

Chap. 1

LE NOYAU ATOMIQUE

I - Introduction :

L'idée d'un noyau central de très petites dimensions, où serait concentrée toute la charge positive, résulte de l'expérience de RUTHERFORD sur la diffusion des particules  $\alpha$  (noyaux d'Hélium) par des noyaux lourds. On sait maintenant que le noyau est formé des protons et des neutrons. Ceux-ci sont liés entre eux par des forces très intenses mais de très courte portée appelées forces nucléaires. Ces forces sont dues à l'échange entre les nucléons (protons, neutrons) des particules de masse plus faible appelées mésons. On dit que les mésons sont les " quanta " du champ nucléaire, comme le sont les photons du champ électromagnétique. Mais nos connaissances sur les forces nucléaires sont encore réduites et ne permettent pas de développer une théorie rigoureuse du noyau. On se contente de modèles nucléaires plus ou moins adaptés, permettant d'interpréter certaines propriétés nucléaires. Mais beaucoup de progrès restent à faire...

II - Les Nucléons :

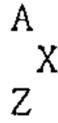
1°) Le proton : C'est le noyau de l'atome d'hydrogène. Le proton est une particule stable et possède une charge positive égale à la charge élémentaire  $e$ , un spin =  $1/2$  et un moment magnétique.

2°) Le Neutron : Grâce aux travaux de BOTHE et BECKER (1930) puis de F. JOLIOT - CURIE et CHADWICK (1932), a reçu le nom de neutron le deuxième constituant du noyau. C'est une particule ayant une masse légèrement supérieure à celle du proton, électriquement neutre et instable à l'état libre (durée de vie  $\approx 17$  minutes). Il possède un spin =  $1/2$  et un moment magnétique. Le nombre de neutrons est en général plus élevé que celui des protons dans un noyau.

III - Propriétés statiques des noyaux :

1°) La charge électrique: Elle est égale au nombre de protons contenus dans le noyau. Comme l'atome (noyau + électrons) est globalement neutre, le nombre de protons est égal à celui des électrons : le nombre atomique  $Z$  détermine la charge d'un noyau.

2°) Nombre de masse : C'est le nombre total A de nucléons (protons + neutrons) dans un noyau. Par convention, un noyau (ou nuclide) est représenté par le symbole :



X représente le symbole chimique de l'élément correspondant.

Ex :  ${}^{12}_6\text{C}$  représente le noyau du carbone ayant A = 12.

Le nombre de neutrons est N = A - Z

Par extension, on note souvent le proton  ${}^1_1\text{p}$  et le neutron  ${}^1_0\text{n}$ .

3°) Isotopes, isobares, isotones :

Les isotopes sont des nuclides ayant le même nombre atomique Z

Ex :  ${}^{12}_6\text{C}$  et  ${}^{14}_6\text{C}$

Les nuclides ayant le même nombre de masse A sont dits isobares.

Ex :  ${}^{102}_{46}\text{Pd}$  et  ${}^{102}_{47}\text{Ag}$

Sont appelés isotones, les nuclides ayant le même nombre de Neutrons N.

Ex :  ${}^3_1\text{H}$  et  ${}^4_2\text{He}$

4°) Rappel de quelques propriétés chimiques :

Les isotopes ont des propriétés chimiques pratiquement identiques, car ils ne diffèrent entre eux que par le nombre de neutrons dans le noyau. Or il y a une indépendance presque complète entre les propriétés du noyau et les propriétés chimiques de l'atome. Ces dernières sont dues aux électrons les plus externes. Les différents isotopes existant à l'état naturel se trouvent mélangés dans des proportions qui restent pratiquement les mêmes quelle que soit l'origine de l'échantillon considéré.

5°) Dimensions du noyau :

Dans l'hypothèse d'un noyau sphérique de rayon r, si l'on admet que son volume est proportionnel au nombre de nucléons A on a immédiatement :

$$\boxed{R = r_0 A^{1/3}} \quad (1)$$

De nombreux phénomènes sont susceptibles d'être utilisés pour déterminer le "rayon équivalent" du noyau, en particulier la dispersion élastique des neutrons rapides et les réactions nucléaires. L'expérience montre que (1) est valable en première approximation. On trouve :

$$r_0 \approx 1,2 \text{ fm}$$

Le symbole fm est le Fermi =  $10^{-12}$  mm, l'unité de distance utilisée en physique nucléaire.

6°) Unité de masse atomique : (u . m . a)

Si l'on se fixe arbitrairement la masse d'un atome, on en déduit celles de tous les autres par spectroscopie de masse. Par convention, l'unité de masse atomique est égale au 1/12 de la masse d'un atome de carbone 12 ( $^{12}_6\text{C}$ ) dans son état fondamental. En kilogramme, l'unité de masse atomique vaut :

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{\text{masse de l'atome gramme de } ^{12}\text{C}}{\text{Nombre d'Avogadro} = 6,02 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

L'équivalent en énergie de l'unité de masse atomique est :

$$E = m c^2 = 1,4922 \text{ Joule.}$$

On rappelle que l'électron - volt (eV) est l'énergie acquise par un électron, de charge  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C, accéléré sous une d.d.p. de 1 volt, soit  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$

Par suite,

$$1 \text{ u.m.a} = 931,438 \text{ MeV} \quad (2)$$

Pour simplifier l'écriture, l'u.m.a sera remplacé désormais par le symbole u. Pour l'électron  $m_0 = 0,00055 \text{ u.}$

IV - Energie de liaison :

1°) Défaut de masse :

On pourrait penser que l'on obtiendra la masse  $\frac{A}{Z} M$  d'un nuclide en ajoutant Z fois la masse du proton et N fois la masse du neutron. Or il n'en est rien, on a toujours :

$$\frac{A}{Z} M < Z M_p + (A - Z) M_n$$

$M_p$  = masse du proton = 1,00759 u.

$M_n$  = masse du neutron = 1,00898 u.

Le défaut de masse est la quantité :

$$\Delta M = Z M_p + (A - Z) M_n - \frac{A}{Z} M \quad (3)$$

$\Delta M$  peut être déterminé directement par la mesure de  $\frac{A}{Z} M$  au spectrographe de masse.

2°) Energie de liaison :

Les masses  $M_p$  et  $M_n$  correspondent aux protons et neutrons à l'état libre. Soit  $L(A, Z)$  l'énergie nécessaire pour séparer complètement les nucléons d'un noyau. Le principe de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{A}{Z} M c^2 + L(A, Z) = \left[ Z M_p + (A - Z) M_n \right] c^2$$

Par suite,

$$L(A, Z) = \Delta M c^2 \quad (4)$$

Le défaut de masse s'explique donc par l'existence d'une énergie de liaison  $L$  qui, à son tour, traduit la présence des forces agissant sur les nucléons entre eux, appelées forces nucléaires. Ces forces sont d'autant plus intenses que l'énergie de liaison est plus grande.

La relation (4) exprime  $L(A, Z)$  en Joules. En physique nucléaire, on l'exprime en MeV et  $\Delta M$  en u.m.a. On a alors :

$$L(\text{MeV}) = 931 \Delta M (u) \quad (5)$$

3°) Energie de liaison par nucléon :

L'énergie de liaison  $L(A, Z)$  correspond à  $A$  nucléons du noyau. Pour comparer les différents noyaux entre eux, il est plus commode d'utiliser l'énergie de liaison rapportée à un nucléon. Cette énergie est :

$$l = \frac{L(A, Z)}{A} \quad (6)$$

$l$  est encore une fonction de  $A$  et de  $Z$ . Pour des valeurs de  $A$  élevées, elle dépend essentiellement de  $A$ . La figure n° 1 donne  $l = f(A)$  appelée courbe d'Aston. On peut faire les remarques suivantes :

a) Lorsque  $A$  est faible ( $A \leq 28$ ), la courbe  $l = f(A)$  croît en présentant des pics pour les noyaux  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^8_4\text{Be}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$  possédant le même nombre pair de protons et de neutrons.

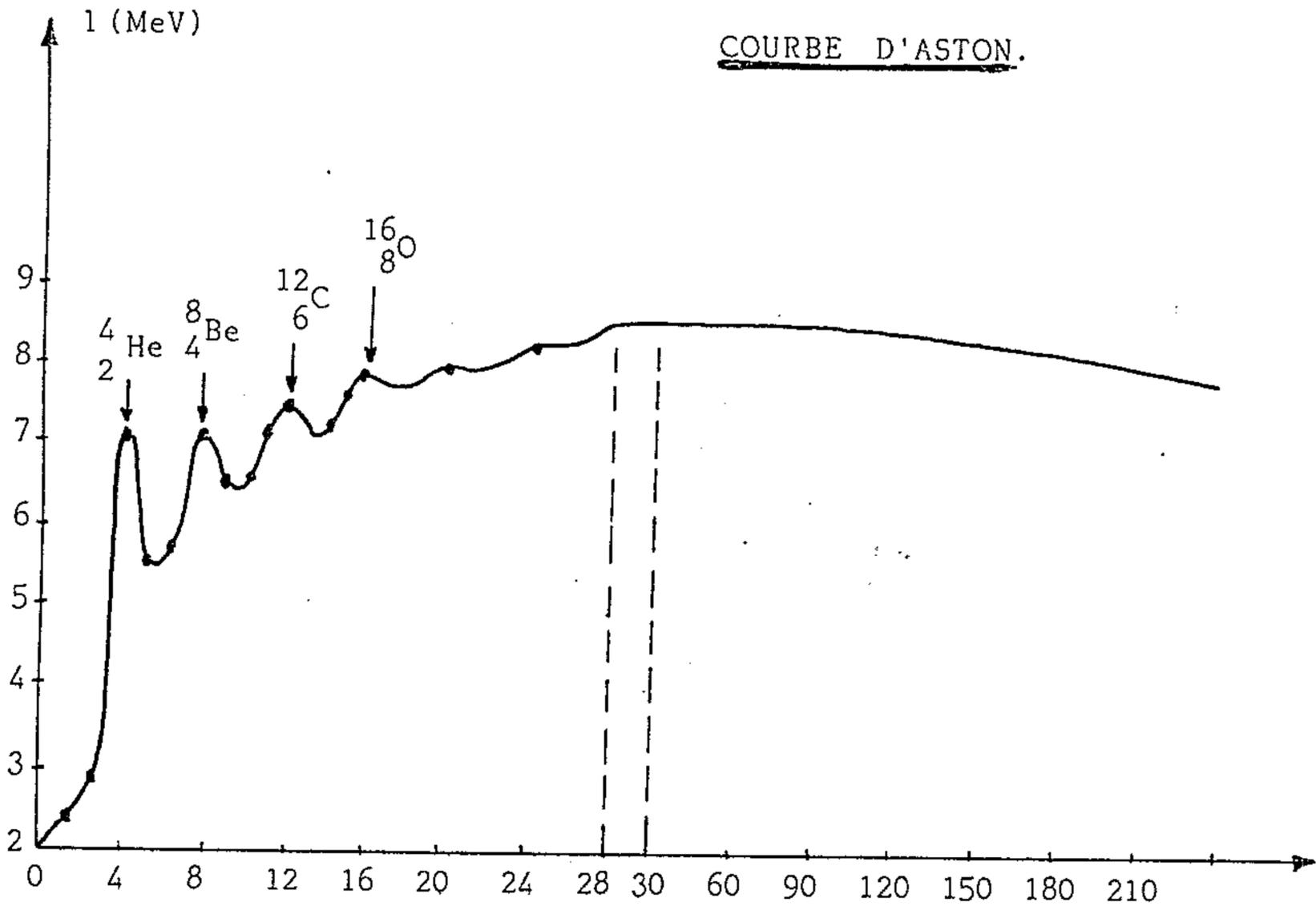


Fig. 1.

Ces noyaux présentant une grande énergie de liaison par nucléon sont particulièrement stables.

b) Pour  $30 \leq A \leq 150$ ,  $l$  reste pratiquement égale à 8 MeV. Le maximum  $l = 8,7$  MeV est atteint pour  $A = 60$ .

c) Pour  $A > 150$ ,  $l$  décroît lentement.

#### V - Généralités sur les particules élémentaires :

Depuis 1945, l'étude des rayons cosmiques d'une part et la mise au point des grands accélérateurs de particules de l'autre, ont conduit les Physiciens à la découverte d'un grand nombre de particules élémentaires dont la durée de vie moyenne est généralement brève. La tâche de la Physique sub-atomique est de classer ces particules (et antiparticules) d'une



A chaque baryon correspond un anti-baryon de masse et de spin identiques mais de charge (ou moment magnétique) opposée. Ce sont :

a) Antinucléons :  $\bar{p}$  (antiproton) et  $\bar{n}$  (antineutron).

b) Antihypérons ( $\bar{Y}$ ) :  $\bar{\Lambda}^0$  ,  $\bar{\Sigma}^+$  ,  $\bar{\Sigma}^-$  ,  $\bar{\Omega}^-$ .

Loi de conservation :

"Le nombre de baryons moins le nombre d'antibaryons se conserve au cours d'une réaction".

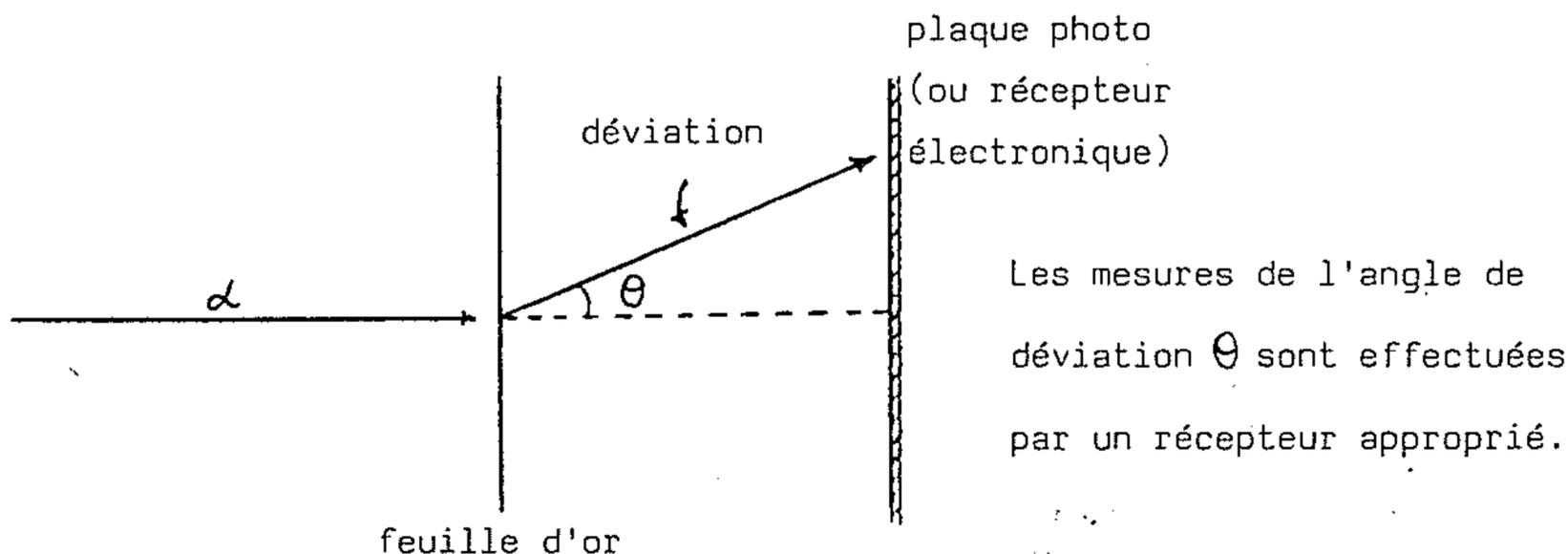
#### VI - Lois générales de conservation :

A côté des lois de conservation des leptons et des baryons, les réactions nucléaires obéissent aux lois suivantes :

- a) Conservation de l'énergie (la masse étant considérée comme énergie)
- b) Conservation de l'impulsion.
- c) Conservation de la charge électrique.
- d) Conservation du moment cinétique total ( $\sum \{ \vec{l} + \vec{s} \}$ ).

VII - Expérience de Rutherford (1912)

On étudie les déviations subies par les trajectoires des particules  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) passant à travers une fine feuille d'or ( $Z = 79$ ). Les déviations sont dues aux forces de répulsion électrostatique, en supposant les noyaux d'or sphériques de rayon  $R$ .



