Variables aléatoires à densités

I Généralité

a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r de loi P_X.

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$$

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- f continue sur $\mathbb{R}$ sauf sur un nombre fini de points.
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

f s'appelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, notée d.d.p

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

II Variables aléatoires réelles à densité

1) <u>Définition</u>

On dit que X de loi P_X est à densité s'il existe une d.d.p f sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : P_X(B) = \int_B f(x)\,dx$$

On notera f par f_X

Remarque : 1) $P_X(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$.

2) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

$\forall x \in \mathbb{R} : P(X=x) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(a \leq X \leq a+\varepsilon)$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} f_X(x)\,dx = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0.$

$(X=a)$ n'est pas necessairement vide et pourtant $P(X=a)=0$.

On dira que $(X=a)$ est un evenement negligeable ou un evenement presque sûrement nul.

2- Fonction de répartition

<u>Definition</u>: Soit X une v.a. à d.d.p f_X.

la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = P_X(]-\infty, x]) = P(X \leq x)$

s'appelle fonction de répartition de X, notee f.r

<u>Exemple</u>: Soit X une v.a.r a d.d.p $f_X(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

1) $x < 1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0$

2) $x \geq 1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{x}$

Ainsi $F_X(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

Remarque: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\int_a^b f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a)$

Propriétés

Soit F_X la f.r d'une V.a.r X à d.d.p f_X, elle vérifie

① $F_X(-\infty)=0$; ② $F_X(+\infty)=1$.

③ F_X continue sur $\mathbb{R}$; ④ F_X est non décroissante.

⑤ si f_X est continue en x_0, alors F_X est dérivable en x_0 et $F_X'(x_0)=f_X(x_0)$

⑥ si F_X est dérivable en x_0, alors $F_X'(x_0)=f_X(x_0)$.

3- Espérance - Variance - écart type.

3.1 Définition :

On dit que X admet une espérance mathématique si et seulement si $\int |x| f_X(x)\,dx < +\infty$. le nombre, noté $E(X)$ et défini par $E(X) := \int x f_X(x)\,dx$ s'appelle espérance mathématique de X (ou moyenne de X)

3.2 Exemple (*): soit X à d.d.p $f_X(x)=\frac{2}{x^3}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2}\,dx=2$$

(on remarque $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x}\,dx=+\infty$)

3.3 Définition

On dit que X admet une variance si et seulement si $\int x^2 f_X(x)\,dx < +\infty$. La quantité, notée $Var(X)$, et définie par $Var(X) := \int (x - E(X))^2 f_X(x)\,dx$, s'appelle variance de la v.a. X.

La quantité $\sigma_X := \sqrt{Var(X)}$ est l'écart type de X.

Propriétés

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Remarques

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x|^2 + 1$.

$$\Rightarrow |x| f_X(x) \leq |x|^2 f_X(x) + f_X(x).$$

$$\Rightarrow E|X| \leq E(X^2) + 1.$$

Ainsi si $E(X^2) < +\infty$, alors $E(X)$ existe.

Inversement

$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

si $E(X)$ existe : $(x - E(X))^2 \leq 2(x^2 + (E(X))^2)$.

Ainsi si $Var(X)$ existe, alors $E(X^2) < +\infty$

2. si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et si

$$\int |\varphi(x)| f_X(x)\, dx < +\infty$$

Alors $E(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x)\, dx$.

3. si $X \geq 0$ et $E(X)$ existe, alors

$$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\, dx.$$

4. si $E(X) = 0$, on dira que X est centrée
5. si $Var(X) = 1$, on dira que X est réduite
6. $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$: $E(Y) = 0$ et $Var(Y) = 1$.

