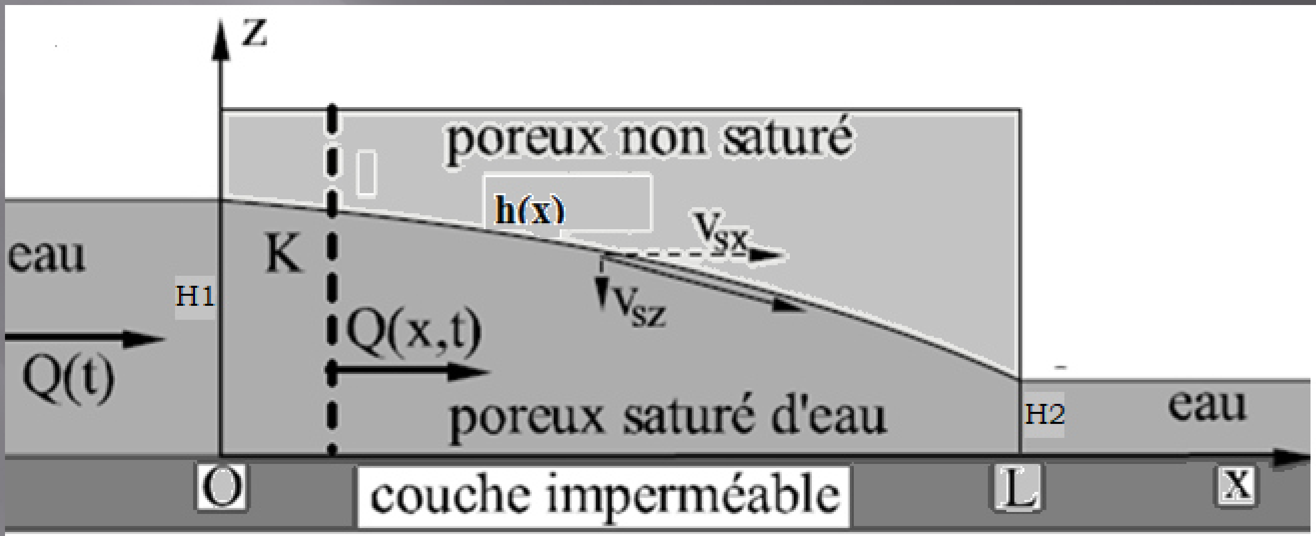
TP 6: Ecoulement dans les milieux poreux:

On considère un terrain rectangulaire homogène et isotrope de longueur L= 1000 m et de perméabilité K= 1m/j, limité à la base par un substratum imperméable horizontale, à l'amont par un plan d'eau de hauteur H1=10 m et à l'aval par un plan d'eau de hauteur H2 =5 m. On suppose que l'écoulement est 1D et obéit l'équation de Boussinesq :

$$K\frac{d^2h^2}{dx^2} + N = 0 \quad (1)$$

le débit d'infiltration

N = 0,0001 m/j



Faire un programme Matlab qui résout cette équation et trace la courbe h(x)

La loi du Darcy

En 1856 Henri Darcy a trouvé expérimentalement que le débit d'eau s'écoulant à travers un massif du sable peut se calculer:

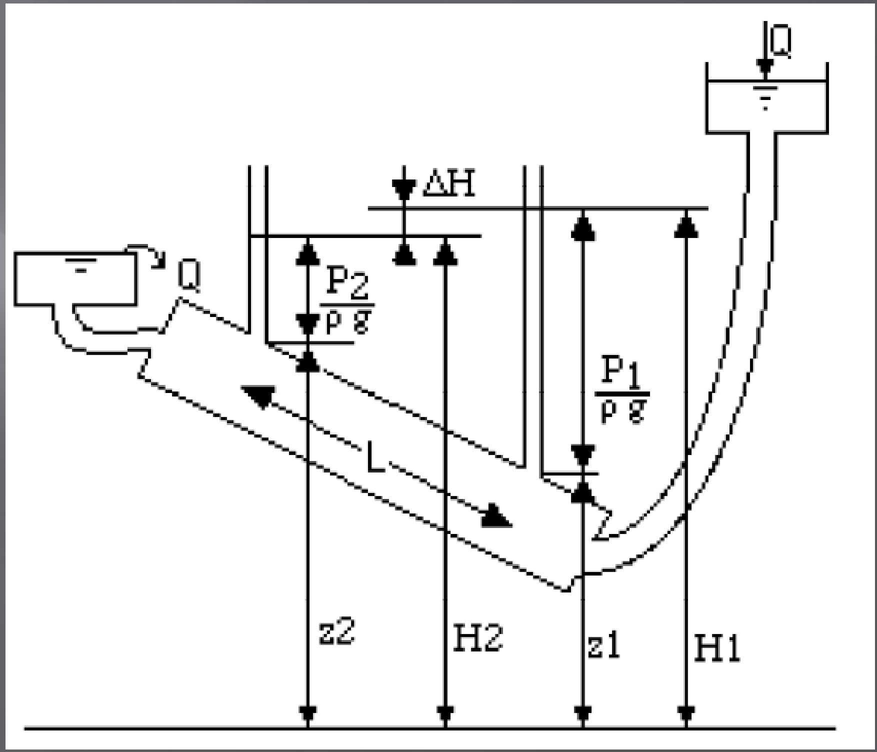
$$Q = K \cdot S \cdot \frac{\Delta H}{L}$$