- Fig. 2 -

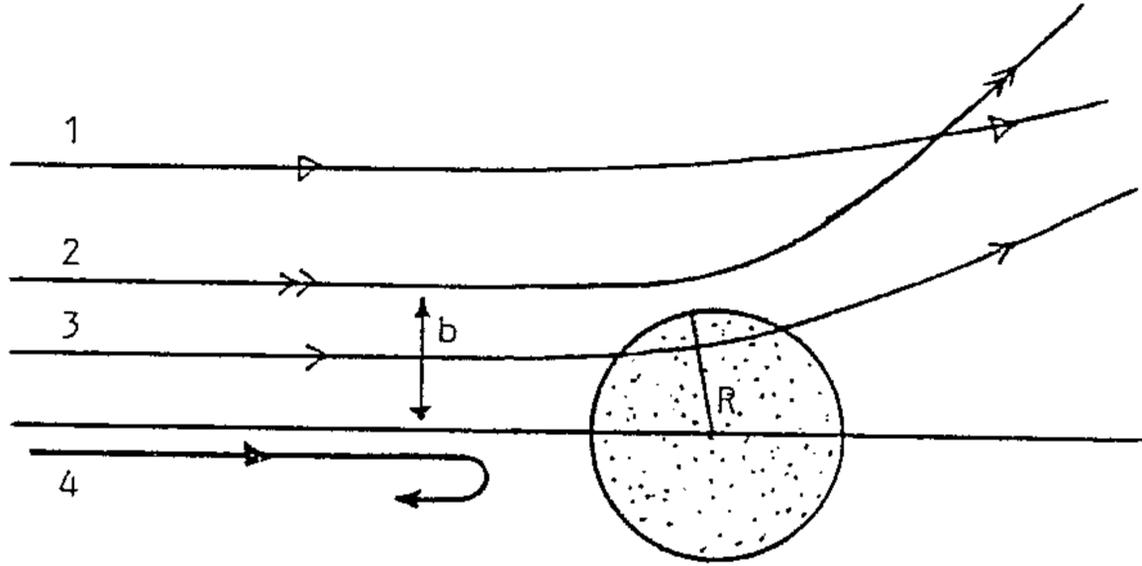
La fig. 3 montre quatre trajectoires typiques des particules  $\alpha$ , qui peuvent être caractérisées par leurs paramètres d'impact  $b$ .

1°) Pour  $b \gg R$  (trajectoire 1 et 2) la force de répulsion électrostatique  $F = \frac{Z_\alpha Ze^2}{b^2}$  est d'autant plus grande que  $b$  est plus petit. La plus grande déviation a donc lieu pour  $b \simeq R$ .

2°) Pour  $0 < b < R$  (trajectoire 3) la particule  $\alpha$  peut "traverser" le noyau d'or considéré comme un milieu de distribution de charge. Les forces agissant de part et d'autre de la particule  $\alpha$  sont moins efficaces pour produire une déviation. De plus, les forces nucléaires entrent en jeu. Le phénomène est plus complexe.

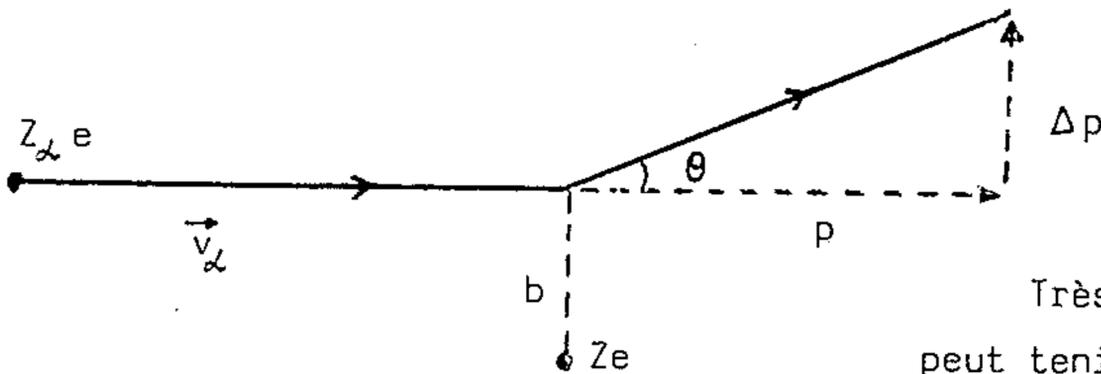
3°) Pour  $b = 0$ , on a un choc frontal. Si l'énergie de la particule  $\alpha$  est insuffisante, elle est tout simplement "réfléchie". La distance minimale d'approche est  $D_m$  telle que (trajectoire 4)

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{Z_\alpha Ze^2}{D_m} \implies D_m = \frac{2 Z_\alpha Ze^2}{m_\alpha v_\alpha^2}$$



- Fig. 3 -

Sur la fig. 3 on peut voir comment varie, en fonction du paramètre d'impact  $b$ , la déviation des trajectoires due à une distribution volumique de charges de rayon  $R$ . La déviation maximale s'obtient lorsque la trajectoire vient effleurer la distribution, soit  $b \approx R$ .



- Fig. 4 -

Très schématiquement, on peut tenir le raisonnement suivant. Parallèlement à la trajectoire incidente la particule est ralentie lorsqu'elle approche et accélérée lorsqu'elle s'éloigne. Il n'y a pas d'effet résultant, de sorte que l'on peut négliger les composantes longitudinales des forces. La majeure partie de la déviation se produit juste quand la particule  $\mathcal{L}$  passe devant le noyau où la force de Coulomb est :

$$F = \frac{Z_L Ze^2}{b^2}$$

Cette force agit perpendiculairement à la direction de  $\vec{v}_L$  (fig. 4) sur une distance  $b$ . Elle agit pendant un temps  $\Delta t = \frac{b}{v_L}$  et produit une impulsion transversale  $\Delta p = F \Delta t$ , soit

$$\Delta p = \frac{Z_{\alpha} Z e^2}{b^2} \cdot \frac{b}{v_{\alpha}}$$

La déviation résultant est  $\theta \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{Z_{\alpha} Z e^2}{b v_{\alpha}} / m_{\alpha} v_{\alpha}$

On en déduit

$$b = \frac{Z_{\alpha} Z e^2}{m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \theta}$$

(7)

Rutherford trouva  $\theta_{\max} \approx 1$  radian pour  $m_{\alpha} = 6.10^{-30}$  g et  $v \approx 10^9$  cm/s, ce qui donne  $b \approx R \approx 10^{-12}$  cm.

Le rayon nucléaire est remarquablement petit à l'échelle atomique et vaut  $10^{-4}$  fois le rayon de Bohr.

LA MECANIQUE QUANTIQUE EN PHYSIQUE  
NUCLEAIRE

I - Particule dans une boîte fermée :

1°) La fonction d'onde  $\Psi$  :

Une particule dans une boîte fermée simule une situation dans laquelle une particule est dans un état lié, tel un nucléon dans un noyau. Une boîte fermée doit être représentée par un potentiel dont la valeur est infinie à la position des parois, puisque la particule ne peut pas sortir de la boîte. En conséquence, l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = E \Psi \quad (1)$$

doit satisfaire aux conditions suivantes :

$V = 0$  à l'intérieur de la boîte

$V = \infty$  sur les parois de la boîte

$\Psi \equiv 0$  à l'extérieur de la boîte.

En posant  $\Psi(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ , il est facile de séparer les variables de l'équation (1).

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \quad (2)$$

Avec :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (3)$$

Les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  étant indépendantes, on peut poser :

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2$$

On en tire immédiatement :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (5)$$

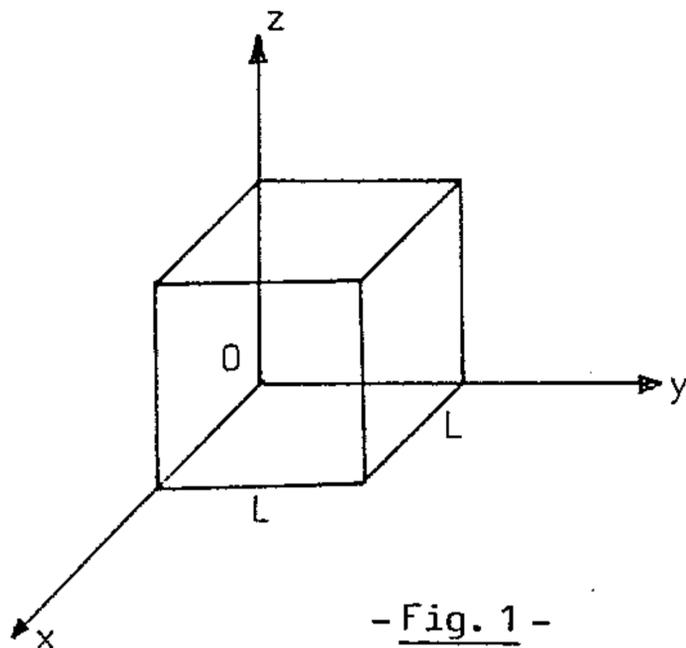
L'équation (4) admet pour solution  $X = A_x \sin k_x (x + \varphi_x)$

Les constantes d'intégration  $k_x$  et  $\varphi_x$  sont déterminées par les conditions aux limites,  $A_x$  par la normalisation de  $\Psi$ .

La condition  $X(0) = 0 \implies \varphi_x = 0$ . On a donc :

$$X = A_x \cdot \sin k_x x \quad (6)$$

D'autre part  $X(L) = 0$  impose  $k_x L = n_x \pi$  ( $n_x = \text{entier}$ )



- Fig. 1 -

$$\text{Soit } k_x = \frac{n_x \pi}{L}$$

On remarquera que seules les constantes positives ont un sens : changer le signe de  $n_x$  équivaut à changer le signe de  $A_x$  dans (6), qui est une constante arbitraire, et par conséquent on peut garder la même fonction d'onde.

On exclut également  $n_x = 0$  qui entraîne  $\Psi = 0$  en tout point de la boîte. De la même façon, on trouve

$$Y = A_y \cdot \sin k_y y \quad \text{et} \quad Z = A_z \cdot \sin k_z z$$

$$\text{avec } k_y = \frac{n_y \pi}{L} \quad \text{et} \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L}$$

La fonction d'onde totale s'écrit :

$$\begin{cases} \Psi = A \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \\ \text{avec } A = A_x \cdot A_y \cdot A_z \end{cases} \quad (7)$$

Chaque composante de cette fonction est une onde de De Broglie. Par exemple, la longueur d'onde dans la direction x vaut :

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2L}{n_x} \quad (8)$$

C'est la condition suffisante pour produire une onde stationnaire dans la boîte avec formation de nœuds sur les parois.

La condition de normalisation de la fonction d'onde détermine la valeur de A. En effet :

$$1 = A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n_x \pi x}{L} dx \int_0^L \sin^2 \frac{n_y \pi y}{L} dy \int_0^L \sin^2 \frac{n_z \pi z}{L} dz$$

chaque intégrale vaut  $L/2$ , ce qui donne  $A = (2/L)^{3/2}$

La fonction d'onde normalisée s'écrit :

$$\Psi = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \cdot \sin \frac{n_y \pi y}{L} \cdot \sin \frac{n_z \pi z}{L} \quad (9)$$

2°) Principe de correspondance (Bohr, 1923)

Comparons la densité de probabilité  $|\Psi|^2$  à sa valeur en mécanique classique. Une particule rebondissant élastiquement sur toutes les parois de la boîte a une vitesse constante à l'intérieur de cette boîte. Par suite sa densité de probabilité est égale à  $\frac{1}{L}$ . C'est exactement la valeur de  $|\Psi|^2$  pour  $n_x, n_y, n_z \longrightarrow \infty$ , puisque l'on peut remplacer chaque fonction sinus carré par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$ .

Dans cet exemple, on voit que l'on peut approcher la mécanique quantique par la mécanique classique chaque fois que les nombres quantiques du

système (par exemple  $n_x, n_y, n_z$ ) deviennent très grands.

3°) Quantification de l'énergie :

$$\text{D'après (3) et (5) on a : } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\text{Soit } (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (10)$$

L'énergie de la particule ne peut prendre que des valeurs multiples entiers de  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ . On dit qu'elle est quantifiée et ceci résulte de la condition aux limites imposée à la fonction d'onde.

En prenant  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$  comme unité d'énergie, le tableau ci-dessous donne les valeurs correspondantes de E

| $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ | $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = E^*$ | nombre de niveau |
|-------|-------|-------|---------------------------------|------------------|
| 1     | 1     | 1     | 3                               | 1                |
| 1     | 1     | 2     | 6                               | 3*               |
| 1     | 2     | 2     | 9                               | 3                |
| 1     | 1     | 3     | 11                              | 3                |
| 2     | 2     | 2     | 12                              | 1                |
| 1     | 2     | 3     | 14                              | 6                |
| 2     | 2     | 3     | 17                              | 3                |

\* : E s'exprime en  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$

Les trois niveaux correspondent à

$$\begin{cases} n_x & n_y & n_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{cases}$$

Ils ont la même énergie mais des fonctions d'onde différentes. On dit qu'elles sont dégénérées. On a la même situation pour les autres cas où le nombre de niveaux est supérieur à 1.

4°) Energies mises en jeu en physique nucléaire :

A titre d'exemple, prenons un électron dans un atome

$$m_0 = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}, \quad L \approx 10^{-8} \text{ cm (dimension de l'atome)}$$

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m \cdot L^2} \approx \frac{\pi^2 (1,05 \times 10^{-27})^2}{2 \times 9,1 \times 10^{-28} \times 10^{-16}} \approx 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ erg} \approx 30 \text{ eV}$$

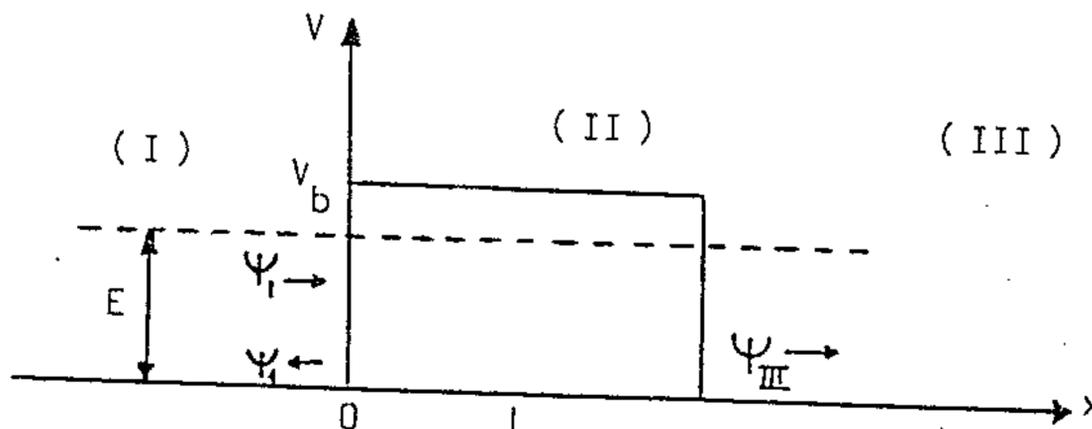
Pour un nucléon de masse  $m = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ g}$  et  $L \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \approx 6 \text{ MeV}$$

Ces valeurs nous permettent d'apprécier d'ores et déjà l'ordre de grandeur des énergies mises en jeu, surtout l'énorme différence entre des énergies atomiques et nucléaires.

II - Pénétration d'une barrière de potentiel par une particule :

La fig. 2 représente une barrière de potentiel simple à une dimension



- Fig. 2 -

On suppose qu'un faisceau de particules provient de  $x = -\infty$  et traverse la barrière vers la droite. On divise l'espace en trois régions I, II, et III et on pose  $V_I = 0$ ,  $V_{II} = V_b$ ,  $V_{III} = 0$ . Soit  $E$  l'énergie des particules. Dans les régions I et III, comme  $E > V$ , on peut les représenter par une onde progressive. Dans la région I l'onde peut être réfléchiée par la barrière; par contre dans III rien ne peut réfléchir l'onde vers la gauche. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = -k^2 \Psi \quad \text{dans (I) avec } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = K^2 \Psi \quad \text{dans (II) avec } K^2 = \frac{2m(V_b - E)}{\hbar^2} \\ \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = -k^2 \Psi \quad \text{dans (III)} \end{array} \right.$$

Les solutions de (11) dans les régions (I) et (III) sont

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_I = a_I e^{ikx} + b_I e^{-ikx} = \Psi_{I \rightarrow} + \Psi_{I \leftarrow} \\ \Psi_{III} = a_{III} e^{ikx} = \Psi_{III \rightarrow} \end{array} \right.$$

Pour la région (II) la solution est du type onde stationnaire.

$$(13) \quad \Psi_{II} = a_{II} e^{Kx} + b_{II} e^{-Kx}$$

La transmission de l'onde à travers la barrière est caractérisée par la probabilité de traversée des particules.

$$(14) \quad P = \frac{|\Psi_{III \rightarrow}|^2}{|\Psi_{I \rightarrow}|^2} = \frac{|a_{III}|^2}{|a_I|^2}$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont déterminés par les conditions de continuité de  $\Psi$  et  $d\Psi/dx$  en  $x = 0$  et  $x = L$ . Ainsi, en  $x = 0$

$$\Psi_{I \rightarrow} + \Psi_{I \leftarrow} = \Psi_{II} \implies a_I + b_I = a_{II} + b_{II} \quad (15)$$

En  $x = L$  on a  $\Psi_{II} = \Psi_{III \rightarrow} \implies a_{II} e^{KL} + b_{II} e^{-KL} = a_{III} e^{ikL}$  (16)

En dérivant  $\Psi$ , on obtient des équations semblables

$$(17) \begin{cases} ik(a_I - b_I) = K(a_{II} - b_{II}) \\ K(a_{II} e^{KL} - b_{II} e^{-KL}) = ika_{III} e^{ikL} \end{cases}$$

Les équations (15), (16) et (17) permettent de calculer (14).

