2 :

Modèles épidemologiques

Daniel Bernoulli (1760) $\longrightarrow$ 1er modèle mathématique

Modèle SI :

une population divisé en 2 groupes (compartiment)

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta} \boxed{I}$$

S : individus sains.

I : individus infectés

β : taux de transmission de la maladi (taux d'infection).

le modèle mathématique SI s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I \end{cases}$$

Dans le modèle SI, on suppose qu'il n'y a ni natalité, ni mortalité autrement dit : la pop est c^{st}.

$N = S + I$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow N = c^{te}$$

Modèle SIS :

une pop divisé en 2 groupes (compartiments)

$$\boxed{S} \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \boxed{I}$$

γ : taux de guérison.

le modèle mathématique SIS s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma I \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I \end{cases}$$

$N = S + I = c^{te}$

$\Rightarrow S = N - I$

et donc

$$\frac{dI}{dt} = \beta(N - I)I - \gamma I = (\beta N - \gamma) I - \beta I^2$$

$$= \alpha I - \beta I^2 = \alpha I \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} I\right) \text{ (logis}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} I\right) \qquad \text{avec } \alpha = \beta N$$

$$I(t) = \frac{(\beta N - \gamma) I_0 \, e^{(\beta N - \gamma)t}}{(\beta N - \gamma - \beta I_0) + \beta I_0 \, e^{(\beta N - \gamma)t}}$$

$S(t) = N - I(t)$.

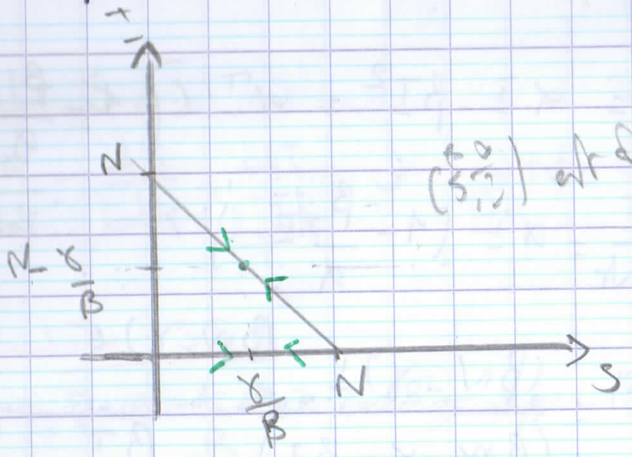
pt d'équilibre : $(N, 0)$ $\left(\frac{\gamma}{\beta}, N - \frac{\gamma}{\beta}\right) = (S^*, I^*)$

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S + \gamma \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}$$

$$J(N, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta N + \gamma \\ 0 & \beta N - \gamma \end{pmatrix}$$

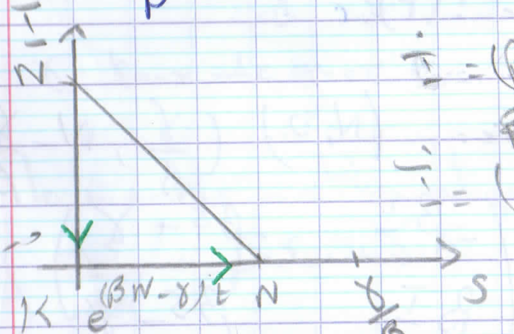
$\Rightarrow$ la linéarisation ~~s'~~ ne s'applique pas.

Si $\frac{\gamma}{\beta} < N$:



$\left(\frac{\gamma}{\beta}, \ldots\right)$ est stable.

Si $\frac{\gamma}{\beta} > N$:



$\dot{I} = (\beta S - \gamma) I$

$\dot{I} = (\beta(N - I) - \gamma) I$

$I = K e^{(\beta N - \gamma) t}$

Ds ce cas on a $\beta N - \gamma < 0$

$\Rightarrow I \to 0$, d'où $S \to N$.

$(N, 0)$ est stable

Modele SIR :

On suppose que la pop est divisé en 3 groupes

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta} \boxed{I} \xrightarrow{\delta} \boxed{R}$$

S : classe des susceptibles (Sains).

I : " " infectées

R : " " Refractaires (Remis).

- δ : taux de guérison.

le modele SIR s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S I \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I - \delta I \\ \frac{dR}{dt} = \delta I \end{cases}$$

$N = S + I + R$ cste.