Perte de charge

La longueur du massif

Perméabilité

Section du massif sableux



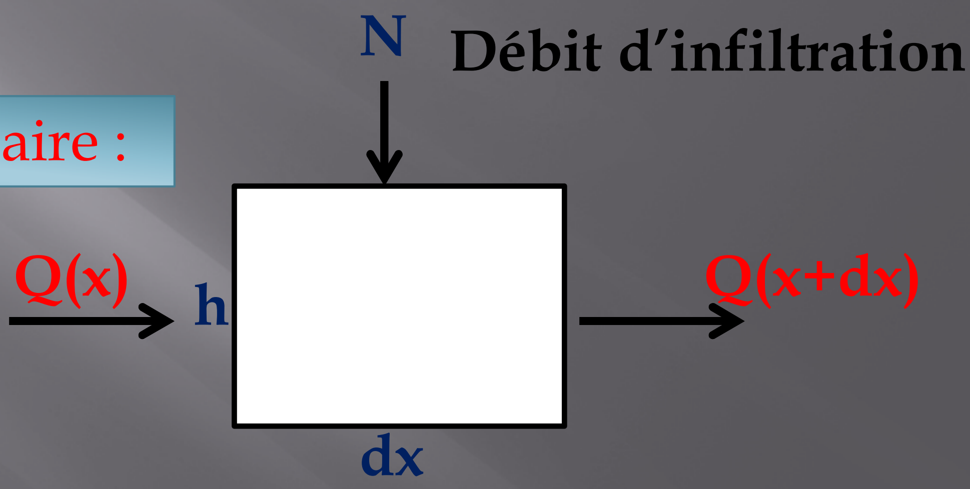
Equation de Boussinesq – hypothèse du Dupuit

Le principe de la conservation de la masse énonce que le débit entrant dans un milieu poreux homogène égale celui qui sorte:

$$\boxed{Q(x) = Q(x + dx) \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = 0}$$

Ainsi, lé débit par mètre linéaire :

$$\boxed{Q = K(h \times 1)\frac{dh}{dx}}$$



Alors:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(K\,h\frac{dh}{dx}\right) = 0 \Rightarrow K\frac{d^2h^2}{dx^2} = 0}$$

Si N le débit d'infiltration cette équation vaut:

$$\boxed{K\frac{d^2h^2}{dx^2} + N = 0 \qquad (1)}$$

Cette équation est valable si l'écoulement est horizontale (hypothèse du Dupuit)

Méthode de résolution:

Posons:

$$\boldsymbol{V = h^2}$$

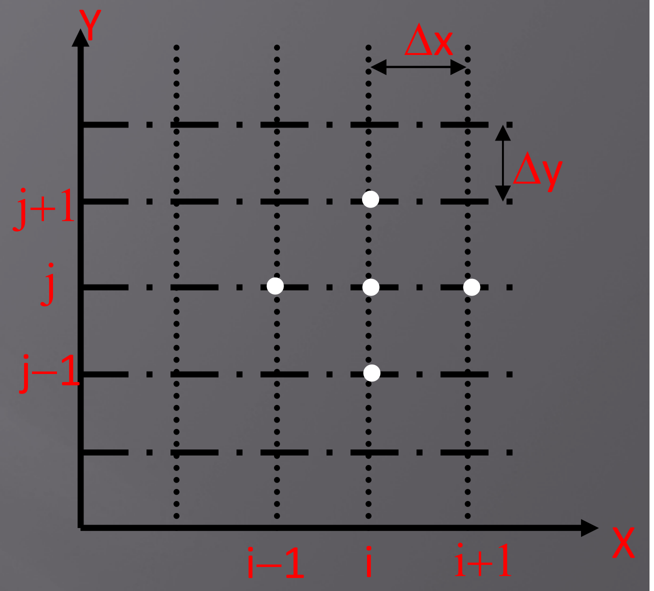
L'équation 1 devient:

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + N = 0 \quad (2)$$

La méthode de différence finies permet de résoudre l'équation 2

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation d'une fonction par son développement de Taylor autour d'un point. Elle permet de remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations algébriques linéaires à résoudre numériquement.

Considérons le point de maillage (i, j) qui est entouré par d'autres nœuds comme indiqué sur la figure ci-contre. En appliquant le développement en série de Taylor autour de ce point, on obtient les expressions suivantes:



$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \Delta x . f_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_{xxx} + \ldots\ldots$$

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x f_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_{xxx} + \ldots\ldots$$

Dans lesquelles : $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Toutes les dérivées sont évaluées au nœud (i, j). Par addition ou soustraction de ces deux dernières équations, on peut obtenir les expressions en différences finies ci-dessous, ainsi que les ordres de troncature qui leurs correspondent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

différence directe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

différence inverse

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right)$$

différence centrale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

différence centrale

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + N = 0 \qquad (2)$$

$$K\frac{V(i+1) - 2V(i) + V(i-1)}{\Delta x^2} + N = 0$$

$$V(i-1) - 2V(i) + V(i+1) = -\Delta x^2 \frac{N}{K} \qquad (3)$$

Equation 3 est une forme générale d'un système matriciel:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V(1) \\ V(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V(n-1) \\ V(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta x^2 \frac{N}{K} \\ -\Delta x^2 \frac{N}{K} \\ \vdots \\ -\Delta x^2 \frac{N}{K} \\ -\Delta x^2 \frac{N}{K} \end{bmatrix}$$

Jacobi où Gauss seidel

$$V(i) = 0,5\left(V(i+1) + V(i-1) + \Delta x^2 \frac{N}{K}\right) \qquad (4)$$

Solution analytique:

L'intégration de l'équation 2 donne la solution analytique:

$$h_{ana} = \sqrt{\frac{-N\,x(x-L)}{K} + \frac{H_2^2 - H_1^2}{L}x + H_1^2}$$

Rappel:

Soit un vecteur X=[x1,x2,x3,………,Xn], la norme spectrale

du vecteur est définie comme suit:

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Algorithme:

1- Entrer les valeurs: N, K, H1,H2,L,dx

2- Evaluer les valeurs du vecteur x entre [0, L] avec le pas dx

3- Déterminer la longueur du vecteur x (N)

4-Entrer la valeur de H(1),H(N),V(1),V(N),Vold(1),Vold(N),X(1),X(N)