On trouve :

$$P = \left[ \frac{2 V_b}{4 E (V_b - E)} \cdot \text{sh}^2 KL \right]^{-1}$$

Pour  $KL \gg 1$ ,  $\text{sh}^2 KL \approx \frac{1}{4} e^{2KL}$

$$(18) \quad P \approx 16 \frac{E}{V_b} \left(1 - \frac{E}{V_b}\right) e^{-2KL}$$

Dans la plupart des cas physiques, le facteur exponentiel est prédominant.

En effet pour des protons de 5 MeV et  $V_b = 10$  MeV,  $L = 10^{-12}$  cm on a :  
 $K \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^{-1}$ .

Par suite  $e^{-2KL} = e^{-10} = 0,5 \cdot 10^{-4}$

Et la probabilité  $P = 2 \cdot 10^{-4}$

Très souvent on néglige le terme devant l'exponentielle dans (18) et on écrit :

$$(19) \begin{cases} P \approx e^{-\gamma} \\ \text{avec : } \gamma = 2KL = 2 \left[ 2m(V_b - E) \right]^{1/2} \frac{L}{\hbar} \end{cases}$$

Lorsque  $V$  varie en fonction de  $x$  (fig. 3) on décompose la barrière en tranches

$dx = L_i$ . On obtient  $P_i \approx e^{-\gamma_i}$  avec  $\gamma_i = 2K dx$ . La probabilité totale de traversée est  $P = P_1 \cdot P_2 \dots P_n \approx e^{-\gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_n}$ .

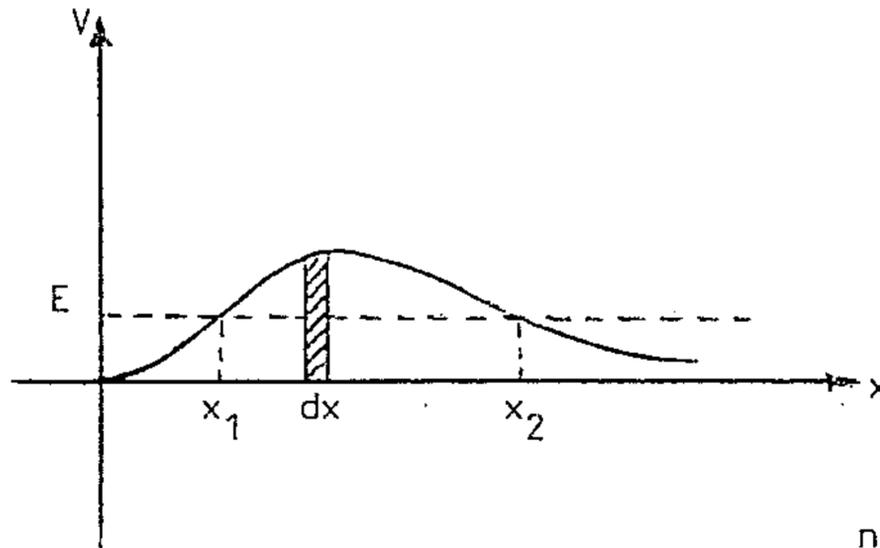


Fig. 3

Comme  $n \rightarrow \infty$  et  $dx \rightarrow 0$ , on peut représenter  $\sum_i^n \gamma_i$  par l'intégrale

$$\gamma = \frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \left[ 2m (V(x) - E) \right]^{1/2} dx \quad (20)$$

$x_1$  et  $x_2$  s'appellent points de raccordement.

On utilisera l'expression (20) pour traiter plus loin la désintégration alpha (Effet tunnel). On remarquera que seule l'amplitude de l'onde  $\Psi$  est modifiée à la traversée de la barrière. En particulier dans la région (III) la longueur d'onde de  $\Psi$  reste inchangée, cela veut dire que l'énergie  $E$  du faisceau de particules est la même que dans la région (I).

### III - La parité :

L'équation de Schrödinger  $\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi = 0$  n'est pas changée si  $V(-x, -y, -z) = V(x, y, z)$ .

Une opération de parité consiste à substituer  $r$  en  $-r$ .

Si  $V(r) = V(-r)$  on dit que le potentiel considéré conserve la parité. Pratiquement, tous les potentiels physiques possèdent cette propriété. Pour de tels

potentiels, la fonction d'onde  $\Psi$  doit avoir la propriété suivante :

$$\begin{cases} \Psi(-r) = \Psi(r) & \text{conserve la parité ou } \underline{\text{paire}} \\ \Psi(-r) = -\Psi(r) & \text{ne conserve pas la parité ou } \underline{\text{impaire}} \end{cases}$$

La conservation de la parité dans les interactions nucléaires joue un rôle important sur la dynamique des processus nucléaires (désintégrations et réactions). La parité des états peut être déterminée soit expérimentalement, soit théoriquement.

Reprenons l'exemple de la particule enfermée dans une boîte cubique. La parité de la fonction d'onde (9) n'est pas définie puisque  $\Psi = 0$  hors de la boîte ( $x < 0$ ). En effet :

$$0 < |x| < L \implies \Psi(x) \neq \Psi(-x)$$

C'est le positionnement de la boîte par rapport à l'origine (fig. 1) qui entraîne  $V(-x) = 0 \neq V(x)$  pour  $0 < |x| < L$ .

Si on prend pour origine des coordonnées le centre  $O'$  de la boîte on a  $V(-x') = V(x')$  pour  $-\frac{L}{2} < x' < \frac{L}{2}$  ( $x' = x - \frac{L}{2}$ ). La fonction d'onde  $\Psi$  s'écrit alors :

$$\Psi = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi x'}{L} + \frac{n_x \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y'}{L} + \frac{n_y \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z'}{L} + \frac{n_z \pi}{2}\right)$$

Pour toute valeur impaire de  $n_x$  la première fonction sinus vaut  $\pm \cos \frac{n_x \pi x'}{L}$  ayant une parité paire.

Pour  $n_x$  pair elle vaut  $\pm \sin \frac{n_x \pi x'}{L}$  avec une parité impaire.

En définitive, la parité de la fonction d'onde est paire ou impaire selon que  $(n_x + n_y + n_z)$  est impair ou pair.

Plus généralement, on montre que pour des potentiels sphériques la fonction d'onde a la parité  $(-1)^l$ , où  $l$  est le nombre quantique orbital qui détermine le moment angulaire orbital  $\hbar \sqrt{l(l+1)}$  du système considéré.

Chap. 11

MODELE DE LA GOUTTE LIQUIDE

I - Hypothèses de base :

On assimile le noyau à une goutte liquide incompressible. Malgré cet aspect simpliste, le modèle a donné des résultats intéressants. Il a été construit par Von Weizsäcker en 1935 en se basant sur les données suivantes :

1°) La masse volumique de la matière nucléaire est la même, quel que soit A. Sa valeur est d'environ  $1,45 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .

2°) Le noyau est une sphère de rayon :

$$R = r_0 A^{1/3}$$

3°) La densité volumique de charge est constante dans le noyau. Cela veut dire que les Z protons sont distribués de façon uniforme dans tout le volume du noyau.

4°) La force nucléaire ne dépend pas de la nature du nucléon (proton ou neutron). Cela signifie que si les forces nucléaires existaient seules, l'énergie de liaison serait proportionnelle à A et le nombre de protons serait égal à celui des neutrons.

5°) Les forces nucléaires sont à court rayon d'action : un nucléon peut interagir qu'avec ses voisins immédiats.

II - Formule semi-empirique de L(A,Z) :

L'énergie de liaison d'un noyau est la résultante de cinq composantes que nous allons étudier successivement.

1°) Energie de liaison en volume

Chaque nucléon apporte la même contribution à l'énergie de liaison. Dans le modèle de la goutte liquide, cette contribution est proportionnelle à A, donc aussi au volume. C'est pourquoi nous la noterons :

$$E_v = a_v A \quad (1)$$



$$E_c = - \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}$$

Avec  $R = r_0 A^{1/3}$ , on a :

$$E_c = - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (3)$$

$$a_c = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0}$$

4°) Energie d'asymetrie :

La stabilité des noyaux est renforcée lorsque le nombre de protons est égal à celui des neutrons ( $Z = N = A/2$ ). Du fait qu'il y a plus de neutrons que de protons dans un noyau, l'énergie de liaison se voit diminuée d'une quantité  $E_a$  définie par :

$$E_a = E(N, Z) - E'$$

$E(N, Z)$  = énergie totale du noyau ( $N, Z$ )

$E'$  = énergie totale du noyau si  $N = Z = A/2$

A l'aide du modèle dit du "gaz de Fermi" on montre que :

$$E(N, Z) = \frac{a}{R^2} (Z^{5/3} + N^{5/3})$$

Par suite :

$$E'(N=Z) = 2 \frac{a}{R^2} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}$$

D'où :

$$E_a = E(N, Z) - E' = \frac{a}{R^2} \left[ Z^{5/3} + N^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \right]$$

On sait que :  $N + Z = A$

Posons  $t = \frac{N - Z}{A}$ , ce qui implique :  $t \ll 1$ .

On en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} N = (t + 1) \frac{A}{2} \\ Z = (1 - t) \frac{A}{2} \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans  $E_a$ , on obtient :

$$E_a = \frac{a}{R^2} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[ (1-t)^{5/3} + (1+t)^{5/3} - 2 \right]$$

Comme  $t \ll 1$ , on peut développer  $(1+t)^n \approx 1 + nt + \frac{n(n-1)t^2}{2} + \dots$

$$E_a = \frac{a}{R^2} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[ 1 - \frac{5}{3}t + \frac{5/3(5/3-1)t^2}{2} + 1 + \frac{5}{3}t + \frac{5/3(5/3-1)t^2}{2} - 2 \right]$$

En posant :

$$a' = \frac{a}{2^{5/3}} \cdot 5/3(5/3-1) = 0,35 a$$

Et en remplaçant  $R = R_0 A^{1/3}$ , on obtient :

$$E_a = \frac{a'}{R_0^2 A^{2/3}} A^{5/3} t^2$$

Finalement :

$$E_a = \frac{a'}{R_0^2} \cdot A \frac{(N-Z)^2}{A}$$

Il faut maintenant introduire le signe (-) car  $E_a$  doit être négative

$$E_a = - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (4)$$

5°) Energie liée au nombre pair ou impair de nucléons :

Les noyaux contenant un nombre pair de protons et de neutrons sont les plus stables. Le tableau ci-dessous donne le nombre de noyaux stables selon A et Z pairs ou impairs

| A      | Z      | N      | Nombre de noyaux stables |
|--------|--------|--------|--------------------------|
| pair   | pair   | pair   | 166                      |
| impair | pair   | impair | 55                       |
| impair | impair | pair   | 51                       |
| pair   | impair | impair | 5                        |

L'ordre de stabilité des noyaux est donc :

- a) Noyaux " pair - pair " : N et Z sont pairs.
- b) Noyaux " pair - impair " : l'un des nombres N et Z est pair, l'autre impair.
- c) Noyau " impair - impair " : N et Z sont impairs.

Weizsäcker tient compte de ces propriétés en ajoutant un dernier terme de la forme :

$$E_p = a_p A^{-3/4} \delta \quad (5)$$

En posant :

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{pour les noyaux " pair - pair " } \\ 0 & \text{pour les noyaux " pair - impair " } \\ -1 & \text{pour les noyaux " impair - impair " } \end{cases}$$

Au total, l'énergie de liaison est donnée par la formule semi-empirique :

$$L(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} + a_p A^{-3/4} \delta \quad (6)$$

Diverses expériences permettent d'évaluer les divers coefficients de Weizsäcker  $a_v = 14,1 \text{ MeV}$  ;  $a_s = 13 \text{ MeV}$  ;  $a_c = 0,595 \text{ MeV}$  ;

$$a_a = 19 \text{ MeV} ; a_p = 33,5 \text{ MeV}.$$

De plus (6) n'est valable que pour  $20 \ll A \ll 240$ .

La Figure n° 1 indique les contributions des divers termes de (6)

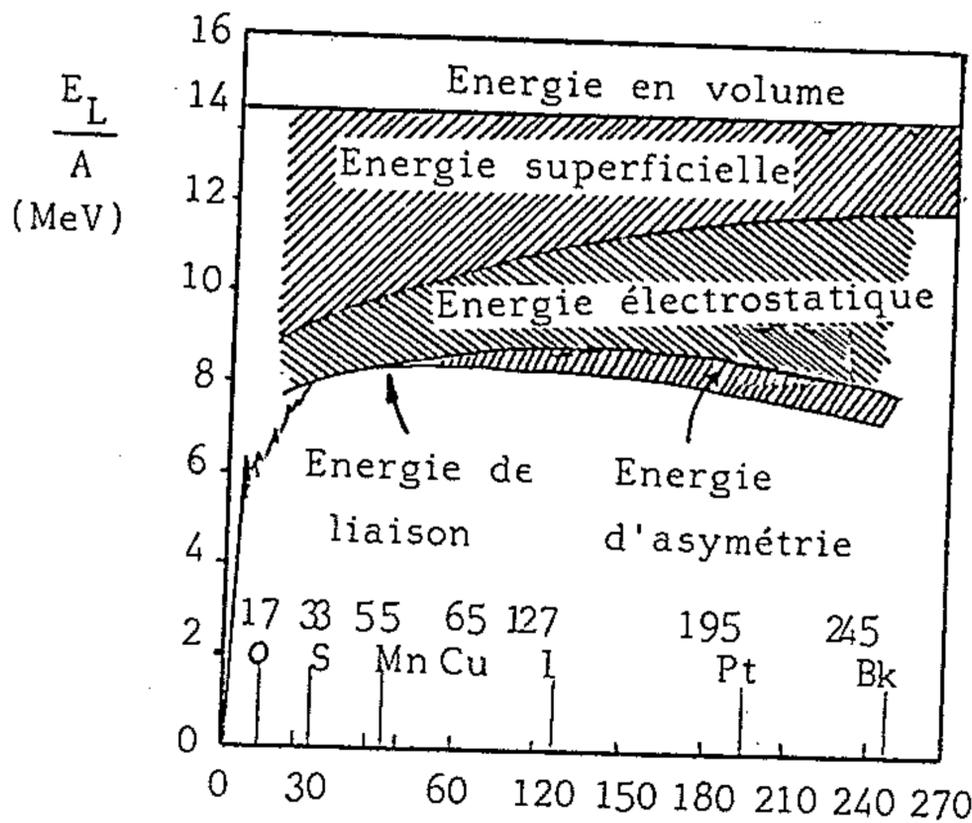


Fig. 1.

III - Applications de la formule de Weizsäcker :

L'intérêt principal du modèle de Weizsäcker est de permettre un certain nombre de prédictions sur la stabilité des noyaux vis à vis de divers types de phénomènes.