Modèle SIRS :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta"] & I \arrow[r, "\delta"] & R \arrow[ll, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

γ : taux de perte d'immunité

Le modèle s'écrit :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma R \\[2mm] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \delta I \\[2mm] \dfrac{dR}{dt} = \delta I - \gamma R \end{cases}$$

$N = S + I + R$ est cte car $\dfrac{dN}{dt} = 0$

$R = N - (S + I)$

le modèle (1) $\Leftrightarrow$ à :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma (N - S - I). \\[2mm] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \delta I \end{cases}$$

pts d'équilibres :

$I^* = 0 \Rightarrow S^* = N.$

$S^* = \dfrac{\delta}{\beta} \Rightarrow -\delta I^* + \gamma\left(N - \dfrac{\delta}{\beta} - I^*\right) = 0.$

$\Rightarrow (\delta + \gamma) I^* = \gamma\left(N - \dfrac{\delta}{\beta}\right).$

$\Rightarrow I^* = \dfrac{\gamma\left(N - \dfrac{\delta}{\beta}\right)}{\delta + \gamma}$

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I - \gamma & -\beta S - \gamma \\ \beta I & \beta S - \delta \end{pmatrix}$$

$$J(N, 0) = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta N - \gamma \\ 0 & \beta N - \delta \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -\delta$, $\lambda_2 = \beta N - \delta < 0$ si $\dfrac{\beta N}{\delta} < 1.$

$\lambda_2 = \beta N - \delta > 0$ ssi $\beta \dfrac{N}{\delta} > 1.$

$\Rightarrow (N, 0)$ est stable ssi $\dfrac{\beta N}{\delta} < 1.$

$$J(S^*, I^*) = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \gamma & -\beta S^* - \gamma \\ \beta I^* & \underbrace{\beta S^* - \gamma}_{=0} \end{pmatrix}$$

(S^*, I^*) existe si $N > \frac{\gamma}{\beta} \iff \frac{N\beta}{\gamma} > 1$

$\mathrm{tr}\, J = -\beta I^* - \gamma < 0$

$\det J = \beta I^* (\beta S^* + \gamma) > 0$

si (S^*, I^*) existe alors le pt est tt le temp stable

Calcul de R_0 : taux de reproduction de base.

- Un des concepts fondamentaux en epidemolog
- Il a été proposé par Lotka ($\simeq 1924$) en epidémographie.
- utilisé après en epidemologie.

Def : le taux de reproduction de base noté R_0 est le nombre moyen d'individus infectés !! durant sa periode d'infectiosité.

R_0 donne information si une épidémie devient endémique ou va disparaître avec le temps.

ok

- Il existe un seuil pour $R_0 = 1$ tq :
- si $R_0 > 1$ alors en moyen, un individu infecté va contaminer plus qu'un individu.
- si $R_0 < 1$, alors en moyen, un individu infecté va engendrer moins qu'un individu infecté.

Méthode de Anderson et May :

$R_0 = \beta . C . D$

β : prop. de transmission de maladie
c : le nbr de contact.
D : période d'infectiosité.

exemple :

$$\begin{cases} S' = -a S I + b I \\ I' = a S I - b I \end{cases} \qquad S + I = N$$

$D = \frac{1}{b}$; $\beta = a$; $c = N$.

$\Rightarrow R_0 = \frac{aN}{b}$.

astuce : en premier temps I va croître
$\Rightarrow I' > 0$

d'où : $I' = a S I - b I$

~~en~~ un seule infecté avec N sain

$aN - b > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{aN}{b}}_{R_0} > 1$

R_0 peut etre determiner à partir de la condition d'instabilité de l'equilibre sans maladie.

exemple :

$$\begin{cases} \dot{S} = \pi - a S I - \mu S \\ \dot{I} = a S I - b I - \mu I \\ \dot{R} = b I - \mu R \end{cases}$$

μ : taux de mortalité naturelle

l'equilibre sans maladie :

$\overset{*}{I} = 0$, $\dot{S} = \pi - \mu \overset{*}{S} \Rightarrow \overset{*}{S} = \frac{\pi}{\mu}$, $\overset{*}{R} = 0$.

