Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

N.Daoudi-Merzagui

Part I

Le lemme de déformation, le théorème du min-max et le théorème du col.

1 Lemme de déformation

Lemma 1 *Soit X un espace de Banach et* $J : X \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle de classe* C^1 *vérifiant la condition de Palais- Smale. Soit* $c \in \mathbb{R}$*,une valeur régulière de J. Alors il existe* $\varepsilon_0 > 0$*, tel que pour tout* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*,il existe* $\eta : X \to X$*, un homéomorhisme satisfaisant:*
i) $\forall u \in \{J \leq c - \varepsilon_0\} \cup \{J \geq c + \varepsilon_0\}, \eta(u) = u$
ii) $\eta(\{J \leq c + \varepsilon_0\}) \subset \{J \leq c - \varepsilon_0\}$
où $\{J \leq c - \varepsilon_0\}$ *note l'ensemble* $\{v \in X, J(v) \leq c - \varepsilon_0\}$ *et* $\{J \geq c + \varepsilon_0\}$ *note l'ensemble* $\{v \in X, J(v) \geq c + \varepsilon_0\}$.

Proof.
la démonstration est présentée dans le cas particulier où X est un espace de Hilbert, ce qui permettra d'identifier X et X' par l'intermediaire du produit scalaire et on confond donc differentielle et gradient.Et, J est supposée de classe C^2.Pour la démonstration sous les conditions énoncées , la notion de pseudo gradient est à considérer, voir Kavian.

———————————

Soit c une valeur régulière de J.
Etape 1 montrons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ tq $\|DJ(u)\|_X \geq \delta$ pour tout $u \in \{c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0\}$ .Pour cela, on raisonne par l'absurde: Supposons le contraire

$$\forall \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists u \in \{c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0\}\, tq\, \|DJ(u)\|_X < \delta$$

En particulier en considérant $\varepsilon_0 = \delta = \frac{1}{n}, \exists u_n \in \left\{c - \frac{1}{n} \leq J \leq c + \frac{1}{n}\right\}$ tq $\|DJ(u_n)\|_X < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Comme J satisfait la condition de Palais -Smale, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$admet une sous suite convergente vers un certain u^*, alors par continuité de J on a,

$$J(u^*) = J\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = c$$

et $\lim\limits_{n\to\infty}\|DJ(u_n)\|_X = 0$ implique $\lim\limits_{n\to\infty} DJ(u_n) = 0$ et par continuité de DJ on obtient $DJ(u^*) = 0$ c.à.d c est une valeur critique de J Ce qui contredit c valeur régulière de J.

Etape 2 Prenons maintenant $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, alors les ensembles

$$\begin{aligned} A &= \{c-\varepsilon \leq J \leq c+\varepsilon\} \\ B &= \{J \leq c-\varepsilon_0\} \cup \{J \geq c+\varepsilon_0\} \end{aligned}$$

sont fermés et disjoints et la fonction

$$\gamma(u) = \frac{d(u,B)}{d(u,A)+d(u,B)}$$

est telle que $0 \leq \gamma(u) \leq 1$ et $\gamma(u) = 0$ si $u \in B$ et$\gamma(u) = 1$ si $u \in A$ de plus la fonction γ est localement lipschitzienne sur X. En effet, soit $u \in X$,

1. si $u \in X \diagdown A$,alors puisque A est fermé, il existe $r > 0$, tq la boule $B(u, 2r) \subset X \diagdown A$ ce qui entraine que pour tout $v \in B(u,r)$,
$d(v,A) + d(v,B) \geq r$

2.si $u \in A$ alors $u \in X \diagdown B$ et le meme raisonnement s'applique. Par suite, pour tout $v, w \in B(u,r)$, on a

$$\begin{aligned} |\gamma(v)-\gamma(w)| &\leq \frac{|d(v,B)-d(w,B)|}{d(v,A)+d(v,B)} + \left|\frac{d(w,B)}{d(v,A)+d(v,B)} - \frac{d(w,B)}{d(w,A)+d(w,B)}\right| \\ &\leq \frac{1}{r}|d(v,B)-d(w,B)| + \frac{1}{r^2}\sup_{B(u,r)} d(w,B)\left[|d(v,B)-d(w,B)| + |d(v,A)-d(w,A)|\right] \\ &\leq \frac{1}{r} + \frac{2(d(u,B)+r)}{r^2}\|v-w\|_X. \end{aligned}$$

car $v \to d(v,B)$ est 1 lipschitzienne.

Etape 3 Considérons maintenant l'application $\Phi : X \to X$ définie par

$$\Phi(u) = -\gamma(u)\frac{DJ(u)}{\max(\|DJ(u)\|_X, \delta)}$$

Φ est localement lipschitzienne (car DJ est C^1) et

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_X &\leq 1, \text{ pour tout u} \\ \Phi(u) &= 0, \text{ pour tout u} \in B \\ \Phi(u) &= -\frac{DJ(u)}{\|DJ(u)\|_X}, \text{ pour tout u} \in A \end{aligned}$$

Par application du théorème de Cauchy-Lipschitz,au problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = \Phi(z) \\ z(0) = u \end{array}\right., \tag{1}$$

(1) admet pour tout $u \in X$, une solution unique $t \to z(t)$ définie sur un intervalle$]t_{min}, t_{max}[$. Comme le second membre est borné, on a en fait $t_{min} = -\infty$ et $t_{max} = +\infty$.
Posons $\eta_t(u) = z(t)$. Le théorème de dépendance continue de la solution d'une EDO par rapport à la donnée initiale montre que η_t est localement lipschitzienne pour tout t. De plus,toujours par Cauchy-Lipschitz, on a la propriété de semi-groupe $\eta_t(\eta_s(u)) = \eta_{t+s}(u)$.Il en découle que η_t est inversible et que son inverse est η_{-t} , qui est aussi localement lipschitzienne. On a ainsi montré que η_t est un homéomorphisme de X sur X pour tout t.
Remarquons que puisque $\Phi(u) = 0$ pour $u \in B$, on a alors $\eta_t(u) = u$ pour tout t .
Pour conclure , on va choisir une valeur de t appropriée.
Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\eta_t(u))}{dt} &= \langle DJ(\eta_t(u)), \frac{d\eta_t(u)}{dt} \rangle = \langle DJ(\eta_t(u), \Phi\left(\eta_t(u)\right)\rangle \\ &= -\gamma\left(u\right) \frac{\left\|DJ(\eta_t(u)\right\|^2}{\max\left(\left\|DJ(\eta_t(u)\right\|_X, \delta\right)} \leq 0 \end{aligned}$$

Alors, J est décroissante le long des trajectoires $\eta_t(u)$.
En particulier, si $u \in \{J \leq c - \varepsilon,\}$ on a $J(\eta_t(u)) \leq c - \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.Or l'ensemble qui nous intéresse peut s'écrire
$\{J \leq c + \varepsilon,\} = \{J \leq c - \varepsilon,\} \cup A$. Il suffit donc de s'intéresser à l'ensemble $\eta_t(A)$.
Soit donc $u \in A$. Comme la fonction $t \to J(\eta_t(u))$ est continue décroissante, il existe un premier instant $t_0 \geq 0$ (dépendant de u) tel que $J(\eta_{t_0}(u) = c - \varepsilon$ (avec $t_0 = +\infty$ si on n'atteint jamais cette valeur). Donc, pour tout t tel que $0 \leq t \leq t_0$, on a $\eta_t(u) \in A$, d'où

$$\frac{dJ(\eta_t(u))}{dt} = -\left\|DJ(\eta_t(u)\right\|_X \leq -\delta$$

Par conséquent, en intégrant cette inégalité, il vient

$$J(\eta_{t_0}(u) - J(u) \leq -\delta t_0$$

d'où

$$t_0 \leq \frac{1}{\delta}\left(J(u) - J(\eta_{t_0}(u)\right) \leq \frac{1}{\delta}\left((c+\varepsilon) - (c-\varepsilon)\right) = \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