1°) Détermination des rayons nucléaires :

Le paramètre lié à l'énergie électrostatique est :

$$a_c = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0}$$

La mesure de  $a_c$  permet de calculer directement  $r_0$ . La méthode la plus simple consiste à étudier les noyaux "miroirs" : ce sont des noyaux de même nombre de masse  $A$  mais présentant des valeurs de  $Z$  et de  $N$  interchangées. Leurs masses sont  $M(A, Z)$  et  $M(A, A - Z)$ . La différence des énergies de liaison d'après la formule de Weizsäcker est :

$$\Delta L = L(A, Z) - L(A, A - Z) = a_c A^{2/3} (A - 2Z)$$

Les énergies de liaison se mesurent directement à partir du défaut de masse, en utilisant des spectrographes de masse. Les autres paramètres  $A$  et  $Z$  étant connus, on en déduit  $a_c$  et par suite  $r_0$ . Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus :

| Noyau (A, Z)          | L(A, Z)<br>MeV. | Noyau (A, A - Z)      | L(A, A - Z)<br>MeV | $\Delta L$<br>MeV | $a_c$<br>MeV | $r_0$<br>fm |
|-----------------------|-----------------|-----------------------|--------------------|-------------------|--------------|-------------|
| $^{37}_{18}\text{r}$  | 315,510         | $^{37}_{19}\text{K}$  | 308,587            | 6,923             | 0,6235       | 1,39        |
| $^{31}_{15}\text{P}$  | 262,916         | $^{31}_{16}\text{S}$  | 266,688            | 6,228             | 0,6311       | 1,37        |
| $^{23}_{11}\text{Na}$ | 186,565         | $^{23}_{12}\text{Mg}$ | 181,726            | 4,839             | 0,5983       | 1,44        |
| $^{15}_7\text{N}$     | 115,494         | $^{15}_8\text{O}$     | 111,952            | 3,542             | 0,5824       | 1,48        |

Des méthodes plus rigoureuses donnent  $r_0 = 1,2$  à  $1,28$  fm. Le modèle de Weizsäcker donne des valeurs légèrement plus grandes. Ceci est dû à sa grande simplicité.

2°) Stabilité des noyaux vis à vis de la radioactivité Bêta :

La radioactivité bêta est la transformation spontanée d'un nuclide en un autre avec émission soit d'un électron ( $\beta^-$ ) soit d'un positon ( $\beta^+$ ), tout en conservant le nombre de nucléons A. Le nuclide initial et le nuclide final sont donc des isobares. Pour ces noyaux ( $A = \text{cte}$ ) l'énergie de liaison L est seulement fonction de Z. D'après la formule de Weizsäcker c'est une fonction du second degré en Z : la courbe  $L = f(Z)$  est donc une parabole pour une valeur donnée de  $\delta$ . Deux cas sont à considérer :

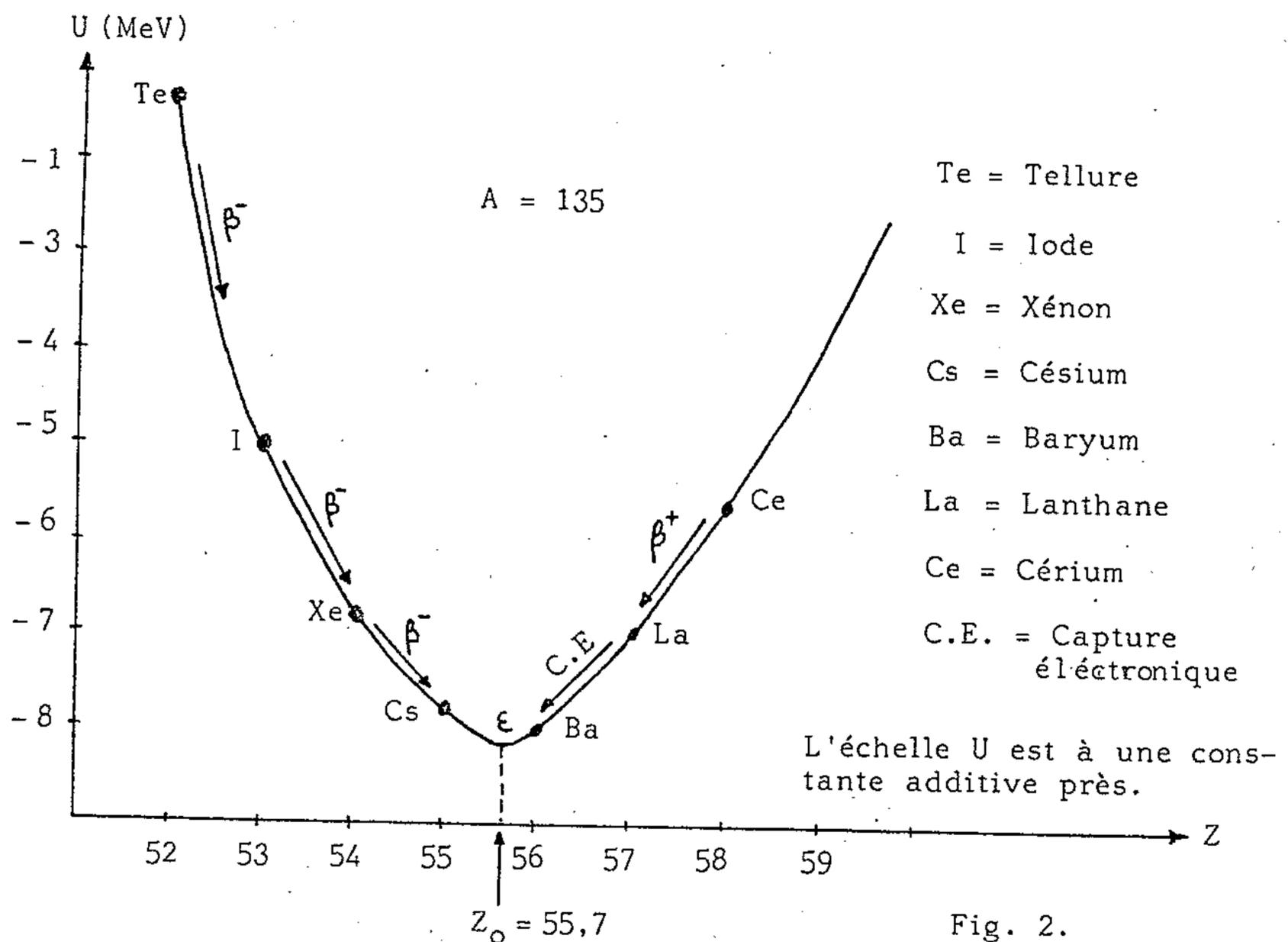
a) Le nombre A est impair :

C'est le cas des noyaux "pair-impair" et  $\delta = 0$ . L'énergie de liaison  $L = f(Z)$  est représentée par une parabole unique pour une valeur donnée de A. Elle présente un maximum.

L'isobare stable est celui pour lequel l'énergie de liaison est maximale, ce qui correspond aux forces nucléaires les plus intenses.

En mécanique (quantique ou classique), on a l'habitude d'étudier la stabilité d'un système à partir de son énergie potentielle. Pour un noyau, l'énergie potentielle est  $U = -L$ .

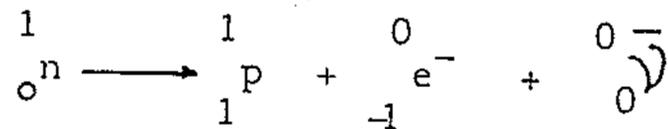
La courbe représentative de  $U = f(Z)$  pour des noyaux isobares "pair-impair" est une parabole présentant un minimum (fig. 2) correspondant au point de stabilité.



L'isobare stable est celui qui se trouve le plus près du minimum de la fonction  $U(Z)$ . Sur la figure n° 2, c'est le  $^{135}_{56}\text{Ba}$  car le minimum correspond à  $Z_0 = 55,7$ .

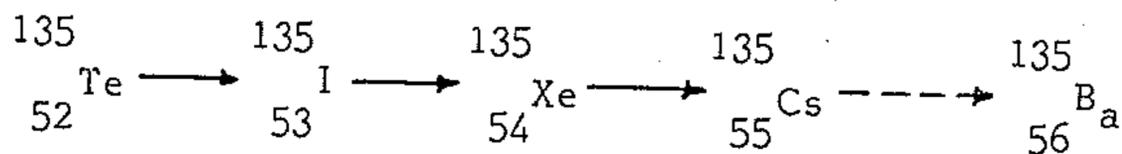
Considérons un isobare dont le point représentatif se trouve sur la parabole au-dessus du minimum  $\hat{E}$ . Il a tendance à se transformer pour se rapprocher du minimum, point de stabilité, de deux façons possibles :

i) Pour les nuclides dont  $Z < Z_0$ , la transformation se fait dans le sens  $Z \rightarrow Z + 1 \rightarrow Z + 2$  etc..., c'est à dire transformation d'un neutron en un proton avec émission d'un électron  $e^-$  : c'est la radioactivité  $\beta^-$ .



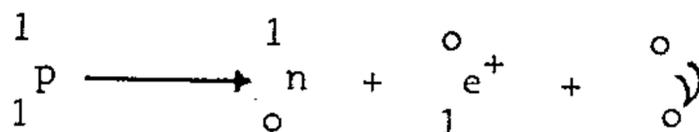
On remarquera que dans cette réaction, à côté de la conservation de la charge, la présence de l'antineutrino  ${}^0_0\bar{\nu}$  (masse  $\approx 0$ , charge = 0, spin = 1/2) garantit à la fois celle de l'énergie, du spin et des leptons.

Dans le cas de la fig. 2, on a les transformations suivantes :



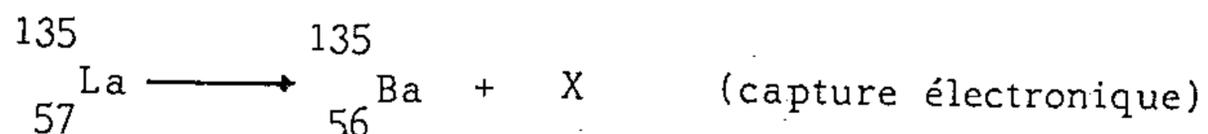
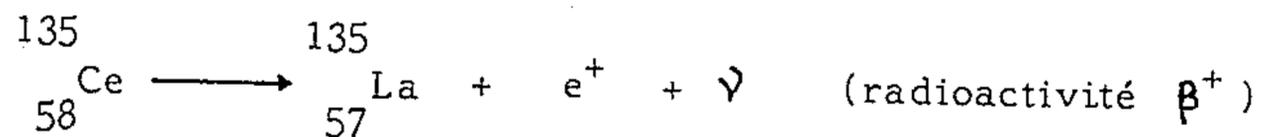
A chaque transformation, il y a émission d'un électron  $e^-$  et d'un anti-neutrino  $\bar{\nu}$ .

ii) Pour les nuclides dont  $Z > Z_0$ , la transformation se fait dans le sens  $Z \rightarrow Z - 1 \rightarrow Z - 2$  etc..., c'est à dire transformation d'un proton en un neutron avec émission d'un électron positif ou positon  $e^+$  (anti-électron) : c'est la radioactivité  $\beta^+$ .



On peut faire les mêmes remarques que précédemment concernant les lois de conservation.

Dans le cas de la fig. 2, on a deux sortes de transformation :



La capture électronique correspond à la perte d'un électron de la couche K de l'atome au profit du noyau, suivie d'un réarrangement du cortège

électronique avec émission des rayons X. Nous reviendrons sur ce point lors de l'étude sur la radioactivité  $\beta^+$ .

b) Le nombre A est pair :

Ce cas correspond à :

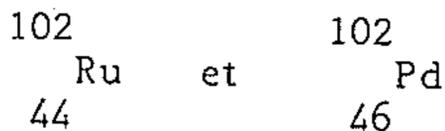
- N pair et Z pair, ce sont des noyaux "pair - pair", donc  $\delta = 1$ .
- N impair et Z impair, ce sont des noyaux "impair - impair", donc  $\delta = -1$ .

La fonction  $U = f(Z)$  pour une valeur donnée de A est encore une parabole pour chaque type de noyaux.

Les deux paraboles correspondant à  $\delta = 1$  (parabole P-P) et à  $\delta = -1$  (parabole I-I) se déduisent d'ailleurs l'une de l'autre par une translation suivant l'axe des ordonnées d'une quantité égale à  $2 a_p A^{-3/4}$  (fig. 3).

La parabole inférieure (P-P) correspond aux noyaux plus stables que ceux de la parabole (I-I) qui ont tendance à "descendre" sur (P-P) puis vers son minimum par radioactivité  $\beta^-$  ou  $\beta^+$ .

Tout noyau sur la parabole (P-P) situé en-dessous du minimum de la parabole (I-I) est stable. Le plus souvent, il existe deux isobares stables parfois un seul et rarement trois. Dans le cas de la fig. 3, il existe deux isobares stables :



Le point de stabilité correspond à  $Z_0 = 44,7$ . Le noyau  $\begin{array}{c} 102 \\ \text{Rh} \\ 45 \end{array}$  subit 2 sortes de transformations :  $\beta^-$  et  $\beta^+$ .

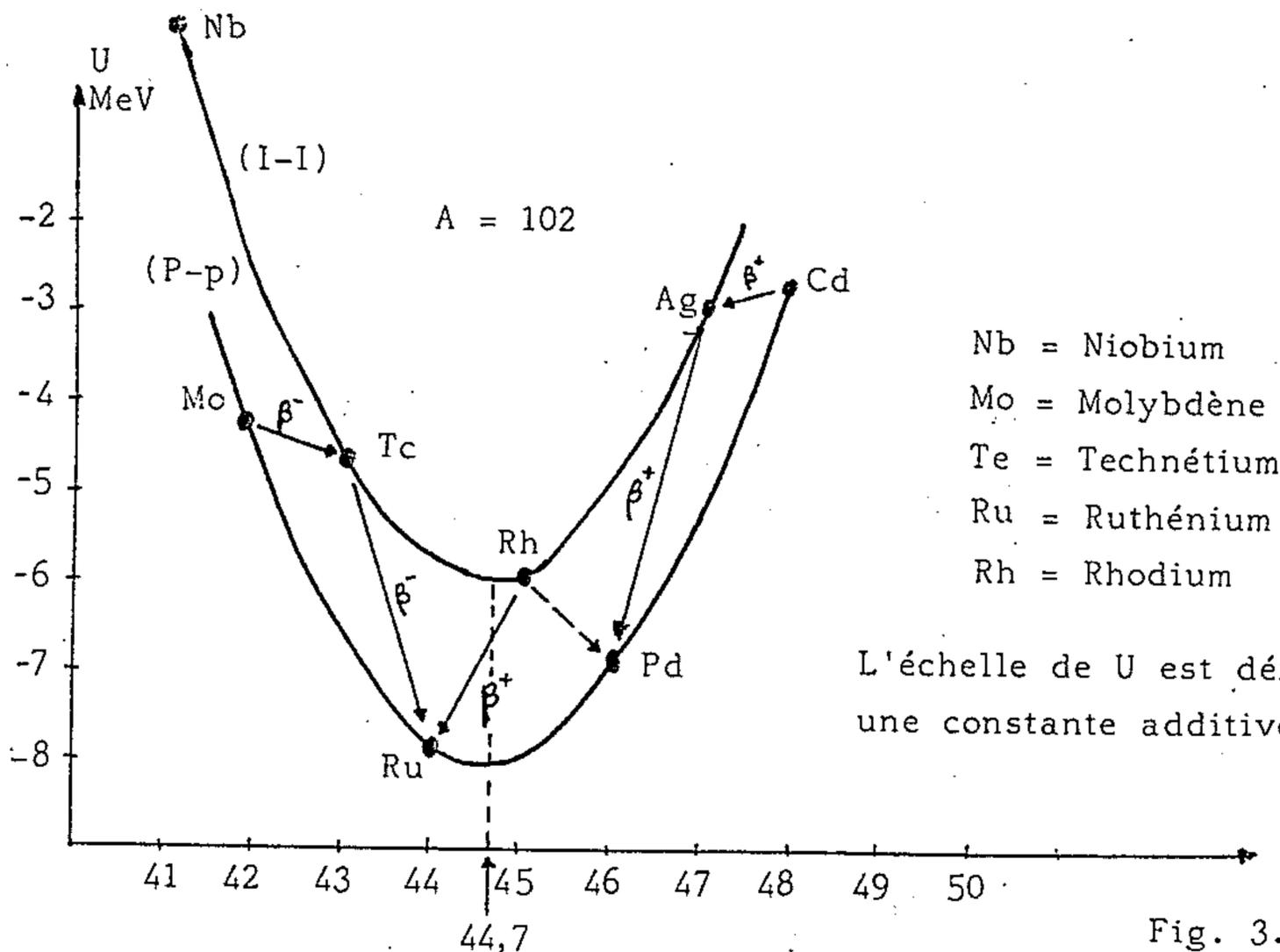
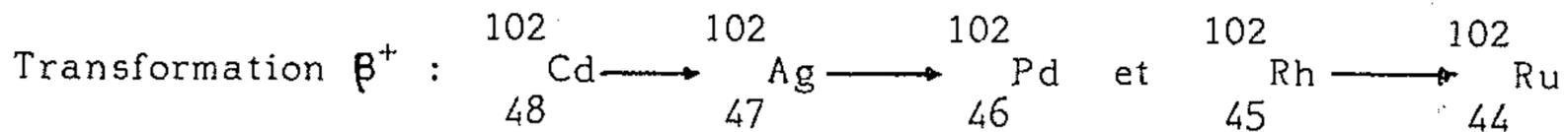
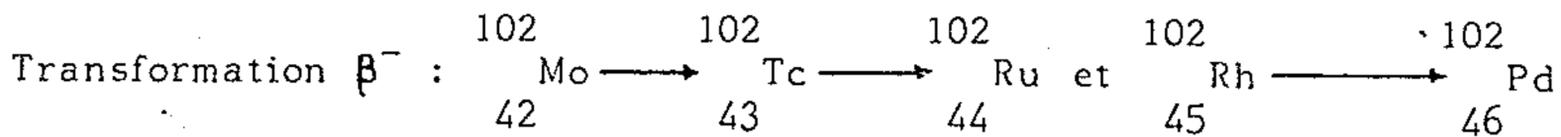


Fig. 3.