$DFE = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0\right)$ (Disease Free equilibrium)

$$J = \begin{pmatrix} -aI - \mu & -aS & 0 \\ aI & aS - b - \mu & 0 \\ 0 & b & -\mu \end{pmatrix}$$

$$J_{DFE} = \begin{pmatrix} -\mu & -a\frac{\pi}{\mu} & 0 \\ 0 & a\frac{\pi}{\mu} - b - \mu & 0 \\ 0 & b & -\mu \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -\mu$.
$\lambda_2 = -\mu$.
$\lambda_3 = \frac{a\pi}{\mu} - b - \mu$

$\lambda_3 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{a\bar{n}}{\mu(b+\mu)}}_{R_0} > 1.$

Exercice :

$$\begin{cases} S' = -\beta S I \\ I' = \beta S I - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases}$$

calculer la periode d'infectiosité

(c.à.d : le temps passé dans le compartiment I)

X : v.a qui represente la periode infectieuse

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$P(X<t)$ $\omega \longrightarrow X(\omega)$ la periode infectieuse

$) = P(X(\omega) < t)$: la prop. qui un individu à une periode infectieuse $< t$.

$$\begin{cases} P'(t) = -\gamma P(t) \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(t) = e^{-\gamma t}$

fct de repartition $F(t) = P(X > t)$

$= 1 - P(t) = 1 - e^{-\gamma t}$

densité :

$) = \gamma e^{-\gamma t}$; l'esperance

$E(X) = \gamma \int_0^{+\infty} t e^{-\gamma t}$

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\gamma)$

$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{\gamma}$

$u(t)$: le nbr d'individu qui reste infecté à l'instant t.

$\dfrac{du(t)}{dt} = -\gamma u(t) \Rightarrow u(t) = u_0 e^{-\gamma t}$.

$u_0 = u(0)$

dn = nbre d'individus gueri t entre t et $t + dt$.

$dn = \dfrac{u(t) - u(t+dt)}{dt} \cdot dt$

$= -\dfrac{du}{dt} \cdot dt = \gamma u(t) \, dt$.

$dn = \gamma u_0 e^{-\gamma t}$.

la durée moyenne passée ds le compartiment des infectés

$$T = \frac{\int_0^{+\infty} t \gamma u_0 e^{-\gamma t} dt}{u_0} = \gamma \int_0^{+\infty} t e^{-\gamma t} dt.$$

$$= -t e^{-\gamma t} \Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\gamma}$$

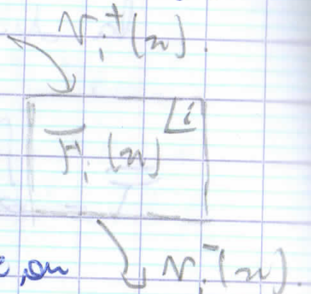
Méthode de calcul de R_0

la population est divisée entre n compartiment (répartie)

on suppose que les p premiers compartiments sont des compartiments des non infectés (susceptible, non porteur de virus) et le reste $(n-p)$ est constitués des infectés.

on note par $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ l'état du système $\in \mathbb{R}^n$.

x_i : la densité des individus dans le compartiment i $(i = \overline{1,n})$



F_i : vitesse d'apparition de la maladie dans le compartiment (i) de toute sorte (horizontale, ou verticale)

$V_i^+(x)$: ce qui rentre dans le compartiment (deplacement, vieillissement).

$V_i^-(x)$: se qui sorte du compartiment i (mortalité, guerison).

on a donc l'equation suivant.

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x) + V_i^+(x) - V_i^-(x).$$

on note par x_s l'etat sans maladie (DFE)

$$x_s = (x_1, \dots, x_p, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-p})$$

$$= \{x \in \mathbb{R}_+^* \,/\, x_{p+1} = 0 = x_{p+2} = \dots = x_n = 0\}$$

On fait les hypotheses suivantes:

1) $x_i \geq 0$, $F_i(x) \geq 0$, $V_i^+(x) \geq 0$; $V_i^-(x) \geq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$.

2) si $x_i = 0 \Rightarrow V_i^-(x) = 0 = F_i(x)$

3) si $i \leq p$ $F_i(x) = 0$. (les compart- des non-infectés)

4) si $x \in x_s$ $F_i(x) = 0$ et pour $i > p$ $V_i^+(x) = 0$

$x = (X_1, X_2)$
avec
$X_1 = (x_1, \dots, x_p)$. $X_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)$

le système s'écrit :

$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2)$.