En d'autres termes, on a montré que pour $t = \frac{2\varepsilon}{\delta}$,

$$\eta_t(A) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque

1. Dans le cas où X n'est pas un espace de Hilbert, on ne peut pas identifier X'et X et la démonstration, qui a besoin d'un champ de vecteurs dans X comme second membre de l'EDO ne fonctionne pas telle quelle. Même

si X est un espace de Hilbert, mais J est seulement de classe C^1, alors ce second membre n'est pas localement lipschitzien, et on ne peut donc pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans ces deux cas, on remplace dans la démonstration ci-dessus (définition de la fonction Φ) le gradient de J par un pseudo-gradient et pour plus de détails se référer à Kavian pages 164-167.

2. Le lemme de déformation permet donc d'avoir une caractérisation topologique des valeurs régulières exprimée seulement en termes des valeurs prises par la fonctionnelle et non à l'aide de sa différentielle.

Notation 2 $D_c^{\varepsilon_0}$ $=\{\eta$ *homéomorphisme de X satisfaisant i)du lemme*$\}$.

2 Le théorème du min-max

Theorem 3 *Soit* $\mathbb{A}$ *un ensemble de parties de X non vide et*

$$c = \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{u \in A} J(u)$$

On suppose que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c, que $c \in \mathbb{R}$ *et qu'il existe* α *tel que* $\mathbb{A}$ *soit stable par* $D_c^{\varepsilon_0}$ *pour tout* ε_0 *vérifiant* $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha$*,(c'est-à-dire que si* $A \in \mathbb{A}$*, alors* $\eta(A) \in \mathbb{A}$ *pour tout* $\eta \in D_c^{\varepsilon_0}$*).*
Alors c est une valeur critique de J.

Proof.
On raisonne par l'absurde. Supposons que c soit une valeur régulière. On suppose que le paramètre ε_0 du lemme de déformation, est tel que $\varepsilon_0 < \alpha$ et soit ε une valeur associée du lemme de déformation.
Utilisant la caractérisation de la borne inférieure,on a

$$\exists A \in \mathbb{A}, \sup_{u \in A} J(u) \leq c + \varepsilon$$

alors, $A \subset \{J \leq c + \varepsilon\}$ et le lemme de déformation,implique

$$\exists \eta \in D_c^{\varepsilon_0},\ \eta(\{J \leq c + \varepsilon\}) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$$

ce qui entraine $\eta(A) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, et par suite

$$\sup_{u \in \eta(A)} J(u) \leq c - \varepsilon$$

Or, par hypothèse, $\eta(A) \in \mathbb{A}$,ce qui contredit la définition de c borne inférieure.
■

Remark 4 *1) Si J vérifie la condition de Palais-Smale, -J aussi. On a donc un résultat analogue pour*

$$d = \sup_{A \in \mathbb{A}} \inf_{u \in A} J(u)$$

2) Si $\mathbb{A} = \{\{u\}, u \in X\}$*, alors on retrouve le fait qu'une fonctionnelle qui vérifie la condition de Palais-Smale et qui est minorée atteint sa borne inférieure.*

3 Théorème du col

Theorem 5 *Si $J \in C^1(X;\mathbb{R})$ vérifie la condition de Palais-Smale et est telle que*
i) $J(0) = 0$,
ii) $\exists\ R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\|_X = R$ alors $J(u) \geq a$,
iii) $\exists v \in X$, $\|v\|_X > R$, tel que $J(v) < a$.
Alors J admet une valeur critique $c \geq a$.

Proof.
On applique le principe du min-max avec

$$\mathbb{A} = \{\gamma([0,1]); \gamma \in C([0,1];X), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$$

et,

$$\alpha = \frac{1}{2} min\,\{a, a - J(v), \varepsilon_0\} > 0$$

Soit γ un chemin continu reliant 0 à v et $A = \gamma([0,1])$ l'élément de $\mathbb{A}$ qui lui est associé. Comme la fonction $t \to \|\gamma(t)\|_X$ est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s \in [0,1]$ tel que$\|\gamma(s)\|_X = R$. Parconséquent, $\sup\limits_A J(u) > a$, ce qui implique que

$$c = \inf_{A\in\mathbb{A}} \sup_{u\in A} J(u) \geq a$$

D'autre part,$c < +\infty$car l'image d'un chemin est compacte dans X.
Maintenant, soit η un homéomorphisme de D_c^α. Par construction, on a

$$J(0) = 0 \leq a - \alpha \leq c - \alpha$$

et

$$J(v) = a + J(v) - a \leq a - \alpha \leq c - \alpha,$$

donc on a $\eta(0) = 0$ et $\eta(v) = v$ par définition de D_c^α. Par conséquent,

$$\eta o \gamma(0) = 0 \text{ et } \eta o \gamma(1) = v$$

ce qui équivaut à dire que $\eta(A) \in \mathbb{A}$. ∎

Remark 6 *1) Ce théorème s'appelle théorème du col en relation avec une interprètation géographique des conditions i) à iii) dans le cas où $X = \mathbb{R}^2$ et $J(u)$ représentant l'altitude d'un point u. Les conditions i) et ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins a. La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point v situé moins haut que les montagnes. Par conséquent, on peut joindre continûment 0 à v en passant par un col de montagne et la construction du minmax nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*

4 Exemple d'application

Soient, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur Laplacien $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et une fonction $g \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et G sa primitive s'annulant en 0 telle que

i) $g(0) = 0$,

ii) $\underset{s\to 0}{limsup}\frac{g(s)}{s} < \lambda_1$

iii) il existe $\theta > 2$ $R > 0$,tels que $0 \leq \theta G(s) \leq sg(s)$ pour $|s| \geq R$,

iv) $\frac{g(s)}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} \to 0$ quand s$\to \pm\infty$

Considérons le problème de Dirrichlet

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = g(u) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2}$$

La condition $i)$ implique que (2) admet la solution triviale $u = 0$.
Montrons que (2) **admet une autre solution**.
L'approche utilisée est variationnelle: trouver les solutions du problème (2) est ramenée à trouver les points critiques de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega G(u)dx$$

qui est bien définie et de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et dont la différentielle est donnée par

$$DJ(u) = -\Delta u - g(u), \text{ (au sens de } H^{-1}(\Omega))$$

Nous montrons que le théorème du col s'applique ce qui assure l'existence d'une valeur critique c. Et si c est strictement positive, il existe alors au moins un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque $J(0) = 0 < c$.
Pour pouvoir appliquer le théorème du col nous procédons par étapes en montrant des résultats auxiliaires

<u>Résultat1</u>:
l'hypothèse $iv)$ sur g implique:

Si une suite de fonctions mesurables (u_n)qui tend presque partout vers u est telle que $\int\limits_\Omega |u_n|^{\frac{2N}{N+2}} < C$. Alors,

$$g(u_n) \underset{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}{\to} g(u).$$

