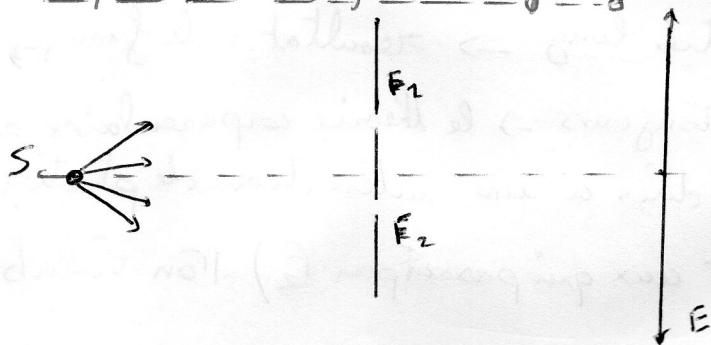


La description des particule en Mécanique Quantique

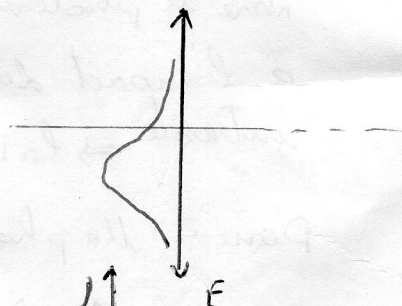
I: La description probabiliste des systèmes quantiques

Expérience de fentes d'Young.

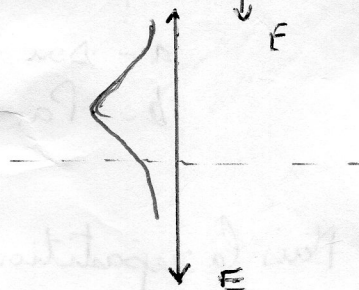


* S: source lumineuse monochromatique puissante *

si F_1 est bouché et F_2 ouverte:
on observe sur E une figure de diffraction



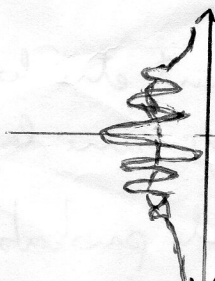
si F_2 est bouché et F_1 ouverte:



variation de l'intensité de la lumière.

si F_1 et F_2 ouverte on observe une figure d'interférence formée par de frange alternativement briante et obscures.

Ce phénomène d'interférence Expliqué par la théorie ondulatoire classique de la lumière.



$$I(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$$

$$I(x) \propto |E_1(x) + E_2(x)|^2 \rightarrow \text{l'éclairement de } E \text{ en 1 pt } x \text{ est}$$

proportionnel au carré de l'amplitude de champ électrique résultant en ce point

($E(x)$ représente l'amplitude de l'onde en pt x)

* S: source lumineuse de très faible intensité

photons - émis un à un (pour éviter l'interaction entre photons)
sur la plaque photo. E \Rightarrow

- temps de pose très long \Rightarrow résultat: les franges d'interférence existe toujours \Rightarrow la théorie corpusculaire admettant que les franges sont dues à une interaction de photons (ceux qui passent par F_1 et ceux qui passent par F_2) **Non valable.**

- temps de pose suffisamment court pour recevoir un petit nombre de photons \rightarrow résultat: figure formée de pts correspondant à l'impact des photons, pas la figure d'interférence de faible intensité \Rightarrow la théorie ^{localisée} ondulatoire non valable

Ponc: Un photon émis par S \rightarrow impossible de prévoir

a - son impact sur E

b - Par quelle fente il est passé.

1) Mais la répartition d'un grand nombre de photons sur un écran E est connue. La probabilité pour qu'un photon frappe E en x est proportionnelle à $I(x)$, i.e. à $|E_1(x) + E_2(x)|^2$

2) Si on met un détecteur derrière F_1 ou F_2 \rightarrow Figure d'interférence est détruite.

\Rightarrow Le photon ne peut être localisé que lors de l'émission et à la réception sa trajectoire entre la source et le récepteur est indéterminée
photon \rightarrow particule probabiliste.

Conclusion :

• Le carré de l'amplitude de l'onde $|\xi(\vec{r}, t)|^2$ est proportionnelle à la probabilité de présence d'un photon au pt \vec{r} à l'instant t .