$\dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2)$.

par définition le DFE $\overset{*}{X} = (\overset{*}{X}_1, 0) \Rightarrow$ $f_1(\overset{*}{X}_1, 0)$
$f_2(\overset{*}{X}_1, 0)$

supposons que $f \in \mathcal{C}^1$:

$$f_1(X_1, X_2) = f_1(\overset{*}{X}_1, 0) + \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(X_1 - \overset{*}{X}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial X_2} X_2$$

$$= A_{11}(\overset{*}{X})(X_1 - \overset{*}{X}_1) + A_{12}(\overset{*}{X}) X_2.$$

$$f_2(X_1, X_2) = f_2(\overset{*}{X}_1, 0) + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}(X_1 - \overset{*}{X}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} X_2$$

$$= A_{21}(\overset{*}{X})(X_1 - \overset{*}{X}_1) + A_{22}(\overset{*}{X}) X_2.$$

$$f_1(X_1, X_2) = [A_{11}(\overset{*}{X}) \quad A_{12}(\overset{*}{X})] \begin{bmatrix} X_1 - \overset{*}{X}_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$f_2(X_1, X_2) = [A_{21}(\overset{*}{X}) \quad A_{22}(\overset{*}{X})] \begin{bmatrix} X_1 - \overset{*}{X}_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

la matrice Jacobienne au pt DFE est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} A_{11}(\overset{*}{X}) & A_{12}(\overset{*}{X}) \\ A_{21}(\overset{*}{X}) & A_{22}(\overset{*}{X}) \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} A_{11}(\overset{*}{X}) & A_{12}(\overset{*}{X}) \\ 0 & A_{22}(\overset{*}{X}) \end{bmatrix} \qquad \overset{*}{X} = DFE$$

Rem : $f_2(X_1, 0) = 0$.

or : $\dot{x} = \mathcal{F}(x) + \mathcal{V}^+(x) - \mathcal{V}^-(x)$

avec : $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{V}^{\pm}(x) = \begin{pmatrix} v_1^{\pm}(x) \\ \vdots \\ v_n^{\pm}(x) \end{pmatrix}$

$$J(x^*) = DF(x^*) + DV^+(x^*) - DV^-(x^*)$$

$$DF(x^*) = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ p \\ p+1 \\ \\ n \end{array} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & F \end{array} \right)$$

(column label p above the dotted dividing line)

$$D(V^+ - V^-) = DV = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ 0 & V \end{pmatrix}.$$

on a le résultat suivant :

<u>Def:</u>

$R_0 = \rho(-FV^{-1})$. : rayon spectrale

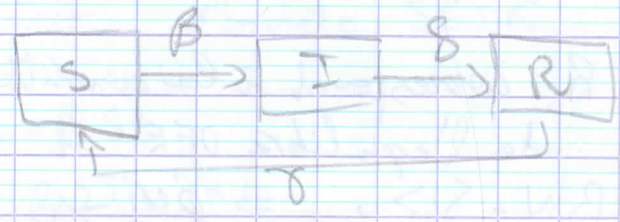
<u>article :</u> . Gauthier Sallet   en français

. Vandendrich

"Taux de Reproduction de base"

Exemple (1) Modèle SIRS :

$$(1) \sim \begin{cases} \dot S = -\beta S I + \gamma R \\ \dot I = \beta S I - \delta I \\ \dot R = \delta I - \gamma R \end{cases}$$



$N = S + I + R$.

$$(1) \iff \begin{cases} \dot S = -\beta S I + \gamma(N - S - I) \\ \dot I = \beta S I - \delta I. \end{cases}$$

<u>M1</u> :

Équilibre DFE : $(N, 0)$.

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \gamma & -\beta S - \gamma \\ \beta I & \beta S - \delta \end{bmatrix}$$

$$J(N,0) = \begin{bmatrix} -\gamma & -\beta N - \gamma \\ 0 & \beta N - \delta \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -\gamma < 0$

$\lambda_2 = \beta N - \delta$

R_0 correspond à la condition d'instabilité de l'equilibre DFE.