3°) Fission spontanée - Condition de stabilité dynamique :

On dit qu'il y a fission lorsqu'un noyau lourd se fragmente en deux ou plusieurs morceaux. Une fission spontanée est une réaction nucléaire sans apport d'énergie extérieure.

Lorsque le nombre masse A est élevé (noyaux lourds) le "volume" du noyau augmente et par suite il peut subir facilement des déformations (à la manière d'une goutte de mercure par exemple...). Nous considérons ici le cas d'une fission symétrique, c'est à dire la fragmentation en deux morceaux de même masse (cas le plus simple). Supposons qu'à un instant donné, le noyau cesse d'être sphérique pour prendre la forme d'un ellipsoïde allongé (Fig. 4).

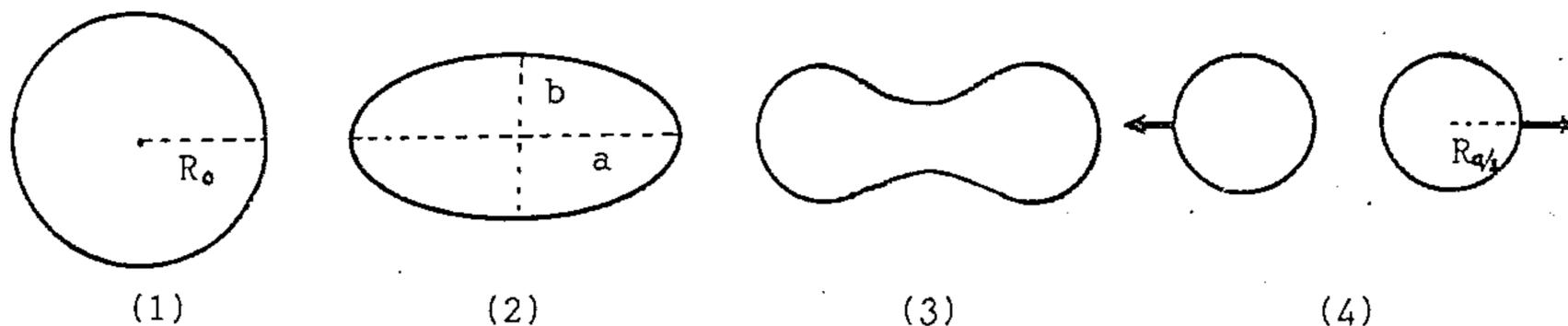


Fig. 4 : Déformation du noyau, lors de la fission symétrique.

En moyenne, les charges s'éloignent les unes des autres. Par suite, l'énergie électrostatique diminue. Par contre, la surface augmente et l'énergie superficielle croît. Si la variation de l'énergie superficielle est plus grande que celle de l'énergie électrostatique, le noyau reprend sa forme initiale après une série d'oscillations. Le noyau est stable.

Dans le cas contraire, il se forme un étranglement, puis une fragmentation en deux morceaux qui se repoussent sous l'action des charges électriques de même signe.

Soit a et b les demi grand - axe et petit - axe de l'ellipsoïde, Le volume doit rester constant, on peut donc écrire :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a b^2 \implies R^3 = a b^2$$

Posons :

$$\begin{cases} a = R(1 + \xi) \\ b = \frac{R}{(1 + \xi)^{1/2}} \end{cases} \quad \text{avec } \xi \ll 1$$

Dans le modèle de la goutte liquide, l'énergie superficielle est donnée par :

$$E'_s = -a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \xi^2 + \dots\right) \approx E_s \left(1 + \frac{2}{5} \xi^2\right)$$

L'énergie électrostatique est donnée par :

$$E'_c = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{\xi^2}{5} - \dots\right) \approx E_c \left(1 - \frac{\xi^2}{5}\right)$$

$E_s$  et  $E_c$  sont des énergies correspondant à la sphère; les variations dues à la déformation sont :

$$\Delta E_s = \frac{2}{5} a_s \xi^2 A^{2/3} \quad \text{et} \quad \Delta E_c = \frac{1}{5} a_c \xi^2 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

La condition de stabilité est  $\Delta E_s > \Delta E_c$ , soit :

$$\frac{Z^2}{A^{1/3}} a_c < 2 a_s A^{2/3}$$

$$\boxed{\frac{Z^2}{A} < \frac{2 a_s}{a_c} = 44,5}$$

La quantité  $Z^2/A$  s'appelle paramètre de fission d'un noyau considéré. La condition de stabilité permet de comprendre pourquoi il n'existe pas à l'état naturel des noyaux ayant  $Z^2/A > 44,5$  (Fig. 5).

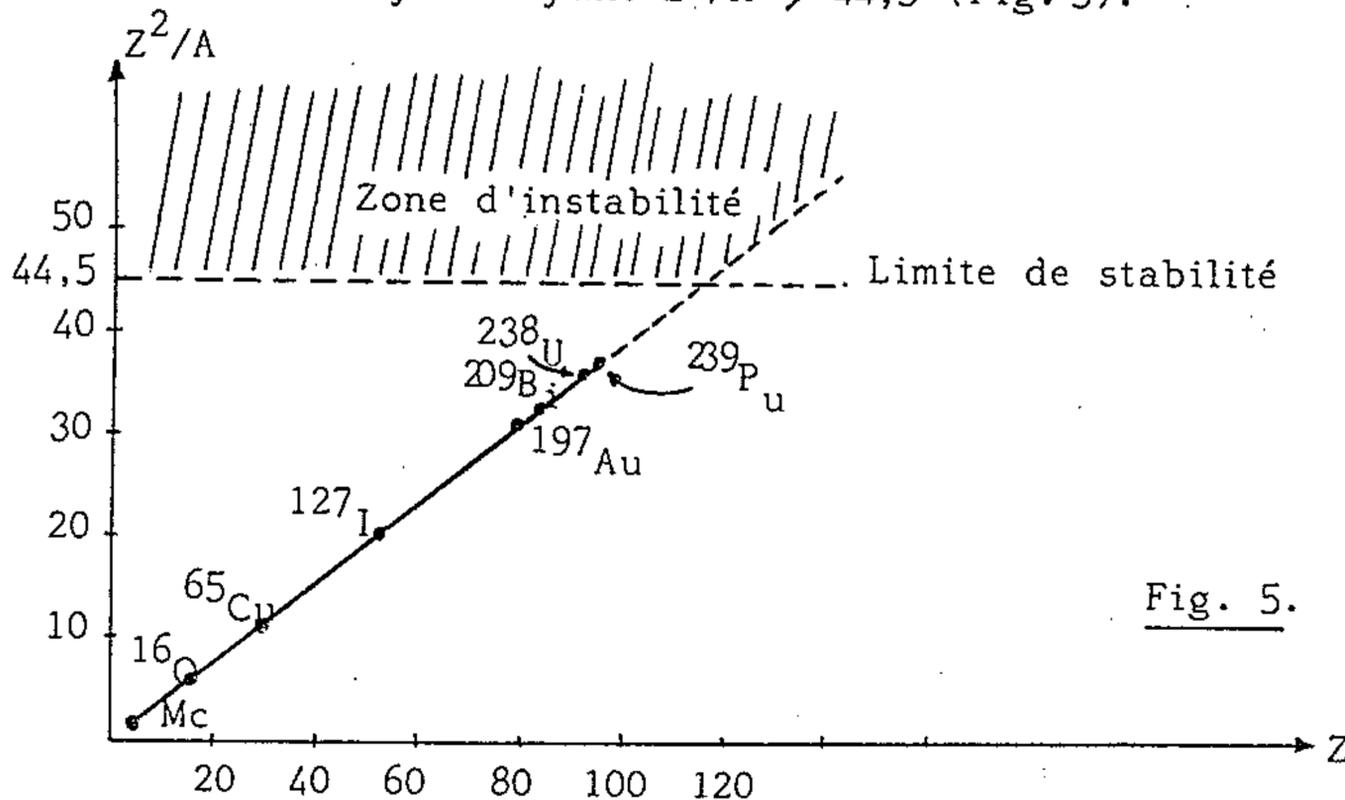


Fig. 5.

#### IV - Insuffisances du modèle de la goutte liquide :

Le modèle de Von Weizsäcker interprète de façon simple les instabilités nucléaires (radioactivité  $\beta$ , fission) et même de prévoir les quantités d'énergie dégagées lors des réactions nucléaires. Il rend bien compte en général des propriétés globales du noyau. A aucun moment nous n'avons vu apparaître dans le modèle le moindre caractère quantique. Or de nombreuses expériences ont fait apparaître les propriétés de stabilité régulières des noyaux en fonction du nombre de nucléons qu'ils contiennent. C'est ainsi que les noyaux ayant 2, 8, 20, 50, 82, 126, ... nucléons de même espèce (protons ou neutrons) sont particulièrement stables. Ces nombres sont qualifiés de magiques. Ils jouent le même rôle que le nombre d'électrons de la couche périphérique des atomes des gaz rares. En particulier, le plomb  $^{208}_{82}\text{Pb}$ , contenant 82 protons et 126 neutrons, est doublement magique. C'est le noyau lourd le plus stable. Dans l'écorce terrestre, les noyaux "magiques" sont plus abondants que leurs voisins. L'existence des nombres magiques suggère que les nucléons doivent se placer en "couches" de la même façon que les électrons dans un atome.

#### V - Modèle des couches :

Dans ce modèle, on suppose que les nucléons se répartissent suivant des "niveaux d'énergie" ou en "couches", un peu à la manière des électrons dans l'atome.

Il s'agit d'un modèle à particules indépendantes, contrairement au modèle de la goutte liquide où les nucléons sont en forte interaction avec leurs voisins immédiats.

Chaque nucléon peut se mouvoir dans un potentiel défini par l'action des autres nucléons sur celui-ci. Ainsi ce modèle fait apparaître des moments angulaires, la parité de plusieurs niveaux d'énergie fondamentaux. Les résultats sont obtenus à partir de l'équation de Schrödinger radiale (cas de l'oscillateur harmonique, du puits de potentiel rectangulaire..)

Ce modèle permet de comprendre certaines particularités de l'abondance des isotopes, des isotones, en particulier les nombres magiques décrits précédemment. Ainsi il permet d'expliquer pourquoi certains noyaux artificiels  $^{17}_{8}\text{O}$ ,  $^{87}_{36}\text{Kr}$ ,  $^{137}_{54}\text{Xe}$  qui ont respectivement (8+1), (50+1), (82+1) neutrons, sont susceptibles d'émettre spontanément des neutrons, alors qu'aucun d'eux n'émet de protons.

On peut encore citer d'autres modèles tels que le modèle optique, le modèle du gaz de Fermi, les modèles à agglomérats (modèle de Wheeler) mais aucun de ces modèles n'est parfait, puisque jusqu'à lors on n'a identifié que près de 500 noyaux sur les 8 000 noyaux qui peuvent se former,

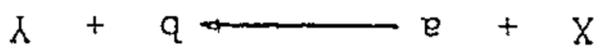
c'est à dire qu'il reste beaucoup à faire. A l'heure actuelle, la physique du noyau n'est pas encore sortie de l'ère des modèles, ce qui prouve l'insuffisance de nos connaissances dans ce domaine.

GENERALITES SUR LES REACTIONS NUCLEAIRES

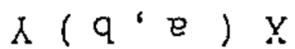
I - Définitions :

Pour effectuer une réaction nucléaire, on bombarde des "noyaux cibles" X par des particules incidentes, qui sont généralement des particules légères telles que les protons, neutrons, électrons, hélions (particules  $\alpha$ :  ${}^4\text{He}$ ) etc..

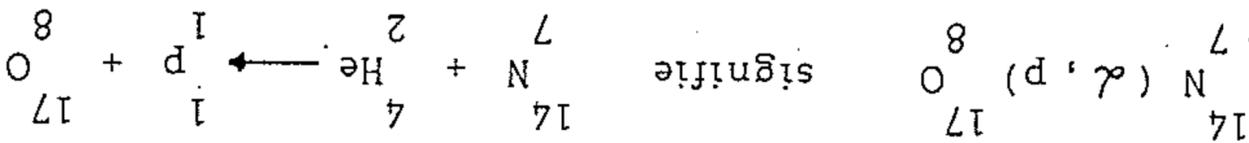
Soit a la particule incidente, de nombreuses réactions nucléaires se traduisent par le bilan :



Y désigne un noyau lourd et b un autre noyau plus léger (proton, neutron). Par convention, on notera cette réaction :



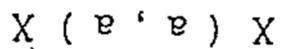
Exemple :



Cette réaction fut la première réaction nucléaire réalisée en 1929 par

Rutherford en bombardant les noyaux d'azote avec des particules  $\alpha$  provenant de la désintégration d'un radionuclide naturel.

Lorsque le noyau cible reste identique à lui-même après le bombardement, ainsi que la particule incidente, on dit qu'il y a diffusion et la réaction s'écrit :



Notons que la définition d'une réaction nucléaire ci-dessus couvre la réaction de désintégration du type :



II - Energie mise en jeu dans une réaction nucléaire :

L'énergie totale d'une particule est  $E = W + mc^2$ .

W étant son énergie cinétique et m sa masse au repos.

Considérons la réaction  $X (a, b) Y$ . La conservation de l'énergie

s'écrit :

$$E_a + E_x = E_y + E_b$$

Soit :  $W_a + m_a c^2 + W_x + m_x c^2 = W_y + m_y c^2 + W_b + m_b c^2$

Ce qui donne immédiatement :

$$\boxed{Q = (m_a + m_x) c^2 - (m_y + m_b) c^2 = (W_a + W_x) - (W_y + W_b)} \quad (1)$$

Deux cas sont à considérer :

- a)  $Q$  positif : La réaction fournit de l'énergie au milieu extérieur. On dit que la réaction est exoénergétique.
- b)  $Q$  négatif : La réaction absorbe l'énergie des particules incidentes. On dit qu'elle est endoénergétique.

Remarque :

La définition de  $Q$  ci-dessus suppose que les nucléides mis en jeu soient à l'état fondamental. Quand X ou Y est dans un état excité sa masse est supérieure à celle au repos (leur énergie étant plus grande à l'état excité qu'à l'état fondamental). Il faut alors en tenir compte dans le calcul de la conservation de l'énergie.

III - Section efficace :

1°) Définition :

Considérons une cible de surface  $S$ , d'épaisseur  $dx$  contenant  $n$  noyaux par unité de volume. La cible contient donc  $n S dx$  noyaux. Envoyons sur cette cible  $N$  particules par seconde normalement à la surface  $S$ . A la sortie de la cible, il ne reste que  $N'$  particules.

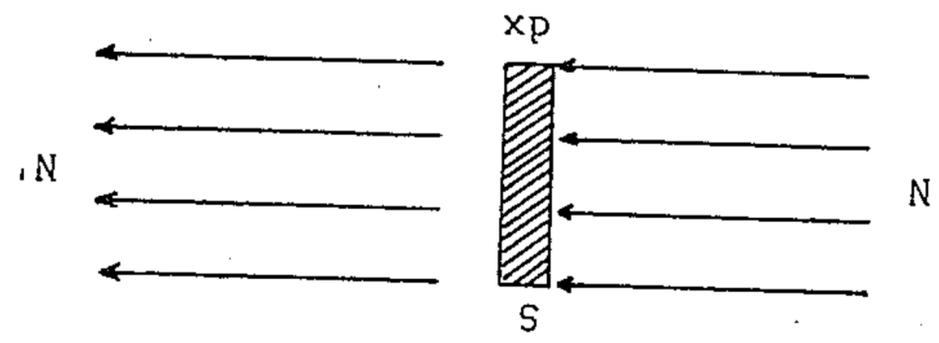


Fig. 1.