<u>Démonstration</u> .
Par le théorème d'Egorov, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $mes(\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et (u_n) converge uniformément vers u sur Ω_ε.
Utilisant iv) la définition de limite et la continuité de g on a

$$g(s)| \leq \varepsilon' |s|^{\frac{N-2}{N+2}} + C(\varepsilon')$$

On a:

$$\int\limits_\Omega |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx = \int\limits_{\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx$$

Tout d'abord,sur le complémentaire de Ω_ε , on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx &\leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1} \int\limits_{\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon} \left(|g(u_n)|^{\frac{2N}{N+2}} + |g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} \right) dx \\
&\leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1} \varepsilon'^{\frac{2N}{N+2}} \int\limits_{\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon} \left(|u_n|^{\frac{2N}{N-2}} + |u|^{\frac{2N}{N-2}} \right) dx \\
&\quad + mes(\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon) C^{\frac{2N}{N+2}}(\varepsilon') \\
&\leq 2^{\frac{2N}{N+2}} \varepsilon'^{\frac{2N}{N+2}} C + \varepsilon C^{\frac{2N}{N+2}}(\varepsilon') \qquad (3)
\end{aligned}$$

(remarquez que par le lemme de Fatou,on a

$$\int\limits_{\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon} |\lim_{n \to \infty} u_n|^{\frac{2N}{N-2}} dx = \int\limits_{\Omega \diagdown \Omega_\varepsilon} |u|^{\frac{2N}{N-2}} \leq C.)$$

Dans (3) , *on* choisit d'abord ε' pour rendre le premier terme assez petit, puis ε pour le second terme. Une fois ε fixé, on a par convergence uniforme,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

d'où le résultat

Résultat 2 La fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale.
Démonstration.
Soit un une suite telle que $J(u_n) \to c$ et $DJ(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$.
De iii) et la continuité de G on a

$$\forall s, \quad \theta G(s) \leq sg(s) - Cste$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
\langle DJ(u_n), u_n \rangle &= \int_\Omega (-\Delta u_n - g(u_n))\, u_n dx && (4) \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega g(u_n) u_n dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \theta \int_\Omega G(u_n) dx + Cmes\Omega \\
&= \theta J(u_n) - \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx + Cmes\Omega && (5)
\end{aligned}$$

De $(5)\,, et$ comme $\theta > 2$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx \leq \frac{2\theta}{\theta - 2} J(u_n) + Cmes\Omega - \langle DJ(u_n), u_n \rangle \tag{6a}$$

Des hypothèses sur (u_n) ,$(6a)$ et l'inégalité de Poincaré en déduit que (u_n) est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on peut alors en extraire une sous-suite (toujours notée (u_n)) et trouver un $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que u$_n \rightharpoonup$u dans $H_0^1(\Omega)$ et $u_n \to u$ *p.p.* dans Ω. Maintenant, par l'injection de Sobolev

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx \leq C$$

et, en utilisant le **résultat 1,**

$$g(u_n) \underset{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}{\longrightarrow} g(u).$$

Or l'exposant conjugué de 2^* n'est autre que $\frac{2N}{N+2}$ et comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$,par dualité, il vient $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.
On a obtenu que

$$-\Delta u_n = DJ(u_n) + g(u_n) \to g(u) \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

Rappelons que $(-\Delta)^{-1}$ est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ ce qui montre que

$$u_n \to (-\Delta)^{-1}(g(u)) \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Résultat 3 La fonctionnelle J vérifie les hypothèses du théorème du col.

Démonstration.

On a par définition de J : $J(0) = 0$.

De plus, comme λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$,on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega)$$

Par l'hypothèse ii), il existe $\mu < \lambda_1$ tel que $g(s)/s \leq \mu$ au voisinage de 0.Par ailleurs, au voisinage de l'infini, on a

$$|g(s)| \leq C|s|^{\frac{N+2}{N-2}}$$

On peut donc écrire

$$g(s) \leq \mu s + Cs^{\frac{N+2}{N-2}} \text{pour} s \geq 0$$

et

$$g(s) \geq \mu s - Cs^{\frac{N+2}{N-2}} \text{pour} s \leq 0$$

Dans les deux cas, en intégrant à partir de 0, on obtient

$$G(s) \leq \frac{\mu}{2} s^2 + C|s|^{2^*} \tag{7}$$

Si, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1 - \varepsilon)\lambda_1 - \mu \geq 0$$

alors;utilisant(7) , on peut minorer J au voisinage de 0 par

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \lambda_1 - \frac{\mu}{2} \right) \int_\Omega |u|^2 \, dx - C \int_\Omega |u|^{2^*} \, dx \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour u au voisinage de 0 dans $H_0^1(\Omega)$ et en utilisant l'injection de Sobolev et parce que $2^* > 2$,on obtient:

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\geq cste \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition ii) du théorème du col.

Enfin, soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ fonction propre de -Δ associée à la valeur propre λ_1, $\varphi_1$est considérée normalisée dans $L^2(\Omega)$ et positive .

Pour tout $\zeta > 0$ on a

$$J(\zeta\varphi_1) = \frac{\zeta^2 \lambda_1^2}{2} - \int_\Omega G(\zeta\varphi_1) dx$$

Par iv), g croît sur-linéairement à l'infini, il existe donc $\beta > \lambda_1$ tel que $g(s) \geq \beta s$ pour s assez grand, d'où

$$\forall s \geq 0,\ g(s) \geq \beta s - Cste$$

Par conséquent,

$$\forall s \geq 0,\ G(s) \geq \beta \frac{s^2}{2} - Cste\ s$$

Il s'ensuit que

$$J(\zeta\varphi_1) \leq \frac{\zeta^2\,(\lambda_1 - \beta)}{2} - cste$$

Il existe donc $\zeta > 0$ tel que $J(\zeta\varphi_1) < 0$, c'est-à-dire la condition iii) du théorème du col se trouve vérifiée.

Conclusion 7 *Par application du théorème il existe une valeur critique c.Et c est strictement positive,par suite il existe au moins un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque $J(0) = 0 < c$.*

Remarque Dans cet exemple, comme $\theta > 2$, on dit que G est à croissance sur-quadratique à l'infini et que g est sur-linéaire. L'allure de g est comme suit

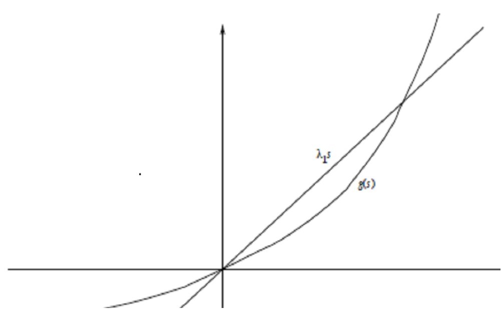

Figure 1: allure de g

Exercice

1. Montrer que si g vérifie les hypothèses i) à iv). Alors
   a) $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, |g(s)| \leq \varepsilon |s|^{\frac{N+2}{N-2}} + C(\varepsilon)$$

   b)$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq R \Longrightarrow C|s|^{\theta} \leq |G(s)| \leq C'|s|^{2^*}$.
   c) $\theta \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$.
   d) $\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq R \Longrightarrow |g(s)| \geq C|s|^{\theta-1}$.

2. Donner un exemple de fonction g.

Part II
Principe du maximum, applications et régularité elliptique

5 Introduction

Le principe du maximum concerne les points de maximum ou de minimum de solutions de certains problèmes aux limites, Il y a en plus deux grands cadres, le cadre dit « fort », (cas de solutions au sens classique), et le cadre dit « faible » (cas de solutions variationnelles).Les principes du maximum sont utiles pour établir des estimations à priori sur d'éventuelles solutions.