Pour i=2→ N-1
Vold(i)=H1*H1
fin pour

Initialisation le vecteur de solution

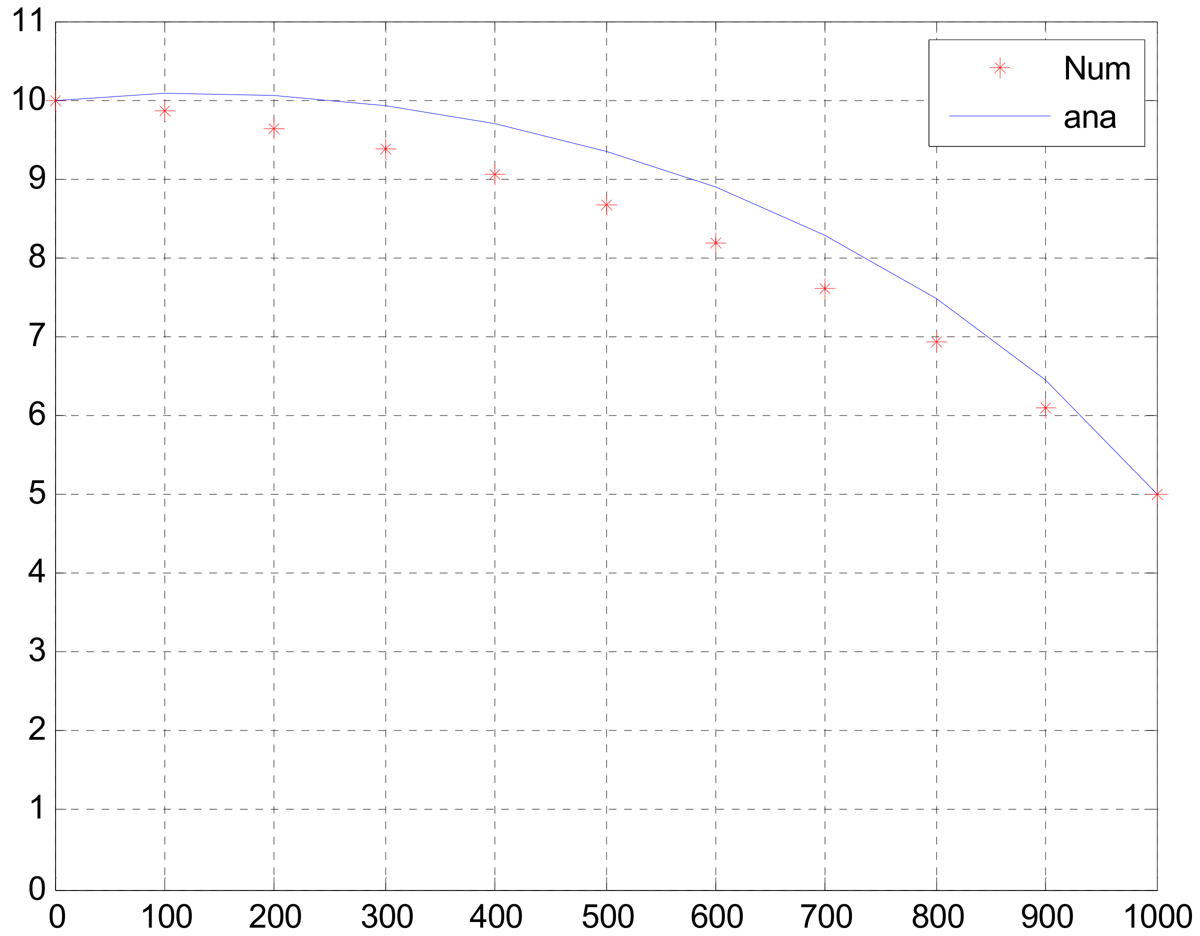
err(1)=1;   Initialisation la valeur de l'erreur
k=1;   Initialisation l'étape du calcul

Tant que err(k)> 0.00001
calculer V(i)=f(Vold) pour i=2 jusqu'à M-1
err(k+1)=norm(V-Vold);Vold=V;k=k+1
Fin tant que

H=sqrt(V);