On pose  $dN = N - N'$  la variation de  $N$  lors de la traversée de la cible. Cette grandeur est proportionnelle au nombre de particules incidentes  $N$  et à la probabilité  $\sigma$  de réaction entre les particules incidentes et les noyaux cibles. En effet, on a par définition :

$$\sigma = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{dN}{N n S dx}$$

D'où  $dN = \sigma N n S dx = -\sigma N n dx$  avec  $\sigma = -\int S$

Par définition,  $\sigma$  est la section efficace de la réaction considérée. Elle

a la dimension d'une surface et on l'exprime en Barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>.

$$\sigma = - \frac{dN}{N} \cdot \frac{N}{n dx} \quad (2)$$

2°) Résonances. Noyau composé :

Soit  $W_a$  l'énergie cinétique des particules incidentes. L'expérience montre que la section efficace dépend de  $W_a$ . La courbe donnant  $\sigma = f(W_a)$  est appelée "courbe d'excitation". Son allure est en général complexe. Pour un grand nombre de réactions, elle présente des maxima correspondant à des valeurs bien déterminées de  $W_a$ . Ces maxima sont appelés résonances de la cible. Pour interpréter ces résonances, on admet que la réaction passe par un noyau intermédiaire instable  $Z^*$  suivant le schéma :  $a + x \rightarrow Z^* \rightarrow y + b$ .

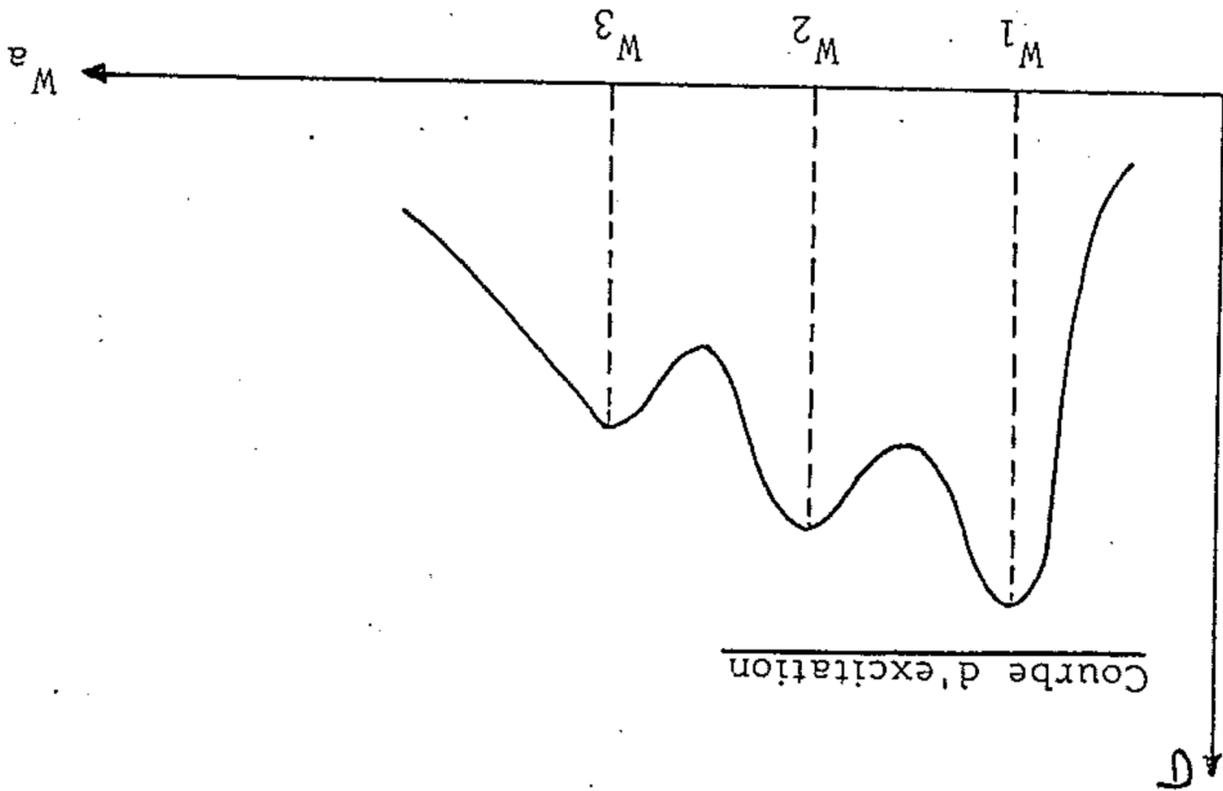
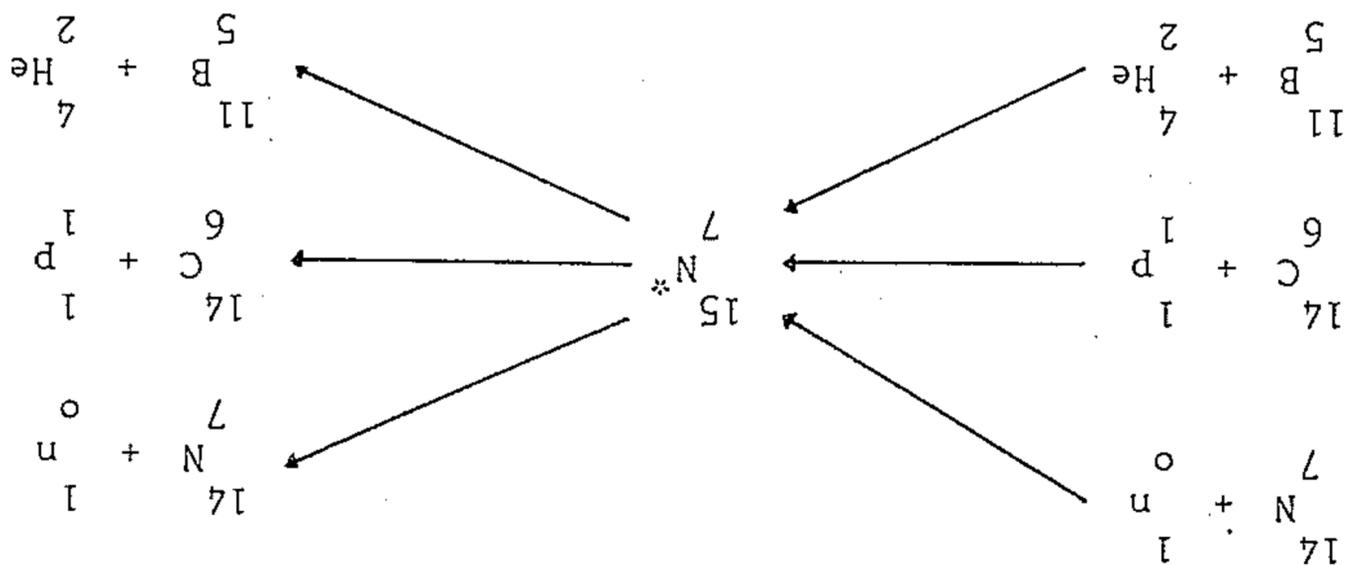


Fig. 3.

Z est dans un état excité. Or les états d'énergie d'un noyau sont quantifiés, ce qui explique les valeurs  $W_1, W_2, \dots$ . On dit que Z est un noyau composé.

Un même noyau composé peut être formé par des voies différentes. Nous donnons ici l'exemple du noyau composé  $^{15}_7N^*$  qui apparaît, avec des énergies et des spins différents, dans neuf réactions dont trois sont des diffusions élastiques :



3°) Parcours moyen :

L'intensité du faisceau incident est proportionnelle au nombre de particules N. De sorte que l'on a :

$$\frac{dI}{dN} = -\lambda N$$

Par suite :

$$I(x) = I_0 e^{-\lambda x}$$

La longueur moyenne de parcours est :

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty x I(x) dx}{\int_0^\infty I(x) dx} = \frac{1}{\bar{x}} \quad (3)$$

Soit  $I(x) = I_0 e^{-x/\lambda}$ . Le parcours moyen apparait comme le par-

cours au bout duquel l'intensité est réduite dans le rapport  $1/e$  ( $x = \lambda$ ).

IV - Seuil d'une réaction endoénergétique :

Dans le calcul du Q de la réaction, nous avons appliqué la

conservation de l'énergie, avant et après la réaction. Nous allons considérer maintenant la conservation de la quantité de mouvement (Fig. 3)

On supposera pour simplifier que X est initialement au repos.

Dans ces conditions on peut écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} m_a v_a &= m_y v_y \cos \varphi + m_b v_b \cos \theta && \text{(projection suivant Ox)} \\ 0 &= m_y v_y \sin \varphi + m_b v_b \sin \theta && \text{(projection suivant Oy)} \end{aligned} \right.$$

Par élimination de  $\varphi$ , on trouve :

$$m_y^2 v^2 = m_a^2 v_a^2 + m_b^2 v_b^2 - 2 m_a m_b v_a v_b \cos \theta$$

En appelant l'énergie cinétique  $W_a = \frac{1}{2} m_a v_a^2$  ,  $W_y = \frac{1}{2} m_y v_y^2$

$$m_y W_y = m_a W_a + m_b W_b + 2 \cos \theta (m_a m_b W_a W_b)^{1/2} \quad (4)$$

Pour  $W_x = 0$  , la relation (1) devient :

$$Q = W_y + W_b - W_a$$

En tenant compte de (4) , on trouve :

$$Q = W_b \left(1 + \frac{m_b}{m_y}\right) - W_a \left(1 - \frac{m_a}{m_b}\right) - \frac{2 \cos \theta}{m_y} \sqrt{m_a m_b W_a W_b} \quad (5)$$

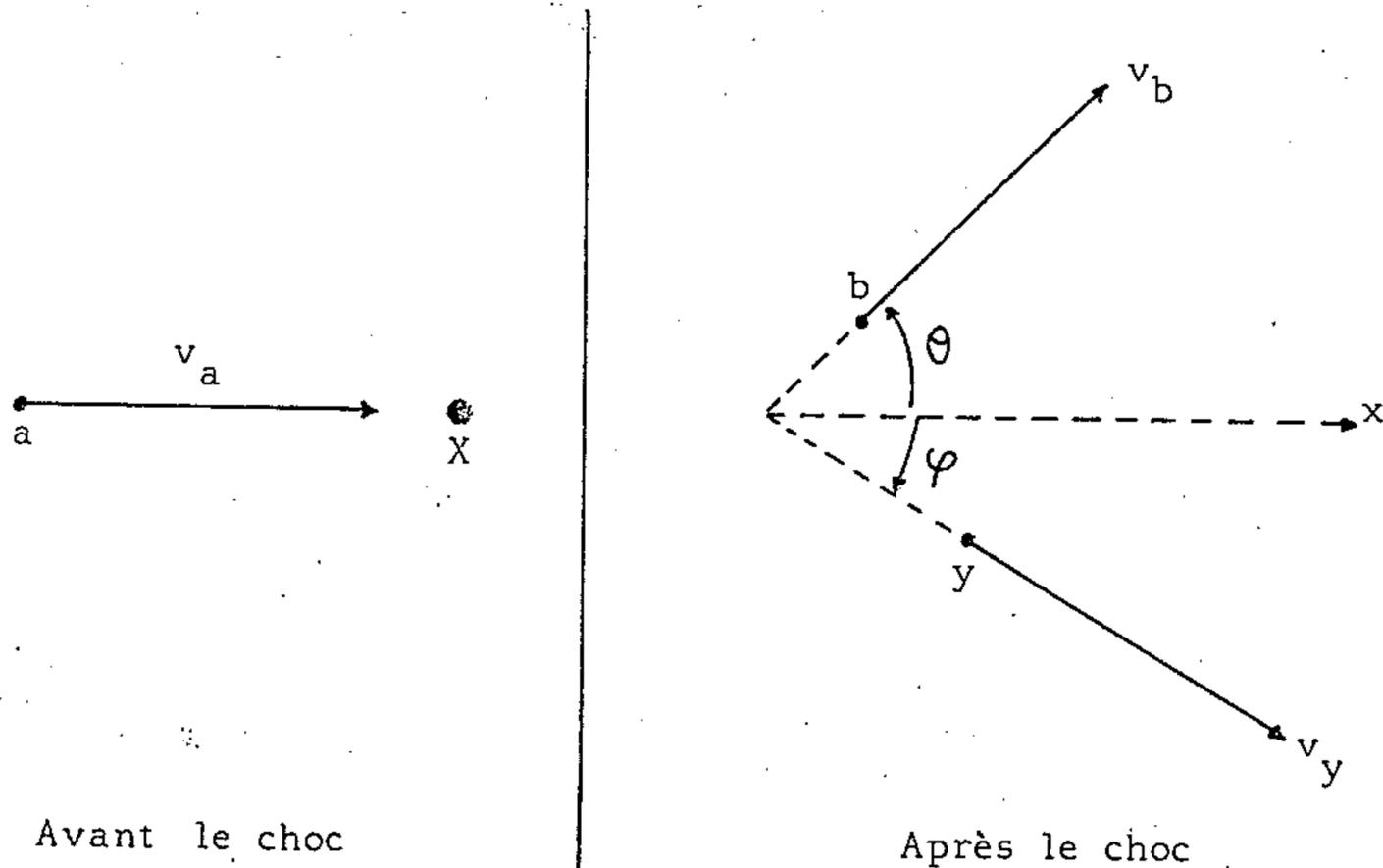


Fig. 3.

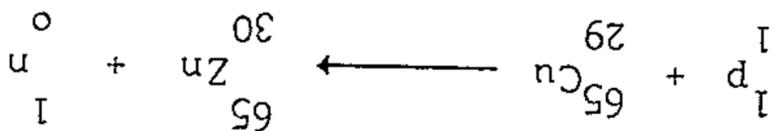
Ainsi donc on peut calculer le  $Q$  de la réaction en mesurant la vitesse des particules  $a$  et  $b$  ainsi que l'angle  $\theta$  . Dans la pratique, l'inconnue est souvent  $m_y$  . Pour la déterminer, on combine (5) et (1).

Lorsque  $Q < 0$  , la réaction est endoénergétique. Elle ne peut avoir lieu que si la particule incidente  $a$  a une énergie suffisante et telle que la valeur  $W_b \geq 0$  . La valeur minimale de  $W_a$  est le seuil de la réaction. Elle correspond à  $W_b = 0$  , soit :

$$(W_a)_{\text{seuil}} = |Q| \frac{m_y}{m_y - m_a} \quad (6)$$

La mesure de  $(W_a)_{seuil}$  permet également de calculer  $Q$ .

Exemple :



L'expérience donne  $(W_a)_{seuil} = 2,166 \text{ MeV}$ , on déduit immédiatement

$$Q = - 2,13 \text{ MeV.}$$

V - Instabilité dynamique :

Elle correspond, dans le cas le plus simple, au partage du noyau A en deux "fragments" B et C qui se séparent par suite de la répulsion coulombienne.