Un grand nombre de résultats de régularité, d'unicité ou d'existence de solutions pour des probèmes elliptiques du second ordre peuvent être établis en utilisant le principe du maximum.

6 Principes du maximum

La méthode du principe de Maximum est basée sur l'observation suivante: Si une fonction de classe C^2 atteind son maximum sur un ouvert Ω en un point $x_0 \in \Omega$,alors

$$Du\left(x_0\right) = 0 \text{ et } D^2u\left(x_0\right) \leq 0$$

$D^2u\left(x_0\right) \leq 0$ veut dire que la matrice symetrique $D^2u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)$est définie négative en x_0.

6.1 Le principe du maximum classique

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$, $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1\leq i,j\leq N}$une matice $N \times N$, $b(\cdot) := (b_i(\cdot))_{1\leq i\leq N}$ et un vecteur, et c une fonction, tels que $a_{ij} \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$,et $b_i \in L^{\infty}(\Omega)$; $1 \leq i, j \leq N$. On considère A et L deux opérateurs du second ordre définis par :

$$Au := \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Lu \quad : \quad &= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{ij}(u) + b\cdot\nabla u + cu, &(9)\\ &= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu &(10)\end{aligned}$$

On dit que A est un opérateur du second ordre à partie principale divergentielle.$(Au = \operatorname{div}(a\,(.)\,\nabla u) + cu)$.
Il est à noter que dans l'opérateur L on peut supposer sans perte de généralité que la matrice $a(.)$ est symétrique $a_{ij} = a_{ji}$, car $\partial_{ji}u = \partial_{ij}u$ et :

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{ij}(u) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}\partial_{ji}(u) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\partial_{ij}(u)$$

Il faut noter qu'en général les deux opérateurs A et L sont de natures différentes, et qu'en particulier les propriétés spectrales de l'opérateur A dépendent essentiellement de la symétrie ou non de la matrice $a(\cdot)$.

Pour les solutions faibles, on considère l'opérateur différentiel sous forme divergence,(on peut également rajouter des termes d'ordre un). Si les coefficients de A sont réguliers, alors la forme divergence est semblable à celle de L considéré dans le cas de solutions classiques.

Rappel

1. L'operator $L(respA)$ est dit elliptique sur Ω si la matrice $a(\cdot)$ vérifie la condition de coercivité (ou d'ellipticité) :

$$\begin{aligned} \exists\alpha\,(x) \quad &> \quad 0, \forall\xi \in \mathbb{R}^N; \text{pour presque tout } x \in \Omega \\ a(x)\xi.\xi \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\,(x)\,|\xi|^2 \end{aligned}$$

2. L'operator L est dit strictement elliptique sur Ω, si

$$\begin{aligned} \exists\alpha \quad &> \quad 0, \forall\xi \in \mathbb{R}^N; \text{pour presque tout } x \in \Omega, \\ a(x)\xi.\xi \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \end{aligned}$$

3. L'operator L est dit uniformément elliptique sur Ω,si

$$\begin{aligned}\exists \alpha, \Lambda &> 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N; \text{pour presque tout } x \in \Omega, \\ \Lambda|\xi|^2 &\geq a(x)\xi.\xi = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2\end{aligned}$$

Remark 8 *Si a_{ij} sont bornées sur $\bar{\Omega}$,alors strictement elliptique implique uniformément elliptique .*

Lemma 9 *Soit L elliptique et $c \leq 0$.Si $u \in C^2(\Omega)$ et $Lu > 0$ dans Ω,alors u ne peut atteindre un maximum positif dans Ω.*

Proof. *Supposons qu'au contraire u atteint un maximum positif au point $x_0 \in \Omega$,alors*

$$\sum_{j=1}^{N} bi \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) + cu(x_0) \leq 0 \tag{11}$$

De plus, la matrice $a(.)$ étant symmetrique, d'après les propriétés des matices symétriques,$a(.)$ est diagonalisable et il existe une matrice orthogonale Q telle que pour Q^t transposée de Q,on a

$$Q.a(.)\,Q^t = D = (d_{ii})_{1 \leq i \leq N}$$

(théorème spectral). Notons que $d_{ii} > \alpha(x_0) > 0$.
En posant

$$y = Qx \quad et \quad U(y) = u(x), \tag{12}$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) &= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) \sum_{l=1}^{N} Q_{li}(x_0) \sum_{k=1}^{N} Q_{kj}(x_0) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j}\right)(Qx_0) \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} d_{ii}(x_0) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2}\right)(Qx_0)\end{aligned}$$

par(12) , U admet un maximum en (Qx_0), alors

$$\forall i = 1, ...N; \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2}\right)(Qx_0) \leq 0$$

ce qui implique,

$$\sum_{i,j=1}^{N} d_{ii}(x_0) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2}\right)(Qx_0) \leq 0 \tag{13}$$

Et (11) et(13) entrainent $Lu(x_0) \leq 0$.Ce qui contredit "$Lu > 0$ dans Ω.". ■

Theorem 10 *Soient Ω borné et $a(.)$ strictement elliptique avec $c \leq 0$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $Lu \geq 0$ dans Ω,alors u atteind un maximum positif sur la frontière $\partial\Omega$ i.e*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

Proof. Supposons que $\Omega \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N, |x_1| < d\right\}$, considérons pour $\varepsilon > 0$,la fonction

$$w(x) = u(x) + \varepsilon \exp(tx_1),$$

alors

$$(Lw)(x) = (Lu)(x) + \varepsilon \exp(tx_1)\left(t^2 a_{11}(x) + tb_1(x) + c(x)\right)$$

On peut choisir t assez grand pour que $Lw > 0$.Par le lemme précédant w ne peut atteindre un maximum positif dans Ω, alors

$$\sup_{\Omega} u < \sup_{\Omega} w < \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \exp(tx_1)$$

où $u^+ = \max(u, 0)$.Et en faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat. ∎

Remark 11 *1.Si $Lu \leq 0$ dans Ω, alors en appliquant le théorème précedant à $(-u)$ en prenant en considération $(-u)^+ = u^-$, on obtient*

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$$

2. Si $Lu = 0$ dans Ω alors

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

Corollary 12 *Soit L strictement elliptique avec $c \leq 0$.Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $Lu \geq 0$ dans Ω,alors u ne peut atteindre un maximum strictement positif dans Ω.*

Theorem 13 *(Principe du Max. Fort) Soient Ω connexe borné et L strictement elliptique avec $c \leq 0$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $Lu \geq 0$ dans Ω,alors, si u atteind son maximum sur $\bar{\Omega}$ en un point interieur de Ω, alors u est consante surΩ.*
Et de manière similaire si $Lu \leq 0$ dans Ω,alors, si u atteind son minimum sur $\bar{\Omega}$ en un point interieur de Ω, alors u est consante sur Ω.