• La physique du monde microscopique ne peut être décrite que dans un cadre statistique ou probabiliste.

Les m^êm^es conclusions ont été obtenues en utilisant un faisceau électronique au lieu d'une source de lumière.

II : Fonction d'onde d'une particule quantique.

1. Nous associons maintenant à une particule une quantité $\Psi(\vec{r}, t)$ que nous appelons fonction d'onde. Cette notion de fonction d'onde pour rapprocher des observations expérimentales qui nous ont montré la dualité - onde corpuscule.

II.1. Caractéristique de la fct d'onde.

• Cette fct d'onde n'est pas une grandeur physique et n'a pas une signification en soi.

• Elle est définie en tout pt de l'espace à l'instant t , ayant une certaine extension spatiale.

• Cette fct ne permet pas d'attribuer à la particule quantique une position précise.

• Quand on effectue une mesure de sa position à l'instant t , on pourra seulement définir la probabilité de trouver la particule localisée dans une certaine région de l'espace.

• Si un événement (comme pour les 2 fentes de Young) peut se produire de deux façons différentes et qu'on ne sait pas laquelle alors

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad \text{principe de superposition.}$$

cette fct est solution de l'eq dite de Schrödinger
(nous allons le détailler dans le chapitre III)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi$$

à une dimension

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V \Psi(x)$$

II.2 Densité de probabilité de présence

La probabilité de trouver la particule à un instant t dans un élément de volume $dV = d^3\vec{r} = dx dy dz$ autour d'un pt $\vec{r}(x, y, z)$ est liée à la fonction d'onde par la relation suivante.

$$dP(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r}$$

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ représente la densité de probabilité de présence $\rho(\vec{r}, t)$ en \vec{r} et $\Psi(\vec{r}, t)$ est l'amplitude de probabilité que la particule se trouve en \vec{r} .

La probabilité totale pour trouver la particule n'importe où dans l'espace à l'instant t égal 1.

$$\int_{\text{tout l'espace}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = \int \Psi(\vec{r}, t) \Psi^*(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = 1 \quad (*)$$

$\Rightarrow \Psi$ doit être donc de carré sommable (i.e. $\int |\Psi|^2 d^3\vec{r}$ converge)

\rightarrow la condition $*$ est la condition de normalisation.

\rightarrow la probabilité de trouver la particule entre 2 pts a et b est donnée par:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx = \int_a^b |\Psi(x)|^2 dx$$

II 3 : Onde plane et paquet d'onde.

Nous avons à choisir entre deux types de fonction d'onde

- onde plane monochromatique et le paquet d'onde

1. Onde plane monochromatique :

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

à une dimension

ou Ψ_0 est l'amplitude d'onde plane.

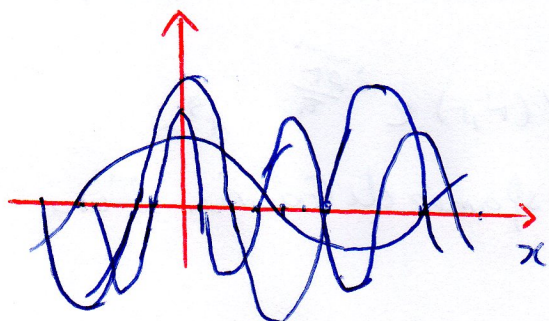
v_p sa vitesse de phase $v_p = \frac{\omega}{k}$

Cette fonction est illimitée dans l'espace

⇒ La particule n'est pas localisée en un point de l'espace
(car $\int |\Psi|^2 dx$ diverge)

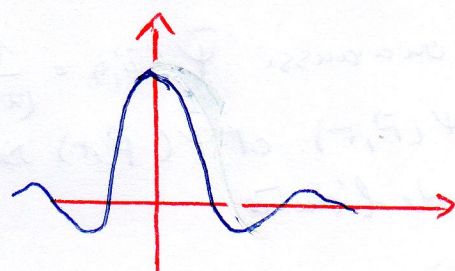
C'est une représentation simpliste des choses.