III Lois à densités usuelles

1- Loi uniforme

On dit X v.a. à densité, suit une loi uniforme sur $[a,b]$ si et seulement si sa d.d.p f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$

1-1 Propriété : si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \; ; \; Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

et $F_X(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{[b,+\infty[}(x)$

2 - Loi exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si et seulement si sa d.d.p f_X est donnée par $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

2.1 Propriété : si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

et $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

3. Loi gamma de paramètre $a > 0$ et $\lambda > 0$.

On dit que X suit une loi gamma de paramètre : $a > 0$ et $\lambda > 0$ si et seulement si sa d.d.p f_X est donnée par $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

notée $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$.

Remarque 1) Si $a = 1$, alors $\Gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$.

2) $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$

3.1. Propriété

si $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$, alors

$E(X) = \frac{a}{\lambda}$ et $Var(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

4 - Loi normale (ou loi de Gauss) de paramètres m et σ^2

On dit que X suit une loi normale, ou loi gaussienne de paramètre (m, σ^2); notée $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$ si et seulement si sa d.d.p f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

si $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$, la variable aléatoire qui suit une $N(0, 1)$ est dite loi normale centrée et réduite.

La propriete suivante justifie cette appelation

4.1 Propriete si $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$, alors

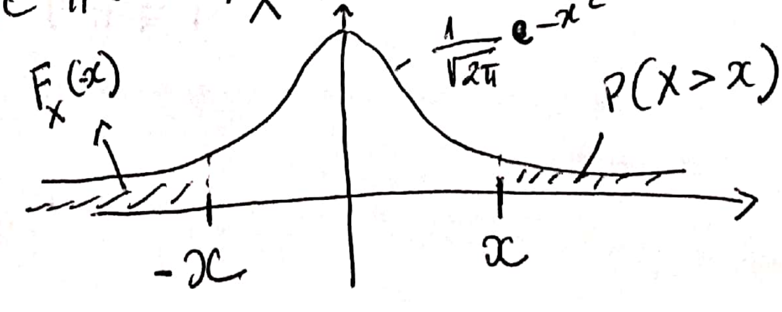
$E(X) = m$ et $Var(X) = \sigma^2$

Remarques (Importantes pour la lecture de la table de loi normale centrée et reduite)

1) si $X \hookrightarrow N(0, 1)$: $F_X(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$

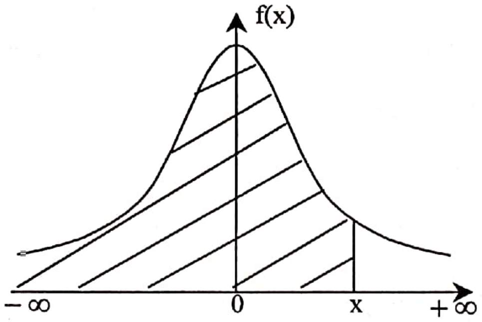
2°) si $x > 0$, alors $F_X(x) > \frac{1}{2}$

3°) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F_X(x) + F_X(-x) = 1$



Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



Exemple : $P(X \leq 1{,}56)$?

$1{,}56 = 1{,}5 + 0{,}06$

	.... 0,06 .....
1,5	.... 0,9406 ....

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

IV Loi d'une fonction (ou transformation) d'une V.a. à densité

Lorsque la V.a. X est discrète, $Y = \phi(X)$ est, elle même discrète et la determination de sa loi, à partir de celle de X, ne présente en general pas de difficultés.

<u>Exemple</u> : supposons que P_X, la loi de X, est donnée par

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$

On pose $Y = X^2$. Ainsi $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$

$P(Y=0) = P(X=0) = \frac{3}{16}$; $P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{6}{16}$

$P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = \frac{5}{16}$; $P(Y=9) = P(X=3) = \frac{2}{16}$

d'où

y_i	0	1	4	9
$P(Y=y_i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$

Par contre, la determination de la loi d'une fonction d'une V.a à densité est un problème plus complexe que dans le cas discret. En particulier, une fonction d'une V. a à densité n'est pas nécessairement une V.a. à d.d.p

<u>Exemple</u> : soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\ )$. Posons $Y = [\lambda X] + 1$ où $[x]$ est la partie entière de x et $\lambda > 0$

Y est une V.a qui prend des valeurs entières non nulles.