Proof.
Soit, $m := \sup_{\Omega} u$ et l'ensemble $\Sigma := \{x \in \Omega, u(x) = m\}$ On montre que $\Sigma \in \{\Omega, \varnothing\}$.Raisonnant par l'absurde, on suppose que

$$\Sigma \cap (\Omega \diagup \Sigma) \neq \varnothing$$

On procède en 3 étapes.
Etape1: Construction d' une boule $B_r(x^*)$ vérifiant:

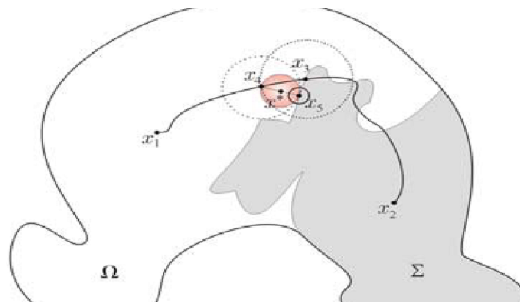

Figure 2: procédé de construction de la boule

$1.B_r(x^*) \subset (\Omega \diagup \Sigma)$
$2.B_{2r}(x^*) \subset \Omega$
$3.\bar{B}_r(x^*) \cap \Sigma$ contient un seul point.**Construction** de $\underline{B_r(x^*)}$:
Puisque u est continue, $(\Omega \diagup \Sigma)$ est $\overline{\text{ouvert, alors contient une}}$ boule prenons le centre $x_1$de cette boule et un point $x_2 \in \Sigma$;il existe alors un arc reliant x_1à x_2
- Denotons pr x_3 , le premier point de cet arc dans Σ
- Posons $s = d\,(x_3, \partial\Omega) = \inf f\,\{|x_3 - x|\,, x \in \partial\Omega\}$
- Prenons x_4 sur l' arc entre x_1 et x_3 avec $|x_3 - x_4| < \frac{s}{2}$
- Soit $B_{r_1}\,(x_4)$ la bplus grande boule autour de x$_4$contenue dans $(\Omega \diagup \Sigma)$, on a$0 < r_1 < \frac{1}{2}s$
- Prenons $x_5 \in \partial B_{r_1}\,(x_4) \cap \Sigma$
- Finallement soit $x^* = \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5$ et $r = \frac{1}{2}r_1$

Puisque $\bar{B}_r(x^*) \subset B_{r_1}\,(x_4) \cup \{x_5\}$, alors $\bar{B}_r(x^*) \cap \Sigma$ contient un seul point, c'est $\boxed{x_5}$. De $B_r(x^*) \subset B_{r_1}\,(x_4) \subset B_{\frac{s}{2}}\,(x_3)$ et $s = d\,(x_3, \partial\Omega)$, on obtient $B_{2r}(x^*) \subset \Omega$.

On considère maintenant une deuxième boule $B_{\frac{r}{2}}(x_5)$,

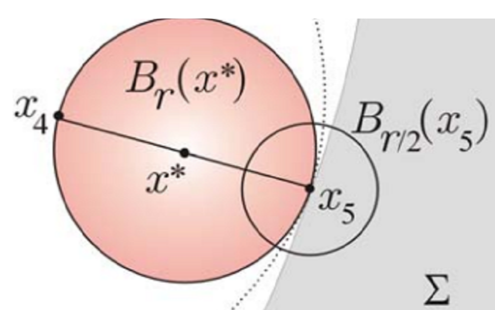

Figure 3: construction d'une 2eme boule

Etape2: Fonction auxilliaire: soit

$$h(x)=\frac{\exp\left(\frac{-t}{2}\left|x-x^{*}\right|^{2}\right)-\exp\left(\frac{-t}{2}r^{2}\right)}{1-\exp\left(\frac{-t}{2}r^{2}\right)}$$

où t sera fixé par la suite. Remarquez que $h(x^*)=\max\limits_{\Omega} h$ =1 et

$$\begin{cases} h(x)>0 \text{ si } x\in B_r(x^*) \\ h(x)<0 \text{ si } x\notin B_r(x^*) \end{cases}$$

De plus, pour $x\in B_{\frac{r}{2}}(x_5)$ on a $|x-x^*|\in \left]\frac{r}{2},\frac{3r}{2}\right[$et

$$\begin{aligned} Lh &= \left(\frac{t^2\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}\left(x_i-x_i^*\right)\left(x_j-x_j^*\right)-t\sum\limits_{i=1}^{N}\left(a_{ii}+b_i\left(x_i-x_i^*\right)\right)+c}{1-\exp\left(\frac{-t}{2}r^2\right)}\right)\left(\exp\left(\frac{-t}{2}\left|x-x^*\right|^2\right)\right) \\ &\quad -c\frac{1}{1-\exp\left(\frac{-t}{2}r^2\right)}\exp\left(\frac{-t}{2}r^2\right) \\ &\geq \left(4t^2\alpha\left(\frac{r}{2}\right)^2-2t\sum_{i=1}^{N}\left(a_{ii}+|b_i|\frac{3r}{2}\right)+c\right)\frac{\exp\left(\frac{-t}{2}\left|x-x^*\right|^2\right)}{1-\exp\left(\frac{-t}{2}r^2\right)} \end{aligned}$$

Il est alrs possible de choisir t assez grand pour que

$$Lh>0 \text{ sur } B_{\frac{r}{2}}(x_5)$$

Etape 3: la contradiction

On considère $w=u+\varepsilon h$ et ε est choisi tel que

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(m-\max\left\{u(x);x\in\bar{B}_r\left(x^*\right)\cap\partial B_{\frac{r}{2}}(x_5)\right\}\right)$$

Remarque :Puisque u est continue, le maximum sur ce compact est atteint et puisque cet ensemble et Σ sont disjoints, on trouve $\varepsilon>0$.On a alors:

- Pour $x\in B_r\left(x^*\right)\cap\partial B_{\frac{r}{2}}(x_5)$

$$w(x)=u(x)+\varepsilon h(x)\leq m-\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon<m$$

- Pour $x\in\partial B_{\frac{r}{2}}(x_5)\diagdown\bar{B}_r\left(x^*\right)$

$$w(x)=u(x)+\varepsilon h(x)\leq m+\varepsilon h(x)<m$$

On a aussi

$$w(x_5)=u(x_5)+\varepsilon h(x_5)=m+0$$

Maintenant, puisque $Lw>0$, par le lemme(9) , on obtient une contradiction.

Corollary 14 *(Preservation de la propriété de positivité) Soit* Ω *borné et* L *strictement elliptique avec* $c \leq 0$. *Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *et verifie*

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & sur \quad \Omega, \\ u \geq 0 & sur \quad \partial\Omega, \end{cases},$$

Alors , soit $u(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$, *soit* $u \equiv 0$.

■

Theorem 15 *(Principe du Maximum pour des fonctions nonpositive) Soit* Ω *borné et* L *strictement elliptique (pas de condition de signe sur* c*). Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *et verifie*$Lu \geq 0$ *sur* Ω, *et* $u \leq 0$ *sur* $\bar{\Omega}$ *.Alors , soit* $u(x) < 0$ *pour tout* $x \in \Omega$ *, soit* $u \equiv 0$.