2. Le paquet d'onde : formé par la superposition dans l'espace d'un nombre d'ondes monochromatique. Chaque onde à une vitesse de phase qui lui est propre. Il n'a pas donc une longueur d'onde bien définie. Toutes les ondes qui le composent sont seulement centrées sur une longueur de base λ_0 .



superposition

⇒



paquet d'onde

Le paquet d'onde se déplace avec une vitesse de groupe v_g qui est la vitesse de déplacement du sommet du paquet

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

utilisant les relations de de Broglie

$$E = \hbar \omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\text{on a aussi } E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \hbar \omega = \frac{p^2}{2m}$$

$$\text{donc: } \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$\text{d'où: } v_{gr} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m}$$

La fonction d'onde résultante $\Psi(x,t)$ est une superposition linéaire d'ondes planes qui interfèrent destructivement en dehors d'une région localisée de l'espace.

Cette superposition d'ondes planes peut être de carré sommable

→ représentation de Fourier de paquet d'onde à 3 dimensions

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi \hbar)^{3/2}} \int \bar{\Psi}(\vec{p}) e^{i\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} - \omega t\right)} d^3 p$$

$$\text{avec } \omega = \frac{p^2}{2m\hbar}$$

si $\bar{\Psi}(\vec{p})$ est de carré sommable alors $\Psi(\vec{r}, t)$ aussi $\forall t$

$$\bar{\Psi}(\vec{p}, t) = \Psi(\vec{p}) e^{i\omega t}$$

$$\text{on a aussi } \bar{\Psi}(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi \hbar)^{3/2}} \int \Psi(\vec{r}, t) e^{-i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} d^3 r$$

$\Psi(\vec{r}, t)$ et $\bar{\Psi}(\vec{p}, t)$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre

à une dimension :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(p) e^{i\left(\frac{px}{\hbar} - \omega t\right)} dp$$

à $t=0$

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} dp$$

(voir le rappel mathématique)

III Valeur moyenne et Ecart quadratique moyen.

Considérons un système d'une particule quantique dans les conditions spécifiées,

Imaginons de faire N copies identiques du système et de mesurer les positions des particules : nous obtenons.

$$n_1 x_1, n_2 x_2, \dots, n_n x_n \quad \text{avec} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_n = N$$

n_i particule de la position x_i

La valeur moyenne de la position :

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} x_i = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot x_i$$

avec $\frac{n_i}{N}$ et la probabilité de trouver x_i : $P(x_i) = \frac{n_i}{N}$

pour $N \rightarrow \infty$ et x continue $\sum \rightarrow \int$
 $P(x_i) \rightarrow \rho(x) dx$

donc pour des variable continue la valeur moyenne

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx \quad \text{c.à.d.} \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x)|^2 dx$$

de même pour si on veut mesurer la quantité de mouvement

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p \rho(p) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} p |\tilde{\Psi}(p)|^2 dp$$

La moyenne des carré de la position et la quantité de mouvement.

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 |\Psi(x)|^2 dx$$

$$\text{et} \quad \langle p^2 \rangle = \int p^2 |\tilde{\Psi}(p)|^2 dp$$

on définit les variances des position et de l'impulsion par

$$\text{Varianse de } x: \quad \text{var } x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\text{var } p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

qui représente la mesure de la dispersion des valeurs des positions (ou impulsion) d'un système quantique.

et en fin l'écart quadratique moyen (ou l'écart type)

qui représente l'incertitude sur une mesure.

$$\Delta x = \sqrt{\text{var } x} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\text{var } p} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

IV: Principe d'incertitude de Heisenberg:

En mécanique classique on peut déterminer $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{p}(t)$ d'un point matériel avec une précision limitée seulement par la possibilité de mesures. D'après l'expérience de Young un photon ne peut être localisé entre la source et l'écran \Rightarrow la notion de trajectoire n'a pas de sens. le résultat est généralisé à toutes les particules microscopiques telle que l'e⁻:

Heisenberg (1925): Il y a une limite théorique à la connaissance simultanée de la position et de la quantité de mouvement.

d'une particule. Si suivant un axe la position est précisée à Δx près et la quantité de mouvement $p_x = m v_x$ à Δp_x près on a: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$

Cette relation se généralise pour les deux autres directions \vec{Oy} et \vec{Oz}

on aura alors les inégalités position-impulsion

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \right\} \text{Inégalités de Heisenberg}$$

relation temps - énergie

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Cette dernière relation propre à la physique microscopique permet d'atteindre la durée de vie d'un phénomène en connaissant sa plage énergétique.