5. Systèmes linéaires

5.1 Introduction

On considère le système linéaire, qui comporte m équation et n inconnues:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

ce système s'écrit sou forme matricielle: $Ax = b$, avec A une matrice à coeffcients $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x, b \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Pour une matrice carrée ($n = m$), ce système admet une solution unique lorsque le déterminant de A est non nul, ce que nous supposerons dans la suite. Remarquons que la résolution de ce système par la méthode de **Cramer** est impraticable lorsque n est 'grand', car elle nécessite approximativement $n!n^2$ opérations arithmétiques élémentaires. Pour cette raison, des méthodes numériques ont été développées. Elles sont dites **directes** si elles fournissent la solution exacte, en un nombre fini d'opérations élémentaires, mais avec une accumulation d'erreurs d'arrondis.

Par conséquent, pour des matrices de dimension importante, il est préférable d'utiliser des méthodes **indirectes (itératives)** basées sur la construction d'une suite convergente vers la solution du système.

O.henaoui

Numériquement, la difficulté de la résolution d'un système linéaire est due à la sensibilité de la solution au perturbation des coefficients a_{ij} ou des des seconds membres.

5.2 Méthodes directes

5.2.1 Méthode d'élimination de Gauss sans changement de pivot

Comme les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre, l'objectif de cette méthode est de transformer un système linéaire quelconque en un système triangulaire. Il suffit d'utiliser des opérations élémentaires pour introuduire des zéros sous la diagonale de la matrice A et obtenir ainsi un système triangulaire supérieur.

Algorithme

1ère étape: triangularisation.

Pour $k = 1 : n-1$

pour $i = k+1 : n$

pour $j = k+1 : n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$

fin

fin

pour $i = k+1 : n$

pour $j = 1 : k$

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0$$

fin

fin

fin

2ème étape: résolution

$$x_n = b_i^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

pour $i = n-1 : 1$

$$x_i = \left(b_i^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} x_j \right) / a_{ii}^{(n)}$$

fin

Exemple 5.1 : Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O.henaoui

La première étape consiste à éliminer les coefficients non nuls sous-diagonaux de la première colonne. Pour cela, on divise la première ligne par $a_{11} = 2$ (appelé premier pivot) et on retranche la première ligne aux autres lignes de la matrice.

$$\begin{array}{cccc|cl}
\boxed{2} & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\
1 & -1 & 2 & -1 & -8 & L_2 \leftarrow L_2 - (1/2)\, L_1 \\
1 & -2 & 1 & 0 & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - (1/2)\, L_1 \\
1 & -1 & 4 & 3 & 4 & L_4 \leftarrow L_4 - (1/2)\, L_1
\end{array}$$

En effectuant les opérations indiquées, on obtient

$$\begin{array}{cccc|cl}
2 & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\
0 & \boxed{-1/2} & 1/2 & 1/2 & 2 & L_2 \\
0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 8 & L_3 \leftarrow L_3 - (+3) L_2 \\
0 & -1/2 & 5/2 & 9/2 & 14 & L_4 \leftarrow L_4 - (+1) L_2
\end{array}$$

Le pivot vaut $-1/2$ à la deuxième étape. En faisant les opérations indiquées on annule les coefficients sous-diagonaux de la deuxième colonne

$$\begin{array}{cccc|cl}
2 & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\
0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 & L_2 \\
0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 & L_3 \\
0 & 0 & 2 & 4 & 12 & L_4 \leftarrow L_4 - (-1)\, L_3
\end{array}$$

Pour obtenir une matrice triangulaire supérieure, il suffit maintenant d'introduire des zéros sous la diagonale de la troisième colonne. On obtien donc le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Ce système triangulaire, équivalent au système d'origine, est enfin résolu par remontée:

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^t = (-4, -3/2, -1, 7/2)^t$$

O.henaoui

:

5.2.2 Méthode d'élimination de Gauss avec changement de pivot

En pratique, si le pivot à la $k^{ème}$ étape ($k = \overline{1, n-1}$) de l'élimination est nul, l'algorithme n'est plus applicable. Pour cela on peut choisir:

Pivot partiel: un des éléments $a_{ik}^{(k)}(i = \overline{k, n})$ de la $k^{ème}$ colonne situés sous la diagonale vérifiant

$$\left|a_{ik}^{(k)}\right| = \max_{k \leq p \leq n} \left|a_{pk}^{(k)}\right|$$

et on permute les lignes i et p.

Pivot total: un des éléments $a_{ij}^{(k)}$ (avec $i, j = \overline{k, n}$) vérifiant

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \max_{k \leq p, q \leq n} \left|a_{pq}^{(k)}\right|$$

et on permute alors à la fois les lignes et les colonnes.

▪ **Remarque 5.1** : Si le pivot est très petit, l'algorithme conduit à des erreurs d'arrondi importantes qui peuvent donner des solutions fausses. Pour augmenter la précision des calculs, même dans le cas où le pivot est non nul, il faut choisir le plus grand pivot en valeur absolue.

Exemple 5.2 : Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O.henaoui

Le pivot de la première étape est 2

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{2} & -2 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -8 & L_2 \leftarrow L_2 - (1/2)\,L_1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - (1/2)\,L_1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 & L_4 \leftarrow L_4 - (1/2)\,L_1 \end{array}$$

En effectuant les opérations indiquées, on obtient

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 0 & \boxed{0} & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 3/2 & 8 \\ 0 & 0 & 5/2 & 9/2 & 14 \end{array}$$

Ici l'algorithme est interrompue car le nouveau pivot vaut 0, mais on peut choisir un pivot partiel et interchanger deux lignes (la ligne 2 et la ligne 3).