Proof. On sait que

$$c(x) = c^+(x) - c^-(x) \text{ , avec } c^+, c^- \geq 0$$

alors $L - c^+$verifie les conditions du théorème (13) car, vu que $u \leq 0$,on a

$$\left(L - c^+\right) u \geq -c^+ u \geq 0$$

■

6.2 Estimations basées sur le principe du maximum

Donnons une application du principe du maximum fort à un résultat d'estimation

6.2.1 Estimation $\mathbf{L}^\infty$

Soit le problème,

$$\begin{cases} -Lu = f \text{ ,} & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi \text{ ,} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{14}$$

avec $f \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ et $\varphi \in C\left(\Omega\right)$

Proposition 16 *Soient* Ω *borné et* L *uniformément elliptique avec* $c \leq 0$.*Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *et verifie*(14) , *alors*

$$|u\left(x\right)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C\max_{\bar{\Omega}} |f| \text{ ,}$$

où $C = C\left(diam\left(\Omega\right), \alpha, \|b\|_\infty \diagup \alpha, \|c\|_\infty \diagup \alpha\right)$.
Proof. *Supposons* $\Omega \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N, |x_1| < d\right\}$ *et considérons*

$$w\left(x\right) = \max_{\partial\Omega} \varphi^+ + \left(ch\left(td\right) - ch\left(tx_1\right)\right) \max_{\bar{\Omega}} f^+$$

Tout d'abord, puisque $|x_1| < d$ *alors*

$$0 > ch\left(td\right) - ch\left(tx_1\right) \geq ch\left(td\right)$$

$$\begin{aligned} L\left(ch\left(td\right)-ch\left(tx_1\right)\right) &= \left(-t^2a_{11}-c\right)ch\left(tx_1\right)-tb_1sh\left(tx_1\right)+cch\left(td\right) \\ &\leq -\left(t^2\alpha-t\left\|b\right\|_\infty-\left\|c\right\|_\infty\right)ch\left(tx_1\right) \end{aligned}$$

alors en choisissant t *assez grand on peut avoir*

$$L\left(ch\left(td\right)-ch\left(tx_1\right)\right)\leq -1$$

et en prenant

$$t=1+\alpha^{-1}+\alpha^{-1}\left\|b\right\|_\infty+\alpha^{-1}\left\|c\right\|_\infty$$

on a

$$-L\left(w-u\right)\geq \max_{\bar{\Omega}}f^+-f\geq 0 \quad dans\ \Omega$$

et

$$w-u=\max_{\partial\Omega}\varphi^+-\varphi\geq 0 \quad sur\ \partial\Omega$$

alors, d'après le corollaire (14), *on obtient* $w-u\geq 0$ *dans* Ω *et par suite,quand on prend* $C\geq ch\left(td\right)$ *et* $d=\frac{1}{2}diam\left(\Omega\right)$, *et*

$$C=\exp\left(diam\left(\Omega\right)\left(1+\alpha^{-1}+\alpha^{-1}\left\|b\right\|_\infty+\alpha^{-1}\left\|c\right\|_\infty\right)\right)$$

on obtient

$$u\left(x\right)\leq w\left(x\right)\leq \max_{\partial\Omega}\varphi^++C\max_{\bar{\Omega}}f^+, \tag{15}$$

ce résultat appliqué à $-u$ *donne*

$$u\left(x\right)\geq -\left(\max_{\partial\Omega}\varphi^-+C\max_{\Omega}f^-\right), \tag{16}$$

De $(16et15)$,*on déduit*

$$\left|u\left(x\right)\right|\leq \max_{\partial\Omega}\left|\varphi\right|+C\max_{\Omega}\left|f\right|,$$

où $C=C\left(diam\left(\Omega\right),\alpha,\left\|b\right\|_\infty\diagup\alpha,\left\|c\right\|_\infty\diagup\alpha\right)$. ■

Remark 17 *Si l'on considère* $L=\Delta=\sum_{i=1}^{N}D_{ii}.(D_{ii}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2})$, *utilisant le fait que* $D_i\Delta u=\Delta D_iu$,*la proposition précédante donne des estimations pour* $u\in C^3(\Omega)$ *vérifiant*

$$-Lu=f\in C^1(\bar{\Omega}) \tag{17}$$

Ces estimations sont de la forme

$$\left|\nabla u\left(x\right)\right|\leq \max_{\partial\Omega}\left|\nabla u\right|+Cste\left\|f\right\|_{C^1(\bar{\Omega})},x\in\Omega$$

avec $\left\|f\right\|_{C^1(\bar{\Omega})}:=\left\|f\right\|_\infty+\left\|\nabla f\right\|_\infty$.

Proposition 18 *Soient Ω borné et L uniformément elliptique avec $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\bar{\Omega})$.Si $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et verifie (17) Alors pour tout $x \in \Omega$*

$$|\nabla u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\nabla u| + C\left(1 + \|f\|_{C^1(\bar{\Omega})}\right)$$

où $C = C\left(diam(\Omega), \alpha, \|u\|_\infty, \|a_{ij}\|_{C^1}, \|b_i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1}\right)$

Proof.

On va utiliser le principe du Max.pour $|\nabla u|^2$ .Posons $L_0 = L - c$.et notons la Hessienne par $\nabla^2 = (D_{ij})$ avec $\left|\nabla^2 u\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} (D_{ij}u)^2$,on a alors

$$D_i\left(|\nabla u|^2\right) = 2\sum_{l=1}^{N} D_l u D_{il} u \text{ et, } D_{ij}\left(|\nabla u|^2\right) = 2\sum_{l=1}^{N} D_{il} u D_{jl} u + D_l u D_{ij} u$$

et utilisant la stricte ellipticité de L, on a

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{N} (L_0 D_l u) D_l u &= \frac{1}{2} L_0\left(|\nabla u|^2\right) - \sum_{l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{il} u D_{jl} u \\ &\leq \frac{1}{2} L_0\left(|\nabla u|^2\right) - \alpha\left|\nabla^2 u\right|^2 \end{aligned} \tag{18}$$

De plus, en dérivant (17)par rapport à x_l,et multipliant par $\partial_l u$, on obtient,

$$\begin{aligned} -D_l f D_l u &= (D_l L u)(D_l u) = (L D_l u)(D_l u) \\ &\quad + \left(\sum_{i,j=1}^{N} D_l a_{ij} D_{ij} u + \sum_{l=1}^{N} D_l b_i D_i u + D_l c u\right) \partial_l u \\ &\leq (L_0 D_l u)(D_l u) - c(D_l u)^2 + C_0\left(\left|\nabla^2 u\right| + |\nabla u| + |u|\right)|\nabla u| \end{aligned} \tag{19}$$

où $C_0 = \sum_{i,j=1}^{N} \|a_{ij}\|_{C^1} + \sum_{i=1}^{N} \|b_i\|_{C^1} + \|c\|_{C^1}$ .En sommant (19) et utilisant (3) ,on obtient

$$\begin{aligned} L_0\left(|\nabla u|^2\right) &\geq 2\sum_{l=1}^{N} (L_0 D_l u) D_l u + 2\alpha\left|\nabla^2 u\right|^2 \\ &\geq -2\nabla f.\nabla u + 2c|\nabla u|^2 + 2\alpha\left|\nabla^2 u\right|^2 - 2NC_0\left(\left|\nabla^2 u\right| + |\nabla u| + |u|\right)|\nabla u| \end{aligned}$$

et de l'inégalité de Cauchy - Shwartz, il s'en suit

$$L_0\left(|\nabla u|^2\right) \geq \alpha\left|\nabla^2 u\right|^2 - |\nabla f| - C_1|\nabla u| - NC_0|u|^2.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} L_0\left(u^2\right) &= 2\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_iuD_ju + 2uLu - 2cu^2 \\ &\geq 2\alpha\left|\nabla u\right|^2 + 2uf - 2cu^2 \\ &\geq 2\alpha\left|\nabla u\right|^2 - f^2 - (1+2c)\,u^2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir

$$L_0\left(\left|\nabla u\right|^2 + \gamma u^2\right) \geq \alpha\left|\nabla^2 u\right|^2 + \alpha\left|\nabla u\right|^2 - \alpha\left|\nabla f\right|^2 - \gamma\left|f\right|^2 - C_2$$