Calculons pour $k \in \mathbb{N}^*$ $P(Y=k)$

$$P(Y=k) = P(k-1 \leq \lambda X < k)$$

$$P(Y=k)=P\left(\frac{k-1}{\lambda}\leq X<\frac{k}{\lambda}\right)=\int_{\frac{k-1}{\lambda}}^{k/\lambda} e^{-x}dx$$

$$\Rightarrow P(Y=k)=e^{-\frac{k-1}{\lambda}}-e^{-k/\lambda}$$

posons $q=1-p=e^{-\frac{1}{\lambda}}$ $(0<p<1)$

d'où $P(Y=k)=e^{-\frac{(k-1)}{\lambda}}\left[1-e^{-1/\lambda}\right]$

$$P(Y=k)=p\,q^{k-1}$$

Ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (Y suit une loi géométrique de paramètre p)

Y est une V.a. discrète

Dans ce cas particulier, $Y=\phi(X)$, n'est pas bijective.

<u>Proposition</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X:\Omega\to I$ V.a à densité f_X. Soit $\phi: I\to J$ une bijection strictement monotone et dérivable de I sur J. Alors ϕ admet une réciproque ϕ^{-1} dérivable de J sur I et la V.a $Y=\phi(X)$ admet une densité f_Y donnée par

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\phi^{-1}(y))\,|\phi'(\phi^{-1}(y))| & \text{si } y\in J \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

idée $P(Y\in B)=P(\phi(X)\in B)=P(X\in\phi^{-1}(B))=\int_{\phi^{-1}(B)} f_X(x)dx$

$$=\int_B f(\phi^{-1}(y))\,|(\phi^{-1})'(y)|\,dy$$

Exemples : ① $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \frac{X}{\lambda}$; $\lambda > 0$

$$f_Y(y) = f_X(\lambda y) \cdot \lambda \, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

$$\Rightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

② $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = m + \sigma X$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ $\left(\phi(x) = m + \sigma x ; \ \phi^{-1}(y) = \frac{y-m}{\sigma} \right)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Ainsi $f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y)) \cdot |\phi^{-1}(y)| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$

d'où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Proposition (importante)

1) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \begin{cases} Y = m + \sigma X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \\ \sigma > 0 \end{cases}$

2) inversement

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{Y - m}{|\sigma|} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque :

Dans le cas où $Y = \phi(X)$ et ϕ n'est pas bijective, on cherchera à déterminer

F_Y, la fonction de répartition de la v.a. Y. Cette détermination sera plus ou moins compliqué suivant ϕ.

Exemple : $X \hookrightarrow N(0,1)$. on pose $Y = X^2$

$$\phi(x) = x^2 \;;\; \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \phi(x) = y$$

- pour $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$$

- pour $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow F'_Y(y) = F'_X(\sqrt{y}) - F'_X(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

or f_X est paire $\left(f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \right)$

d'où $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2 f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$

Ainsi $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

Exercices :

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. On pose $Y = -\ln(X)$

Trouver la loi Y

2. Soit X une v.a densité $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

on pose $Y = \dfrac{1}{X}$

Trouver la loi de Y.

3. Soit X une v.a. à densité f_X. On pose $Y = aX + b$

Trouver la loi de Y.

application $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y = 2X + 3$

4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

a) on pose $Y = 5X$. Calculer $E(Y)$ et $Var(Y)$.

b) Déterminer la d.d.p de $W = X^2$

c) Déterminer la d.d.p de $Z = \dfrac{1}{X}$

5. Soit X une v.a.r, de f.r F_X, continue et strictement croissante. On pose $Y = F_X(X)$.

Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$

6. Soit X une v.a à densité $f_X(x) = \dfrac{2}{15} x \mathbb{1}_{[1,4]}(x)$

Déterminer la d.d.p de $Y = (X-2)^2$.