Si on trace la courbe donnant l'énergie potentielle  $U(r)$  du système en fonction de la distance  $r$  séparant B et C, on peut distinguer trois cas (Fig. 4) :

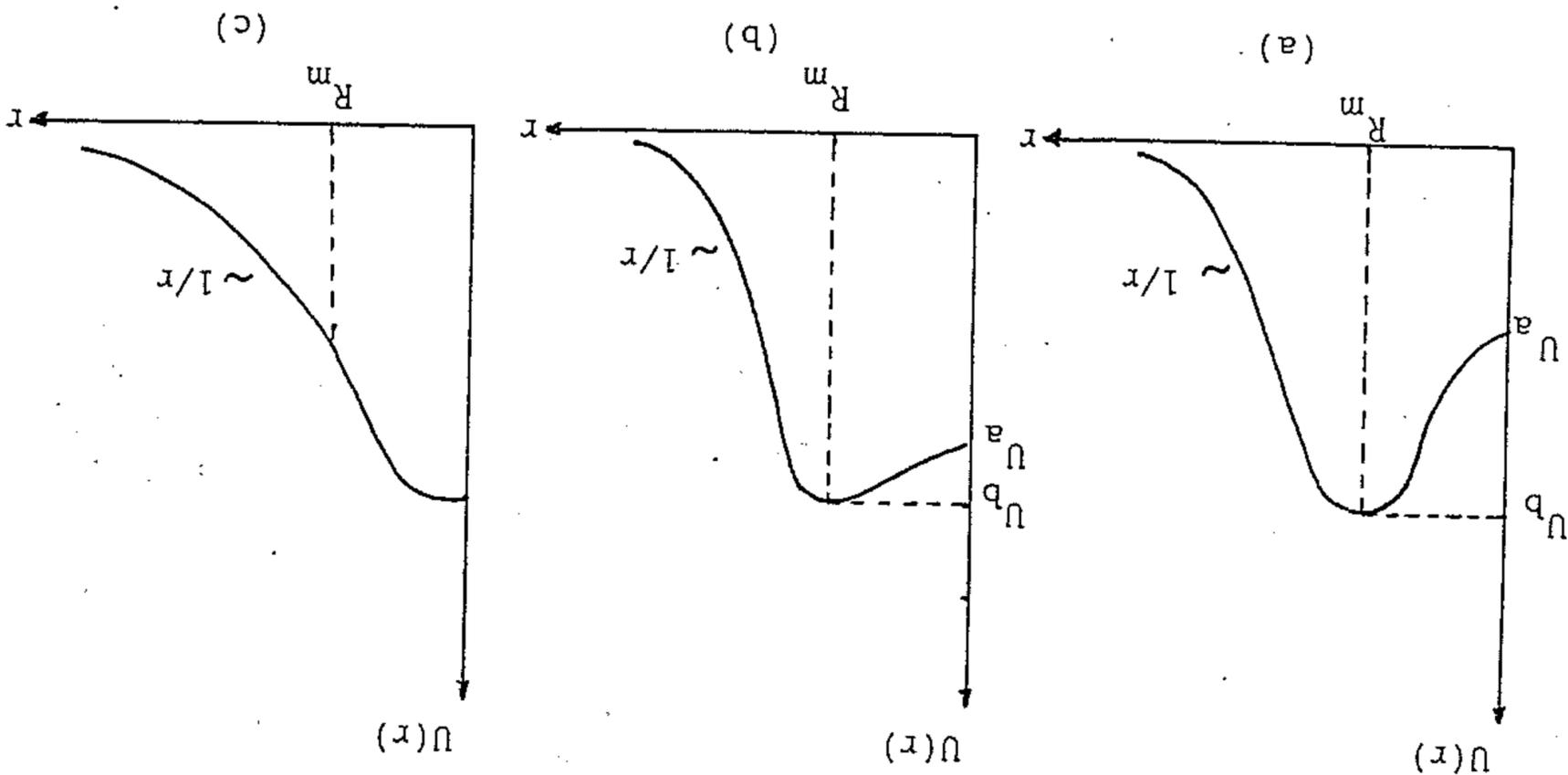


Fig. 4.

a) Lorsque les noyaux B et C se touchent, les forces nucléaires commencent à s'exercer et, dans le cas où elles sont suffisamment intenses, pour  $r < R_m$  l'énergie potentielle va décroître (Fig. 3 a)

Il se forme un "puits de potentiel", le noyau constitué par l'ensemble B + C est stable vis à vis de la fission  $A \rightarrow B + C$

b) Les forces nucléaires sont moins intenses : la "profondeur" du puits de potentiel est faible. Le noyau formé par B et C est instable.

c) Pour  $r < R_m$ , l'énergie potentielle continue à croître, les noyaux B et C ne peuvent pas fusionner. Ils se repoussent.

Dans les deux premiers cas, l'existence d'un noyau est liée à celle d'une barrière de potentiel. Pour franchir cette barrière, il faut que l'un des fragments B ou C possède au moins une énergie égale à  $U_p - U_a$  caractérisant cette barrière. En mécanique classique, le franchissement de cette barrière par B ou C est inconcevable sans apport d'énergie extérieure. En d'autres termes, la fission spontanée est impossible. Il n'est pas de même pour la mécanique quantique qui prévoit une probabilité faible mais non nulle de traversée. En effet la 4<sup>e</sup> relation de Heisenberg  $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$  stipule la conservation de l'énergie à  $\Delta E$  près. C'est ainsi que la radioactivité  $\alpha$  s'explique par le franchissement spontané de cette barrière de potentiel : c'est l'effet tunnel.

La probabilité de l'effet tunnel est d'autant plus grande que l'un des fragments (B ou C) a une masse plus faible. C'est la raison pour laquelle l'émission d'une particule "légère" ( $\alpha$  par exemple) par un noyau lourd est plus fréquente que sa rupture en deux morceaux équivalents (fission). La désintégration  $\alpha$ , très souvent spontanée chez les noyaux lourds ( $A > 200$ ), peut se comparer dans le modèle de la goutte liquide à l'évaporation des molécules.

THEORIE DE LA DIFFUSION

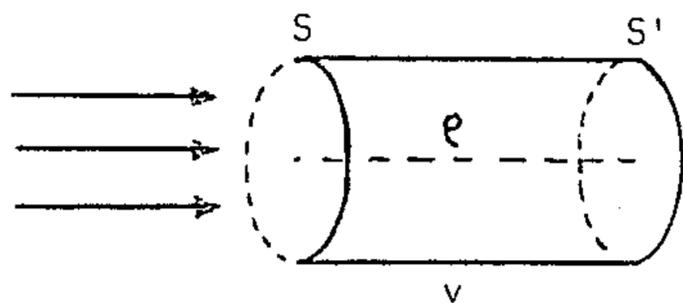
La seule manière d'étudier le potentiel nucléaire est de mettre ensemble les nucléons et d'étudier leurs interactions mutuelles.

Dans la pratique, comme dans l'expérience de Rutherford, on bombarde systématiquement une cible de noyaux par un faisceau de particules nucléaires. Les interactions nucléaires entre les particules incidentes et les noyaux cibles se traduisent par une déviation que l'on peut mesurer.

I - THEORIE CLASSIQUE :

1°) Flux incident :

Considérons un faisceau de particules de densité uniforme  $\rho$ , se déplaçant toutes dans la même direction avec la vitesse  $v$  et frappant normalement une surface  $S$  (fig. 1)



- Fig. 1 -

Soit  $N$  le nombre de particules traversant  $S$  pendant une seconde. Le flux incident à travers la surface  $S$  est par définition la quantité

$F = \frac{N}{S}$  = nombre de particules traversant  $S$  par unité de surface et par unité de temps.

D'après la définition on a  $N = \rho S v$  ( $S v$  = volume limité par  $S$  et  $S'$ )

Par suite :

$$F = \rho v$$

(1)

$F$  a pour dimension  $L^{-2} \cdot T^{-1}$

2°) Section efficace différentielle :

Prenons l'origine des coordonnées sur la cible, et l'axe des z dans la direction du faisceau (fig. 2). Considérons l'angle solide élémentaire  $d\Omega(\theta, \varphi)$  de sommet O orienté dans la direction  $\theta$  et  $\varphi$  (fig. 2).

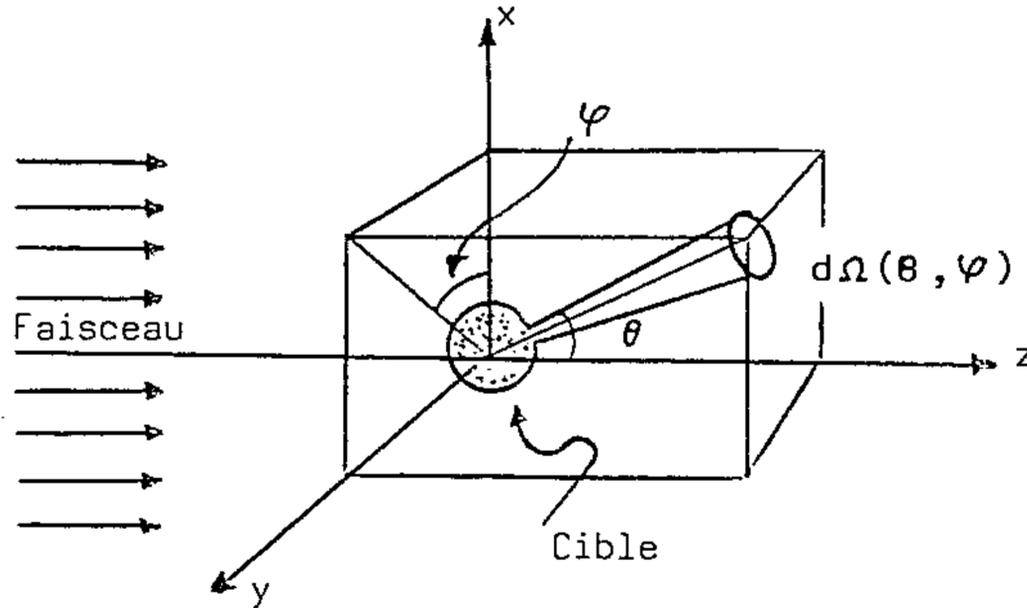


Fig. 2 - Pour décrire la diffusion, on utilise les coordonnées sphériques usuelles. On place l'origine sur la cible et l'axe Oz le long du faisceau.

Soit  $\frac{dN'}{dt}(\theta, \varphi)$  le nombre de particules déviées dans la direction  $\theta$  et  $\varphi$  et contenues dans l'angle solide  $d\Omega(\theta, \varphi)$  par unité de temps pour un flux F donné. Le nombre de particules contenues dans  $d\Omega$  par unité de flux et par unité de temps est :

$$dn' = \frac{dN'(\theta, \varphi) / dt}{F}$$

Par définition  $\sigma(\theta, \varphi)$  donnée par :

$$\boxed{dn' = \sigma(\theta, \varphi) d\Omega} \quad (2)$$

$\sigma(\theta, \varphi)$  a pour dimensions  $(L^{-2} T^{-1}) \cdot T = L^{-1}$

C'est donc une surface, d'où son nom.

3°) Section efficace totale :

C'est la quantité

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \quad (3)$$

Soit  $\sigma = \int dn'$  = nombre total de particules déviées dans toutes les directions, par unité de flux et par unité de temps. Mais les particules déviées sont précisément celles qui heurtent la cible, et l'unité de flux est une particule par unité d'aire et par unité de temps. De sorte que la section efficace totale est l'aire de la section droite que la cible présente au faisceau.

Comme les rayons nucléaires  $r \approx 10^{-12}$  cm,  $\sigma$  est de l'ordre de  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. On choisira donc comme unité de section efficace le barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. On peut écrire également  $\sigma(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ .

4°) Cas d'une symétrie axiale :

En général, le système présente une symétrie suivant la direction du faisceau incident : la déviation est indépendante de  $\varphi$ .

Soit  $b(\theta)$  et  $b(\theta) + \delta b$  le domaine de variation des paramètres d'impact  $b$  pour des trajectoires subissant des déviations comprises entre  $\theta$  et  $\theta + \delta\theta$ . D'après la fig. 3, l'aire efficace pour produire une déviation dans l'angle solide  $d\Omega(\theta, \varphi)$  est :

$$\sigma(\theta, \varphi) d\Omega(\theta, \varphi) = b(\theta) db d\varphi$$

Comme  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ .

On a :  $\sigma(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta = b(\theta) db$

On voit donc que  $\sigma(\theta, \varphi)$  ne dépend pas de  $\varphi$  comme prévu.

Par suite :

$$\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (4)$$

On a mis la valeur absolue sur la dérivée, parce que  $\sigma(\theta)$  est nécessairement positive.

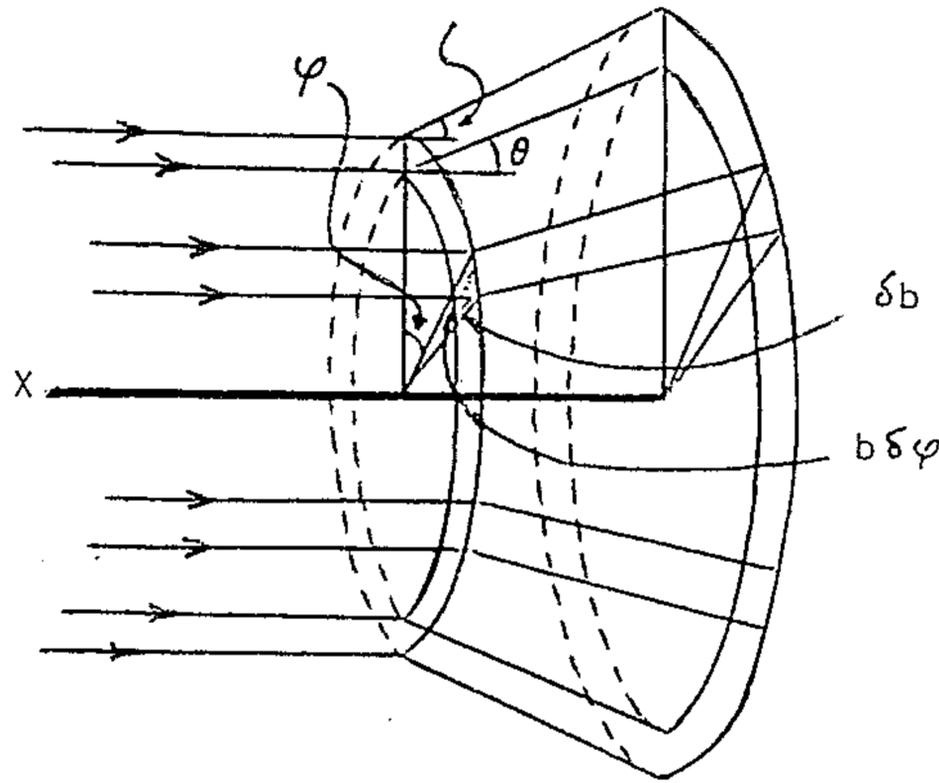


Fig. 3 - La section efficace  $b db d\varphi$  diffuse les particules dans l'angle solide  $d\Omega(\theta, \varphi)$ .

a) Diffusion par des sphères dures :

On considère les noyaux cibles comme des sphères dures de rayon  $a$  (fig.4).

Des considérations géométriques de la fig. 4 donnent immédiatement :

$$b(\theta) = a \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = a \cos \theta/2$$

Donc  $\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{a}{2} \sin \theta/2 .$

La relation (4) donne :  $\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \cdot \frac{a}{2} \sin \theta/2 = \frac{a^2 \sin \theta/2 \cos \theta/2}{2 \sin \theta}$

Par suite :

$$\sigma(\theta) = \frac{a^2}{4} \tag{5}$$

La section efficace totale est :  $\sigma = \int \frac{a^2}{4} d\Omega = \frac{a^2}{4} \int d\Omega$

$$\sigma = \pi a^2 \tag{6}$$

Le résultat (6) est précisément l'aire totale présentée par la sphère dure dans la direction du faisceau. La relation (5) montre que  $\sigma(\theta)$  ne dépend pas de  $\theta$  :

la diffusion est donc isotrope (la même dans toutes les directions) pour toutes les énergies du faisceau.

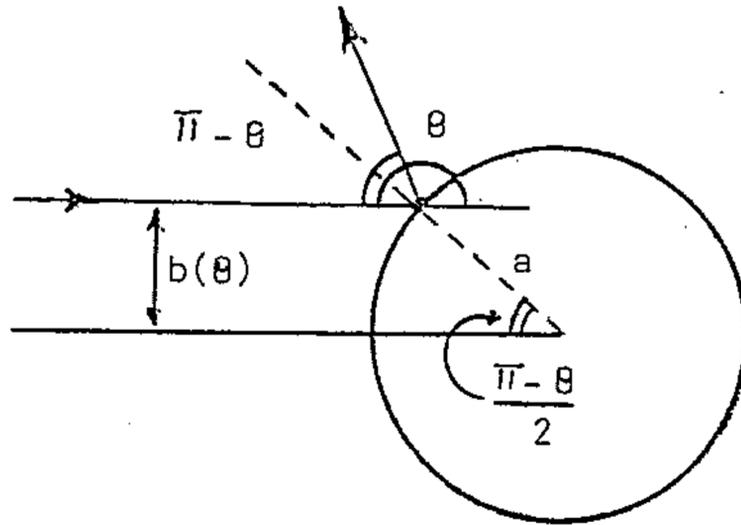


Fig. 4 - Diffusion par une sphère dure de rayon  $a$ .  
La relation entre  $b(\theta)$  et  $\theta$  est mise en évidence.

b) Diffusion Coulombienne :

Soit  $Z_1$  la charge des particules incidentes et  $Z_2$  celle du noyau cible supposé fixe, comme dans l'expérience de Rutherford. On a démontré au Chap. I, rel. 7, que le paramètre d'impact est :

$$b(\theta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m V^2 \theta} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{p^2 \theta} \quad \text{avec } p = m v$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{p^2 \theta^2}$$

Pour  $\theta$  petit,  $\sin \theta \approx \theta$ . On a alors (4):

$$\boxed{J(\theta) = \frac{b(\theta)}{\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{p^2} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}} \quad (7)$$

Contrairement à la diffusion par des sphères dures, les particules diffusées par l'interaction Coulombienne ont un maximum de densité aigu vers l'avant.