où $\gamma = 1 + \alpha^{-1}C_1$ *et* $C_2 = C_2\left(\|u\|_\infty, \alpha, \|a_{ij}\|_{C^1}, \|b_i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1}\right)$.
Pour faire passer le terme restant négatif à droite, on ajoute un autre terme soit $(C_2 + \gamma\|f\|_{C^1})ch(tx_1)$ *avec* $t = \alpha^{-\frac{1}{2}} + \alpha^{-1}\|b\|_{C^1}$, *tel que* t *est assez grand pour que* $t^2\alpha - t\;|b| \geq 1$*.Et,*

$$\begin{aligned} L_0\left(ch(tx_1)\right) &= a_{11}t^2ch(tx_1) + b_1tsh(tx_1 \\ &\geq \left(\alpha t^2 - t\left|b\right|\right)ch(tx_1) \geq 1 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir,

$$L_0\left(\left|\nabla u\right|^2 + \gamma u^2 + C_2 + \gamma\|f\|_{C^1}\right)ch\left(tx_1\right) \geq 0$$

et l'application du principe de Maximum implique alors,

$$\begin{aligned} \sup_\Omega\left|\nabla u\right|^2 &\leq \sup_\Omega\left(\left(\left|\nabla u\right|^2 + \gamma u^2 + C_2 + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\|f\|_{C^1}\right)ch\left(tx_1\right)\right) \\ &= \sup_{\partial\Omega}\left(\left(\left|\nabla u\right|^2 + \gamma u^2 + C_2 + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\|f\|_{C^1}\right)ch\left(tx_1\right)\right) \end{aligned}$$

Et puisque on peut supposer que $ch\left(tx_1\right) \leq ch\left(tdiam\left(\Omega\right)\right)$, *il s'en suit*

$$\sup_\Omega\left|\nabla u\right| \leq \sup_{\partial\Omega}\left|\nabla u\right| + C_3\left(1 + \left(\|f\|_{C^1}\right)\right)$$

où $C_3 = C_3\left(diam\left(\Omega\right), \|u\|_\infty, \alpha, \|a_{ij}\|_{C^1}, \|b_i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1}\right)$.
■

Remark 19 *Une estimation similaire est vérifiée dans le cas d'équation semi-linéaire de la forme*

$$-Lu = f(x,u),\; x \in \Omega \tag{20}$$

avec $f \in C^1\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$*.On a le résultat suivant*

Proposition 20 *Soient* Ω *borné et* L *uniformément elliptique avec* $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\bar{\Omega})$*.Si* $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *et verifie* (20) *Alors pour tout* $x \in \Omega$

$$\left|\nabla u\left(x\right)\right| \leq \max_{\partial\Omega}\left|\nabla u\right| + C$$

où $C = C\left(diam\left(\Omega\right), \alpha, \|u\|_\infty, \|f\|_{C^1\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\right)}, \|a_{ij}\|_{C^1}, \|b_i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1}\right)$

7 Le principe du Maximum Faible

Dans cette section, nous considérons des solutions faibles et sous des hypothèses de régularité moins restrictives que précédemment.Les résultats seront enoncés pour l'opérateur A(sous forme divergence) pour une comodité d'integration.

Rappel

1. Une distribution $T \in D\prime(\Omega)$ est dite positive si pour tout $\varphi \in D^{+}(\Omega)$,($\varphi(x) \geq 0$dans Ω), $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$.
2. Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ est telle que $f \geq 0$ au sens de $D\prime(\Omega)$. Alors, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, $\langle f, v^{+}\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0$.

Theorem 21 *Soient Ω borné et $a\,(.)$ strictement elliptique tel que $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ avec $c \geq 0$. Toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie*

$$\begin{cases} -Au = -div(a\,(.)\,\nabla u) + cu \geq 0 & dans\ \Omega, \\ u^{-} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est positive ou nul presque partout dans Ω.

Remark 22 *La deuxième condition est une façon d'exprimer que u est positive au bord de Ω, même si ce dernier n'est pas assez régulier pour qu'il existe une trace. En fait, si Ω est régulier, on a $\gamma_0(u^{-}) = \gamma_0(u)^{-}$ et $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$.*

Proof. Il suffit de montrer que $u^{-} = 0$. Comme $u^{-} \in H_0^1(\Omega)$ par l'inégalité de Poincaré, il suffit de montrer que $\nabla(u^{-}) = 0$. Soit donc $f = -div(a\,(.)\,\nabla u) + cu$ qui appartient à $H^{-1}(\Omega)$. Nous avons par conséquent

$$0 \leq \langle f, v^{+}\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} a\,(x)\,\nabla u^{-}\,(x)\,\nabla u\,(x)\,dx + \int_{\Omega} cu^{-}u\,(x)\,dx$$

Or

$$u^{-} = -1_{\{u \leq 0\}}u = -\left(1_{\{u \leq 0\}}\right)^2 u$$

et

$$\nabla(u^{-}) = -1_{\{u \leq 0\}}\nabla u = -\left(1_{\{u \leq 0\}}\right)^2 \nabla u$$

donc

$$\int_{\Omega} a\,(x)\,\nabla u^{-}\,(x)\,\nabla u^{-}\,(x)\,dx + \int_{\Omega} c(u^{-})^2\,(x)\,dx \leq 0$$

d'où par l'ellipticité de $a(.)$

$$\alpha \left\|\nabla(u^{-})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

et l'on en déduit $\nabla(u^{-}) = 0$. ■

Theorem 23 *Soient Ω borné et $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et $c \in L^{\infty}(\Omega)$ telle que $c(x) \geq \eta > 0$ presque partout. Si $g \in L^{\infty}(\Omega)$,alors toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de*

$$-div(a\,(.)\,\nabla u) + cu = g \quad au\ sens\ de\ D\prime(\Omega) \tag{21}$$

satisfait

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \frac{1}{\eta}\,\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

Proof. *Soit $k \in \mathbb{R}^+$, alors $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$.On déduit (21) que*

$$\int_{\Omega} a\,(x)\,\nabla(u-k)^+\,(x)\,\nabla u\,(x)\,dx + \int_{\Omega} c(u-k)^+ u\,(x)\,dx = \int_{\Omega} g(u-k)^+ dx$$

or,

$$\nabla(u-k)^+ = 1_{\{u>k\}}\nabla(u-k) et = 1_{\{u>k\}} = \left(1_{\{u>k\}}\right)^2$$

d'où.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a\,(x)\,\nabla(u-k)^+\,(x)\,\nabla u\,(x)\,dx &= \int_{\Omega} a\,(x)\,\nabla(u-k)^+\,(x)\,\nabla(u-k)\,(x)\,dx \\
&= \int_{\Omega} a\,(x)\,\nabla(u-k)^+\,(x)\,\nabla(u-k)^+\,(x)\,dx \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\int_{\Omega} c(u-k)^+ u\,(x)\,dx \leq \int_{\Omega} g(u-k)^+ dx$$

Comme Ω est borné, on peut soustraire $\int_{\Omega} kc(u-k)^+ dx$ aux deux membres de cette inégalité, ce qui donne,

$$\int_{\Omega} c\,(u-k)\,(u-k)^+\,(x)\,dx \leq \int_{\Omega} (g-kc)\,(u-k)^+ dx$$

Et,

$$\int_{\Omega} c\,(u-k)\,(u-k)^+\,(x)\,dx = \int_{\Omega} c\left[(u-k)^+\right]^2(x)\,dx \geq \eta\left\|(u-k)^+\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Prenons

$$k = \frac{\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}}{\eta}$$

alors $g - ck \leq 0$ presque partout. Comme $(u-k)^+ \geq 0$ presque partout, on en déduit que

$$\int_\Omega (g - kc)\,(u-k)^+ dx \leq 0$$

Par la dernière égalité, il vient $(u-k)^+ = 0$, c'est à dire $u \leq k$ presque partout. On reprend ensuite le même raisonnement avec $v = (u+k)^-$, toujours avec

$$k = \frac{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}{\eta}$$

■

8 Résultats de régularité elliptique

Les équations elliptiques linéaires du second ordre possèdent une propriété très importante : la solution "gagne" deux dérivées par rapport au second membre de l'équation. C'est ce qu'on appelle la régularité elliptique.