Calculer hana

Tracer H et hana en fonction de x

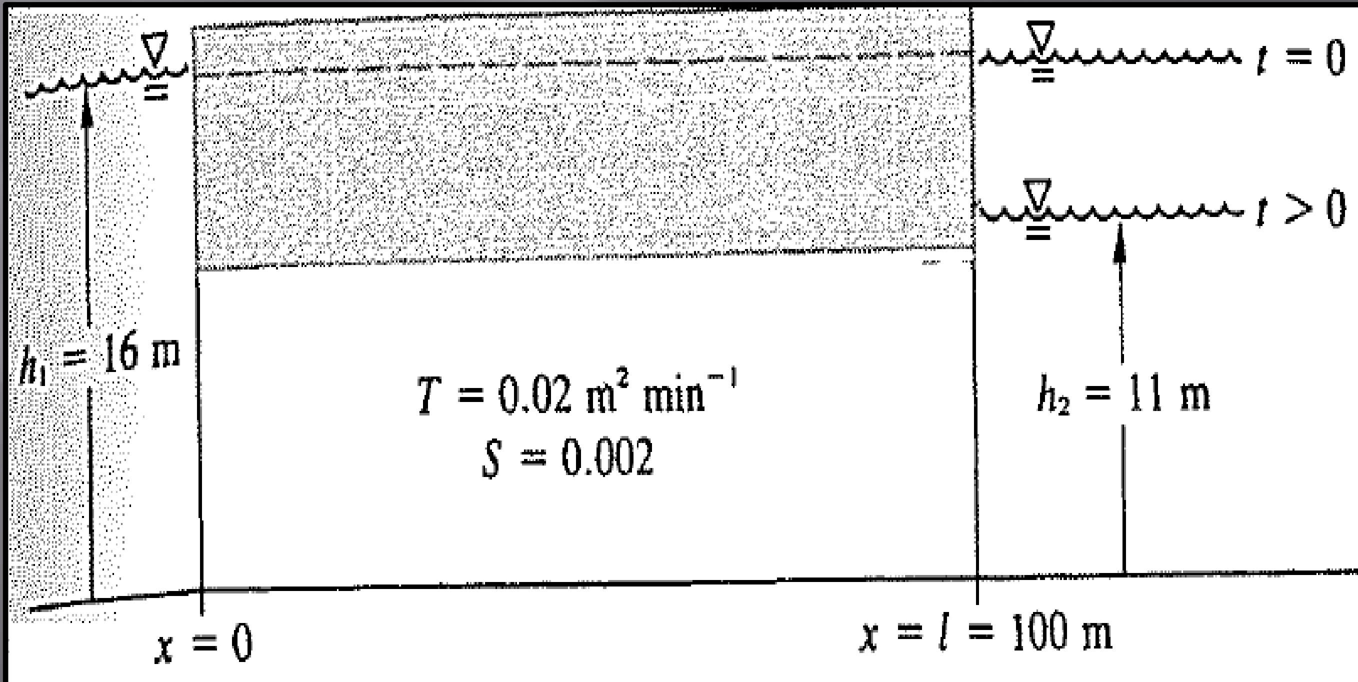


Position de la surface libre de la nappe

TP 7: Ecoulement transitoires dans les milieux poreux:

Considérons l'aquifère confiné dans la figure ci-dessous. Initialement, la charge est égale à 16 m Partout dans l'aquifère. Si à t = 0, on laisse tomber brusquement le niveau d'eau dans le réservoir à x = L à partir de 16 m à 11 m. On vous demande de simuler le changement de la charge au cours du temps (au cours de 10 min, 100 min et 400 min). La transmissivité de l'aquifère est $T=0{,}02\ m^2/min$ et le coefficient d'emmagasinement est S=0,002. Si on néglige l'écoulement dans la direction y, l'équation gouvernant l'écoulement peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$



Méthode de résolution par différence finies:

h au T(n+1)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^{n+1}(i) - h^{n}(i)}{\Delta t}$$

h au T(n)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h^{n}(i+1) - 2h^{n}(i) + h^{n}(i-1)}{\Delta x^2}$$

Alors,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\frac{h^{n+1}(i) - h^{n}(i)}{\Delta t} = \frac{T}{S}\frac{h^{n}(i+1) - 2h^{n}(i) + h^{n}(i-1)}{\Delta x^2}$$

$$h^{n+1}(i) = h^{n}(i) + \frac{T\Delta t}{S\Delta x^2}\left(h^{n}(i+1) - 2h^{n}(i) + h^{n}(i-1)\right)$$

Posons:

$$HNEW(i) = h^{n+1}(i)$$

$$HOLD(i) = h^{n}(i)$$

$$A = \frac{T\Delta t}{S\Delta x^2}$$

$$HNEW(i) = HOLD(i) + A\left(HOLD(i+1) - 2HOLD(i) + HOLD(i-1)\right)$$

Conditions aux limites:

HNWE(1)=HOLD(1)=H1

HNWE(N)= HOLD(N)=H2

Algorithme:

LX=100; H1=16;H2=11;TF1=10;TF2=100;TF3=400; DT=5;DX=10;Tr=0.02;S=0.002;

Calculer le vecteur X, et sa longueur (N)

Entrer la valeur de HNWE(1),HNWE(N),HOLD(1),HOLD(N)