Quand  $p$  (ou l'énergie) augmente,  $\theta$  doit décroître pour donner le même  $\sigma(\theta)$  : plus l'énergie augmente et plus le pic de densité vers l'avant est accentué.

Pour la sphère dure, du point de vue quantique, le potentiel d'interaction a la forme de la fig. 5 :

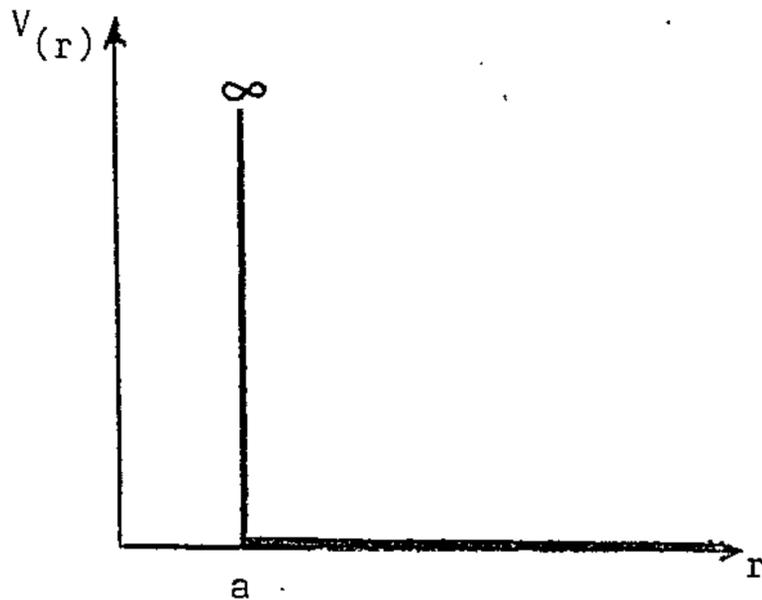
$$\begin{cases} V(r) = 0 & \text{pour } r > 0 \\ V(r) \rightarrow \infty & \text{pour } r = a. \end{cases}$$

Le potentiel croit de manière abrupte, ce qui implique l'intervention soudaine de forces très importantes. C'est un potentiel "dur" ayant pour caractéristique de fournir une diffusion quasi-isotrope à toutes les énergies.

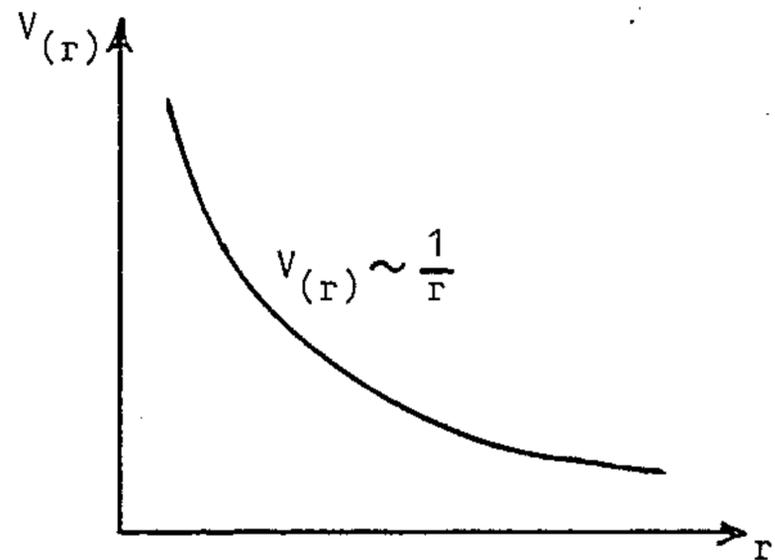
A l'opposé, le potentiel Coulombien  $V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$  est du type "doux" (fig. 6). Pour des valeurs élevées de  $\theta$ , on démontre :

$$\sigma(\theta) = \frac{D^2}{16 \sin^4 \theta/2} \quad \text{avec } D = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_c} \quad (\text{distance minimale d'approche}).$$

C'est la section efficace de Rutherford.



- Fig. 5 -



- Fig. 6 -

II - Théorie quantique :

1°) L'onde diffusée :

La théorie classique que l'on vient de développer est en bon accord avec l'expérience pour des énergies faibles du faisceau incident. Pour des grandes énergies ( $\geq 10$  MeV) seule la théorie quantique peut être appliquée. La notion de particule disparaît, on ne considère que l'énergie du faisceau incident :

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (8)$$

La fonction d'état doit être une fonction propre, solution de l'équation de Schrödinger correspondant à cette énergie. Pour un faisceau à symétrie axiale (ou cylindrique) suivant l'axe des z, à grande distance de la cible, cette solution doit représenter une onde plane (faisceau cylindrique) associée à une onde diffusée qui doit être une onde sphérique divergente.

On pose :  $k = \frac{p}{\hbar}$  (vecteur d'onde). (9)

$$u(r) \sim e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (10)$$

$$\left[ (\text{onde plane}) + (\text{onde diffusée sphérique}) \right]$$

La densité des particules de l'onde plane est :

$$\rho = |e^{ikz}|^2 = 1$$

La vitesse est :  $v = \frac{\hbar k}{m}$  (11)

Par suite le flux  $F = \rho v = v$  (12)

Le nombre de particules diffusées dans le volume compris entre r et r+dr, dans l'angle solide  $d\Omega(\theta, \varphi)$  est :

$$\left| \frac{f(\theta, \varphi) e^{ikr}}{r} \right|^2 \cdot r^2 d\Omega dr = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega dr$$

Le nombre de particules dans  $d\Omega$  par unité de temps est :

$$\left| f(\theta, \varphi) \right|^2 d\Omega \frac{dr}{dt} = \left| f(\theta, \varphi) \right|^2 d\Omega v$$

D'après la définition de la section efficace différentielle, on a :

$$\sigma(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{\left| f(\theta, \varphi) \right|^2 v d\Omega}{F}$$

D'après (12), on a :

$$\boxed{\sigma(\theta, \varphi) = \left| f(\theta, \varphi) \right|^2} \quad (13)$$

La section efficace totale est :

$$\sigma = \int \left| f(\theta, \varphi) \right|^2 d\Omega \quad (14)$$

Ainsi, l'expérience mesure  $\left| f(\theta, \varphi) \right|^2$ . Cela est relié au potentiel d'interaction  $V(r)$ , via l'équation de Schrödinger. A cause de la symétrie du faisceau incident,  $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma(\theta)$  indépendant de  $\varphi$ . Tout revient à obtenir de l'information sur  $V(r)$  à partir d'une étude de  $\left| f(\theta) \right|^2$ .

### 2°) Cas de l'onde S :

En mécanique quantique, la notion de trajectoire des particules disparaît. Néanmoins, on peut considérer le moment cinétique classique par rapport à l'origine :

$$pb = M \approx \hbar l \quad \text{avec} \begin{cases} p = \text{impulsion} \\ b = \text{paramètre d'impact} \\ l = \text{nombre quantique orbital.} \end{cases}$$

Si le rayon de l'interaction est  $R$ , il n'y aura diffusion que si la particule heurte la cible, ce qui impose :

$$b \leq R$$

$$\text{Or } b = \frac{\hbar l}{p} = \frac{l}{k} \implies l < kR$$

Si l'énergie du faisceau est suffisamment faible pour que  $kR < 1$ , il n'y aura diffusion que pour  $l = 0$  (onde S).

La fonction d'état pour l'onde S est :

$$u_k(r, \theta, \varphi) = e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} \quad (15)$$

La composante ayant un moment cinétique  $l = 0$  est donnée par l'intégrale de recouvrement de (15) avec la fonction propre convenable  $Y_0^0(\theta, \varphi)$ . Soit:

$$u_{k,S}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int u_k(r, \theta, \varphi) Y_0^0(\theta, \varphi) d\Omega$$

La normalisation a été choisie pour qu'une fonction d'état soit inchangée dans l'opération :

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

L'intégration sur  $\varphi$  est immédiate, celle sur  $\theta$  se fait par changement de variable  $w = \cos \theta$

$$dw = -\sin \theta d\theta$$

Ce qui donne :

$$u_{k,S}(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ikrw} dw = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \quad (16)$$

$u_{k,S}(r)$  est la superposition de deux ondes sphériques, convergente et divergente.

La fonction d'état, loin de la cible, relative à l'onde S s'écrit d'après (10) :

$$u_S(r) = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} + f \frac{e^{ikr}}{r} \quad (17)$$

(partie  $l=0$  du faisceau) + (partie  $l=0$  de la diffusion).

L'effet du potentiel de diffusion ne peut qu'altérer l'onde divergente, puisque la diffusion se compose entièrement d'ondes divergentes. On doit donc poser :

$$u_S(r) = \frac{S e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \quad (18)$$

Le flux de l'onde convergente est proportionnel à :

$$\left| e^{-i k r} \right|^2 = 1$$

Celui de l'onde divergente  $\left| S e^{i k r} \right|^2 = |S|^2$

Ces deux flux doivent être égaux pour qu'il n'y ait accumulation de densité de probabilité ni à l'infini ni à l'origine. Par suite  $|S|^2 = 1$

On peut exprimer S par  $S = e^{2i\delta_0}$  avec  $\delta_0 = \text{réel}$ .

La relation (18) devient :

$$u_S(r) = \frac{e^{2i\delta_0} e^{i k r} - e^{-i k r}}{2i k r}$$

$$u_S(r) = \frac{e^{i k r} - e^{-i k r}}{2i k r} + \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2i k} \cdot \frac{e^{i k r}}{r} \quad (19)$$

En comparant (19) et (17) on a :

$$f = \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2i k} = \frac{e^{i\delta_0}}{k} \left( \frac{e^{i\delta_0} - e^{-i\delta_0}}{2i} \right)$$

Soit  $f = \left( e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \right) / k$

La section efficace différentielle  $\sigma(\theta) = |f|^2$  s'écrit :

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}} \quad (20)$$

$\sigma(\theta)$  est indépendant de  $\theta$ , ce qui représente une diffusion isotrope. La section efficace totale est :

$$\boxed{\sigma_S = \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{k^2} = \pi \left( \frac{2 \sin \delta_0}{k} \right)^2} \quad (21)$$

Ainsi la quantité  $\frac{2 \sin \delta_0}{k}$  apparaît comme le rayon efficace de la cible.

Comme  $\sigma_S \leq \frac{4\pi}{k^2}$ , la limite supérieure pour la diffusion de l'onde S, pour k donné (une énergie donnée), est donc  $4\pi / k^2$ .

3°) Calcul de  $\delta_0$  dans le cas des sphères dures :

L'équation de Schrödinger radiale s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \quad , \text{ avec } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (22)$$

La solution doit être de la forme (19) et, de plus, doit satisfaire à la condition aux limites pour la sphère dure, c'est à dire :

$$u_S(a) = 0 \quad , \text{ ce qui entraîne } \delta_0 = -ka$$

La section efficace totale (21) devient :

$$\sigma_S = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 ka$$

Soit :

$$\sigma_S \approx 4\pi a^2$$

Le calcul quantique donne une valeur 4 fois plus grande que celle obtenue par voie classique.

4°) Signification physique de  $\delta$  :

Loin du diffuseur le potentiel  $V(r) \equiv 0$ , l'équation de Schrödinger radiale est :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \quad (23)$$

La solution générale est :

$$u = A \sin (kr + \delta_0) \quad (24)$$

A et  $\delta_0$  sont des constantes qui doivent être déterminées par la solution de l'équation de Schrödinger  $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) u = 0$  où  $V(r)$  est fini.

Dans (23)  $\delta_0$  apparait comme le déphasage de l'onde S.

En effet, s'il n'y avait aucun potentiel, l'équation (23) serait partout l'équation de Schrödinger correcte, même pour  $r = 0$ . L'équation (24) serait la solution correcte. Mais puisque  $u(0) = 0$ , on doit poser  $\delta_0 = 0$ , ce qui entraîne  $u = A \sin kr$  (25)

Evidemment  $\nabla = 0$ , car en dehors du diffuseur il ne peut y avoir de diffusion. Le déphasage  $\delta_0$  est par conséquent le déplacement en phase de la fonction d'onde lorsque le potentiel est établi (fig. 7).

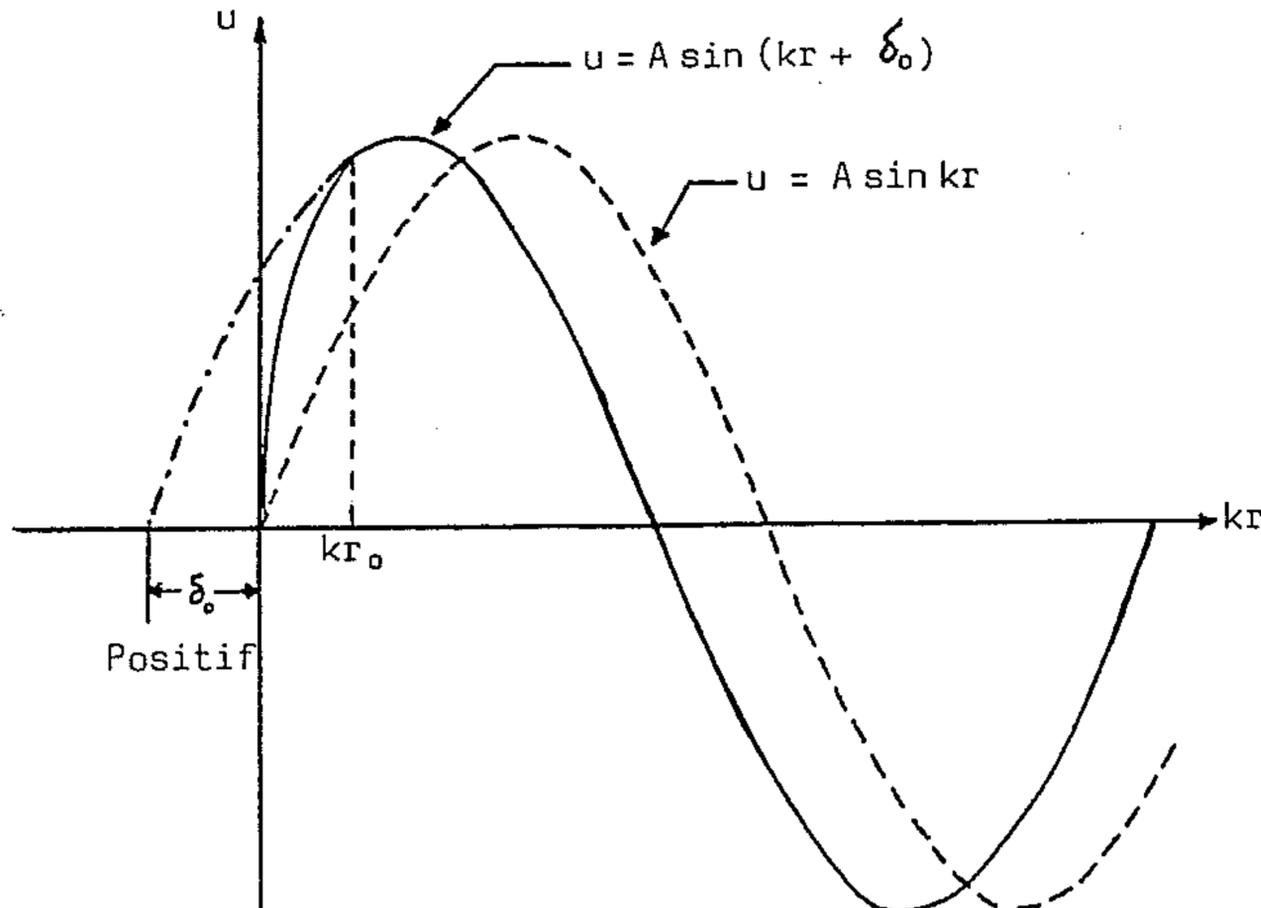


Fig. 7 - Définition du déphasage. Hors de tout potentiel, la fonction d'onde sera de la forme  $u = A \sin kr$ . La présence d'un potentiel  $V(r)$  altère la fonction d'onde :  $u = A \sin(kr + \delta_0)$  loin du diffuseur, où  $V(r) = 0$ . Pour un potentiel attractif, la fonction d'onde est entrante et  $\delta_0$  est positif.