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1/2 & 3/2 & 8 & L_2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - (0)L_2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 9/2 & 14 & L_4 \leftarrow L_4 - (0)L_2 \end{array}$$

On remarque qu'il y a que des zéros sous le nouveau pivot et donc on passe à la colonne suivante.

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 0 & -1 & -1/2 & 3/2 & 8 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & 1/2 & 2 & L_3 \\ 0 & 0 & 5/2 & 9/2 & 14 & L_4 \leftarrow L_4 - (5)L_3 \end{array}$$

En effectuant cette dernière opération, on obtient donc le système triangulaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La remontée triangulaire donne la solution: $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^t = (-16, -6, 2, 2)^t$.

O.henaoui

5.2.3 Factorisation LU

Dans cette section, nous montrons que la méthode de Gauss sans changement de pivot (les pivots sont tous non nuls) est équivalente à la factorisation de la matrice A sous la forme d'un produit de deux matrices, $A = LU$, avec L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure obtenue par la méthode de Gauss. Cette décomposition est unique.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

telles que $l_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ pour $k = \overline{1,n}$ et $i = \overline{k+1,n}$

Les matrices L et U ne dépendant que de A (et non du second membre), la même factorisation peut être réutilisée quand on résout plusieurs systèmes linèaires ayant la même matrice A mais des seconds membres b différents. En effet, il suffit de conserver les deux matrices L et U et ramener la résolution de chaque système à celle de deux systèmes triangulaires:

$$Ly = b \quad \text{puis} \quad Ux = y$$

La décomposition LU est aussi utile pour le calcul du determinant de la matrice A. Puisque L et U sont deux matrice triangulaire et L n'a que des 1 sur sa diagonale alors $\det(L) = 1$. Donc

$$\det(A) = \det(U) = u_{11} \times \cdots \times u_{nn}.$$

Exemple 5.3 : Revenons à l'Exemple 1.2

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } \det(A_1) = 8.$$

Cette décomposition exige que les pivots soient non nuls. Dans le cas contraire, voir l'exemple 1.2,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } \det(A_2) = 2.$$

O.henaoui

On remarque que la première matrice L du terme de droite n'est pas triangulaire inférieure. Cela est dû au fait que l'on a permuté deux lignes. De plus

$$\det(A) = (-1)^m u_{11} \times \cdots \times u_{nn}.$$

où m est le nombre de fois où on a interverti deux lignes.

▪ **Remarque 5.2** :Nous avons mentionné que la décomposition LU est une méthode directe, c'est-à-dire que l'on peut prévoir le nombre exact d'opérations arithmétiques nécessaire pour résoudre un système d'équations. Le nombre d'opérations de la factorisation LU est de l'ordre $n^3/3$ et les remontée et descente triangulaires nécessitent un nombre d'ordre n^2. Il est important de mentionner que la méthode de Cramer coûte plus cher (le nombre d'opérations est d'ordre $n!$) que la méthode de Gauss ou la factorisation LU.

5.2.4 Factorisation de Cholesky

Cette méthode ne s'applique qu'aux matrices définies positives. Rappelons la définition suivante.

Définition 5.1 :
Une matrice A est dite symétrique si $A = A^t$.
Une matrice A est dite définie positive si $x^t A, x > 0 \forall x \neq 0$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.1 : Si A est une matrice symetrique définie positive, il existe une et une seule matrice triangulaire inférieure à valeurs diagonales positives notée L telle que

$$A = LL^t.$$

Evidemment, cette matrice L n'est pas la même que celle obtenue lors de la décomposition LU.
Donc pour résoudre un système linéaire $Ax = b$ où la matrice A est symétrique définie positive, on fait la décomposition de Cholesky $A = LL^t$ et on résout successivement $Ly = b$ puis $L^t x = y$.

O.henaoui

Algorithme

pour $i = 1 : n$

pour $j = 1 : n$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$l_{ji} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{ii}$$

fin

fin

Exemple 5.4 : La décomposition de Choleski de la matrice symétrique définie positive:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 18 & -18 & 0 \\ 0 & -18 & 44 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} l_{11} = \sqrt{a_{11}} & & & \\ l_{21} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}} & l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} & & \\ l_{31} = \dfrac{a_{13}}{l_{11}} & l_{32} = \dfrac{(a_{23} - l_{21} l_{31})}{l_{22}} & l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} & \\ l_{41} = \dfrac{a_{14}}{l_{11}} & l_{42} = \dfrac{(a_{24} - l_{21} l_{41})}{l_{22}} & l_{43} = \dfrac{(a_{34} - l_{31} l_{41} - l_{32} l_{42})}{l_{33}} & l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} \end{array}$$

On trouve

$$\begin{array}{llll} l_{11} = 1 & & & \\ l_{21} = -3 & l_{22} = 3 & & \\ l_{31} = 0 & l_{32} = -6 & l_{33} = 2\sqrt{2} & \\ l_{41} = 0 & l_{42} = 0 & l_{43} = -2\sqrt{2} & l_{44} = 2\sqrt{2} \end{array}$$

On retrouve bien que les termes sous la racines doivent être positifs.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 18 & -18 & 0 \\ 0 & -18 & 44 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$