8.1 Espaces de fonctions Holderiennes

Definition 24 *Pour $0 < \beta \leq 1$, on dit que u est höldérienne d'exposant β (lipschitzienne pour $\beta = 1$) s'il existe une constante C telle que, pour tout x, y dans $\bar{\Omega}$,*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^\beta .$$

L'espace des fonctions höldériennes est noté $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$.Toute fonction holderienne est continue. Posons

$$|u|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta}$$

et,

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + |u|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}$$

$\|.\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}$ est une norme sur l'espace des fonctions höldériennes $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ qui en fait un espace de Banach. L'espace$C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ est constitué des fonctions de classe C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$. On le munit de la norme $\|.\|_{C^{k,\beta}(\bar{\Omega})}$,pour laquelle il est complet, définie par,

$$\|u\|_{C^{k,\beta}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \max_{|y|=k} |D^\gamma u|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}$$

8.2 Régularité elliptique

Theorem 25 *Soit $0 < \beta < 1$ et Ω un ouvert borné de classe $C^{2,\beta}$. Supposons que les coefficients de L supposé stictement elliptique, a_{ij}, b_i et c appartiennent à $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ et soit Λ un majorant de leurs normes dans cet espace. Soit $f \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ et $g \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$. Soit $u \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction telle que*
$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega \\ u = g & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$
Alors $u \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ avec l'estimation

$$\|u\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} \right)$$

où C ne dépend que de N, β, α, Λ et Ω.
On a aussi un résultat d'existence et d'unicité.

Theorem 26 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment sur l'ouvert et l'opérateur L, pour tous $f \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ et $g \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$, il existe une unique fonction $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega \\ u = g & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Ce théorème montre que l'opérateur L^{-1} réalise un isomorphisme entre $C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \times \left(C^{2,\beta}(\bar{\Omega}) / C_0^{2,\beta}(\bar{\Omega}) \right)$ et $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$

Le résultat suivant présente une régularité d'ordre plus élevé.

Theorem 27 *Soit $0 < \beta < 1, k$ un entier positif et Ω un ouvert de classe $C^{k+2,\beta}$.Supposons que les coefficients de L, aij, bi et c appartiennent à $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ et soit Λun majorant de leurs normes dans cet espace. Soit $f \in C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ et $g \in C^{k+2,\beta}(\bar{\Omega})$.Soit $u \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction telle que*
$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega \\ u = g & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$
Alors $u \in C^{k+2,\beta}(\bar{\Omega})$ avec l'estimation

$$\|u\|_{Ck+^{2,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^{k,\beta}(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{k+2,\beta}(\bar{\Omega})}$$

où C ne dépend que de N, β, α, Λ et Ω.

Remark 28 *Les démonstration sont très techniques, et nous renvoyons à Gilbarg-Trudinger pour les détails.*

Theorem 29 Soit Ω un ouvert de classe C^2 et supposons que les coefficients de $a(.)$ appartiennent à $C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^2(\Omega)$.Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que

$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega \\ u = g & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{C^{k+2,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)} \right)$$

où C ne dépend pas de f et g. De plus, l'équation est vérifiée presque partout sous la forme $-Lu = f$.

Remark 30 *i) L'existence et l'unicité de u découle ici directement du théorème de Lax-Milgram (on ne suppose pas la matrice A symétrique).*
ii) Si $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, alors $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et donc $\partial_i a_{ij} \partial_j u \in L^2(\Omega)$. Ce terme a bien un sens et l'on peut appliquer la formule de Leibniz pour dériver le produit $a_{ij}\partial_j u$.
iii) La régularité de l'ouvert n'est pas une condition nécessaire pour que le résultat ait lieu.

Theorem 31 *Soit $k \geq 1, \Omega$ un ouvert de classeC^{k+2}, $a_{ij} \in C^{k,1}\left(\bar{\Omega}\right)$ et $c \in C^{k-1,1}\left(\bar{\Omega}\right)$. Soit $f \in H^k(\Omega)$ et $g \in H^{k+2}(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que*

$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C_k \left(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|g\|_{H^{k+2}(\Omega)} \right)$$

où Ck ne dépend pas de f et g.

Remark 32 *On retrouve le fait que si l'ouvert, les coefficients et les données sont de classe C^∞, la solution est de classe C^∞.*

Pour les solutions fortes, c'est à dire les fonctions $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que $-Lu = f$ presque partout, on a également une théorie d'existence et de régularité.

Theorem 33 *Soit Ω un ouvert de classe $C^{1,1}$, $a_{ij} \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ et $bi, c \in L^\infty(\Omega)$. Pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in W^{2,p}(\Omega)$*
avec $1 < p < +\infty$, il existe un unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$une fonction telle que

$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega \\ u - g \in u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}$$

où Cp ne dépend pas de f et g.

Remark 34 *Le résultat est faux pour $p = 1$ et $p = +\infty$.*

8.3 Exercices

Exercice1 Soient Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On se propose de résoudre le problème elliptique suivant, avec conditions aux limites de type Robin (ou Fourier) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{du}{dn} + \lambda u = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1. Donner la formulation faible (ou variationnelle) de ce problème.

2. Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible. Pour cela on pourra prouver et utiliser l'inégalité de Poincaré-Friedrichs : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \geq C \|u\|_{L^2(\Omega)} .$$

3. Que peut-on dire sur la régularité de la solution ?

Exercice2(Régularité en dimension 1)
Soit $\Omega =]0,1[$ et $f \in L^2(\Omega)$

1. Vérifier qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega Du(t) \, .Dv(t) \, dt = \int_\Omega f(t) \, v(t) \, dt, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{22}$$

2. On suppose maintenant que $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \subset L^2(\Omega)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$. Soit u la solution de (22). Montrer que, pour tout $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t)) \, \varphi(t) \, dt = \int_0^1 c\varphi(t) \, dt$$

   Pour un certain c$\in \mathbb{R}$ convenablement choisi indépendant de φ.

3. En déduire que $Du = -F + c$ p.p.sur Ω, puis que u est deux fois continûment dérivable sur Ω et

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

   .

<u>Exercice3</u> Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2), x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0\}$ et f $\in_{L^2(\Omega)}$, et soit $u \in H_0^1(\Omega)$solution du problème suivant :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Alors $u \in H^2(\mathbb{R}_+^2)$.

−−

References

[1] Laurence C. Evans,Partial differential equations, Graduate studies in Mathematics,volume 19, Providence, R.I.: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3, MR 2597943 AmericanMathematical Society.

[2] Gilbarg, D. et Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[3] Kavian, O., Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, Paris, New York, 1993.