Calculer le coefficient A

Initialiser HOLD pour i =2 jusqu'à N-1

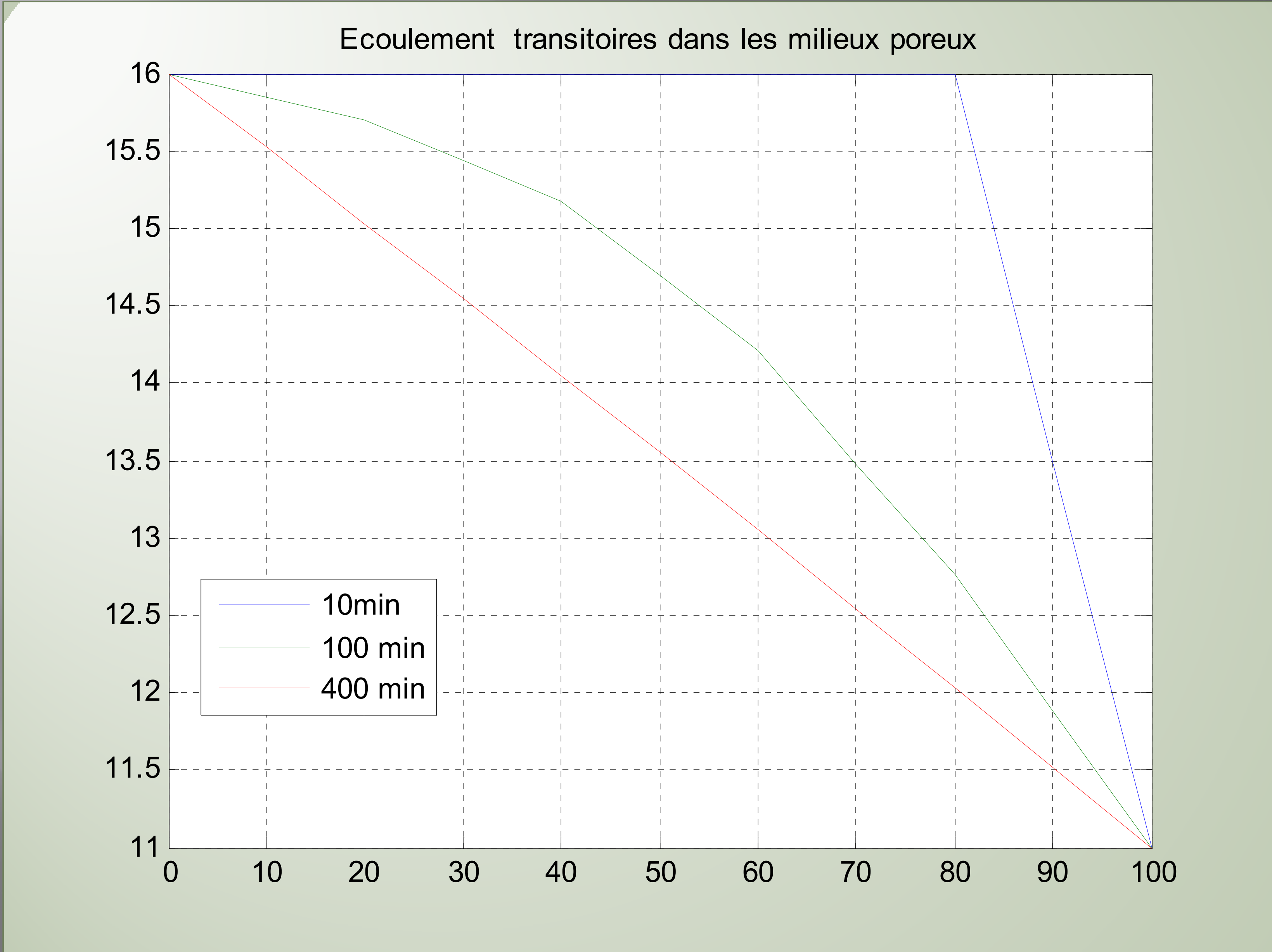
Initialiser T(1) et k

Tant que T(k)<= TF3
Calculer HNWE(i)=f(HOLD) pour i=2 jusqu'à N-1
HOLD=HNWE;T(k+1)=T(k);
Si T(k+1)=TF1 alors H10min=HNWE fin si
Si T(k+1)=TF2 alors H100min=HNWE finsi
k=k+1
Fin tant que

H400min=HNWE

Tracer H10min, H100min, H400min en fonction de x

Résultat


Ecoulement transitoires dans les milieux poreux
16
15.5
15
14.5
14
13.5
13
12.5
12
11.5
11
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
10min
100 min
400 min