$\beta N - \delta > 0 \Rightarrow \frac{\beta N}{\delta} > 1$.

donc $R_0 = \frac{\beta N}{\delta}$

$\underline{M_2}$:

$I(N,1) = \beta N - \delta > 0$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{\beta N}{\delta}}_{R_0} > 1$

les infectés croissent

$\underline{M_3}$:

$F(S,I) = \beta S I$

$V(S,I) = -\delta I$

DFE $= (N,0)$.

$F = \beta N$; $V = -\delta \Rightarrow V^{-1} = -\frac{1}{\delta}$.

$R_0 = f\left(\frac{\beta N}{\delta}\right) = \frac{\beta N}{\delta}$.

Exemple 2 : Modèle SEIR :

$$\begin{cases} \dot S = -\beta S I \\ \dot E = \beta S I - k E \\ \dot I = k E - \alpha I \\ \dot R = \alpha I \end{cases}$$

$F(S,E,I) = \begin{pmatrix} \beta S I \\ 0 \end{pmatrix}$ $DF = \begin{pmatrix} \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V^-(S,E,I) = \begin{pmatrix} +kE \\ +\alpha I \end{pmatrix}$ $DV^- = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \end{pmatrix}$

$V^+(S,E,I) = \begin{pmatrix} 0 \\ kE \end{pmatrix}$ $DV^+ =$

DFE $= (N,0,0,0)$

$D(V^+ - V^-) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & \alpha \end{pmatrix}$

$V = \alpha \Rightarrow V^{-1} =$

$F = \beta N$

$$\begin{cases} \dot S = -\beta S (I + \varepsilon E) \\ \dot E = \beta S (I + \varepsilon E) - kE \\ \dot I = kE - \alpha I \\ \dot R = \alpha I \end{cases}$$

$DFE = (N, 0, 0)$

$$F(S,E,I) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta S I + \varepsilon \beta S E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\beta S (I + \varepsilon E) \\ -kE \\ kE - \alpha I \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \varepsilon \beta N & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ k & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon \beta N}{k} - \frac{\beta N}{\alpha} & -\frac{\beta N}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(-FV^{-1}) = \frac{\varepsilon \beta N}{k} + \frac{\beta N}{\alpha} = R_0.$$

Exemple 4 : Modèle de la grippe (Arino et al 2006)

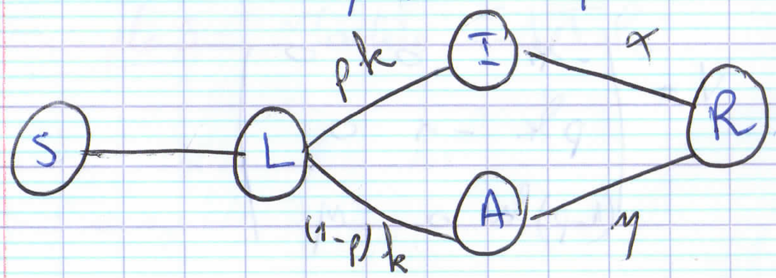
$$\begin{cases} \dot S = -\beta S (I + \delta A) \\ \dot L = \beta S (I + \delta A) - kL \\ \dot I = pkL - \alpha I \\ \dot A = (1-p) kL - \eta A \end{cases} \qquad 0 \leq \delta < 1$$

S : susceptible.

L : Latent (exposé).

I : Infecté

A : stade asymptomatique.



. Mq l'existence et l'unicité de la sol globale
. Mq qu'elle est positive

Calcul de R_0:

$DFE = (N, 0, 0, 0)$.

$$\mathcal{F}(S,L,I,A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta S(I+\delta A) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^- = \begin{pmatrix} -\beta S(I+\delta A) \\ -kL \\ \rho kL - \alpha I \\ (1-\rho)kL - \eta A \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta S & \beta\delta S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{DFE} = \begin{pmatrix} 0 & \beta N & \beta\delta N \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ \rho k & -\alpha & 0 \\ (1-\rho)k & 0 & -\eta \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{-1}{k\alpha\eta} \begin{pmatrix} \alpha\eta & \rho k\eta & (1-\rho)k\alpha \\ 0 & k\eta & 0 \\ 0 & 0 & k\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{\rho-1}{\eta} & 0 & -\frac{1}{\eta} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta N\rho}{\alpha} - \frac{\beta\delta N(1-\rho)}{\eta} & -\frac{\beta N}{\alpha} & \cdots \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

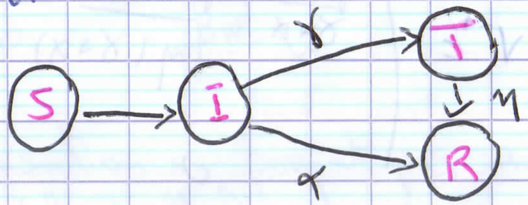
$$\rho(-FV^{-1}) = \beta N\left(\frac{\rho}{\alpha} + \frac{\delta(1-\rho)}{\eta}\right) = R_0.$$

Exemple 5 : Modèle SITR :

Modèle SITR :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S (I + \delta T) \\ \dot{I} = \beta S (I + \delta T) - (\gamma + \alpha) I \\ \dot{T} = \gamma I - \eta T \\ \dot{R} = \eta T + \alpha I \end{cases}$$

T : traité.



$DFE = (N, 0, 0)$

$$\mathcal{F}(S, I, T) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta S (I + \delta T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^- = \begin{pmatrix} \beta S (I + \delta T) \\ -(\gamma + \alpha) I \\ \gamma I - \eta T \end{pmatrix}$$

$V =$

$$F = \begin{pmatrix} \beta S & \delta\beta S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{DFE} = \begin{pmatrix} \beta N & \delta\beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -(\gamma+\alpha) & 0 \\ \gamma & -\eta \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma+\alpha} & 0 \\ -\frac{\gamma}{\eta(\gamma+\alpha)} & -\frac{1}{\eta} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta N}{\gamma+\alpha} - \frac{\beta N \delta\gamma}{\eta(\gamma+\alpha)} & -\frac{\delta\beta N}{\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(-FV^{-1}) = \beta N\left(\frac{1}{\gamma+\alpha} + \frac{\delta\gamma}{\eta(\gamma+\alpha)}\right) = R_0.$$

taille finale des suscesptible:

. pour le modèle SIR:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S I \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I - \alpha I \end{cases}$$

$\dot S < 0$

$\dot I = ?$ si: $S(t) > \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \dot I > 0 \Rightarrow I \nearrow^{I_{max}}$

si: $S(t) < \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \dot I < 0 \Rightarrow I \searrow$

pt d'equilibre: $I^* = 0$, $S^* = N$.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\beta N \\ 0 & \beta N - \alpha \end{bmatrix}$$

la linearisation ne permet pas de conclure.

$S_\infty = ?$ (la taille finale des susceptible).

$\dot S + \dot I = -\alpha I$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} (\dot S + \dot I)\, dt = -\alpha \int_0^{+\infty} I(t)\, dt$

$\Rightarrow -\alpha \int_0^{+\infty} I(t)\, dt = S_\infty + I_\infty - (S_0 + I_0) = S_\infty - N.$

$\int_0^{+\infty} I(t)\, dt = \frac{1}{\alpha}(N - S_\infty)$ .... (1)

d'autre part :

$$\frac{\dot S}{S} = -\beta I \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\dot S}{S}\,dt = -\beta \int_0^{+\infty} I(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} I(t)\,dt = -\frac{1}{\beta}\left(\ln \frac{S_\infty}{S_0}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} I(t)\,dt = \frac{1}{\beta}\ln\frac{S_0}{S_\infty} \quad \dots (2)$$

(1) = (2) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\alpha}(N - S_\infty) = \frac{1}{\beta}\ln\frac{S_0}{S_\infty}.$$

$$\Rightarrow \ln\frac{S_0}{S_\infty} = \frac{\beta}{\alpha}(N - S_\infty) = R_0\left(1 - \frac{S_\infty}{N}\right)$$

$$\ln\frac{S_0}{S_\infty} = R_0\left(1 - \frac{S_\infty}{N}\right)$$: Eq. de taille finale

Si $R_0 < 1$: on travaille sur $[0, N]$.

$$f(x) = \ln\frac{S_0}{x} - R_0\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$f(S_\infty) \stackrel{?}{=} 0$.

$f(0^+) = +\infty$, $f(N) < 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{R_0}{N} = \frac{R_0 x - N}{xN}.$$

$x < N \Rightarrow R_0 x < N \Rightarrow R_0 x - N < 0 \Rightarrow f'(x)$

$\Rightarrow \exists S_\infty \in [0, N]$ tq $f(S_\infty) = 0$

Si $R_0 > 1$: on travaille sur $\left[0, \frac{S_0}{R_0}\right]$.

$$f(0^+) = +\infty, \quad f\left(\frac{S_0}{R_0}\right) = \ln\frac{S_0}{S_0/R_0} - R_0\left(1 - \frac{S_0}{R_0 N}\right)$$

$$f\left(\frac{S_0}{R_0}\right) = \ln R_0 - R_0 + \frac{S_0}{N} \leq \ln R_0 - R_0 + 1$$

$$\leq \ln R_0 - (R_0 - 1) \leq 0.$$

(car : on sait que $\ln(x+1) < x \Rightarrow \ln R_0 < R_0 - 1$)

$$f'(x) = \frac{R_0 x - N}{xN} < 0, \quad \exists S_\infty \in \left[0, \frac{S_0}{R_0}\right]$$ tq $f(S_\infty) = 0$.

Modèle avec vaccin :

considérons une pop N,

le modèle SIRS s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S I + \gamma R \\ \dot{I} = \beta S I - \alpha I \\ \dot{R} = \alpha I - \gamma R \end{cases}$$

soit η : la proportion de la pop vaccinée

$N_v = \eta N$ et $N_u = (1-\eta) N$ la pop non vaccinée

prenons en compte la pop vaccinée, le modèle SIR avec vaccin s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{S}_u = -\beta S_u (I_u + \delta I_v) \quad \dots (1) & 0 \leq \delta < 1 \\ \dot{S}_v = -\sigma \beta S_v (I_u + \delta I_v) \quad \dots (2) & 0 \leq \sigma < 1 \\ \dot{I}_u = \beta S_u (I_u + \delta I_v) - \alpha_u I_u \quad \dots (3) & \\ \dot{I}_v = \sigma \beta S_v (I_u + \delta I_v) - \alpha_v I_v \quad \dots (4) & \alpha_u \neq \alpha_v \end{cases}$$

$S_u(0) + I_u(0) = N_u$.

$S_v(0) + I_v(0) = N_v$.

$0 \leq S_u \searrow \Rightarrow \exists\, S_u(\infty)$ tq $\lim_{t \to \infty} S_u(t) = S_u(\infty)$

$0 \leq S_v \searrow \Rightarrow \exists\, S_v(\infty)$ tq $\lim_{t \to +\infty} S_v(t) = S_v(\infty)$

$\overline{S_u + I_u} = -\alpha_u I_u$

$$\Rightarrow -\alpha \int_0^{+\infty} I_u(t)\,dt = S_u(\infty) + I_u(\infty) - (S_u(0) + I_u(0))$$

$$\Rightarrow \frac{N_u - S_u}{\alpha_u} = \int_0^{+\infty} I_u(t)\,dt.$$

$$\Rightarrow \frac{N_v - S_v(\infty)}{\alpha_v} = \int_0^{+\infty} I_v(t)\,dt.$$

$(1) \Rightarrow \dfrac{\dot{S}_u}{S_u} = -\beta (I_u + \delta I_v).$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{S_u(\infty)}{S_u(0)}\right) = -\beta \left[\int_0^{+\infty} I_u(t)\,dt + \delta \int_0^{+\infty} I_v(t)\,dt\right]$$

$$\Rightarrow \ln \frac{S_u(0)}{S_u(\infty)} = \beta\left[\frac{N_u - S_u(\infty)}{\alpha_u} + \delta\frac{(N_v - S_v(\infty))}{\alpha_v}\right]$$

$$\frac{\dot S_v}{S_v} = -\sigma\beta\left[I_u + \delta I_v\right]$$

$$\Rightarrow \ln \frac{S_v(0)}{S_v(\infty)} = \sigma\beta\left[\int_0^{+\infty} I_u(t)\,dt + \delta\int_0^{+\infty} I_v(t)\,dt\right]$$

$$= \sigma\beta\left[\frac{N_u - S_u(\infty)}{\alpha_u} + \delta\frac{N_v - S_v(\infty)}{\alpha_v}\right]$$

$$= \beta\left[\frac{N_u - S_u(\infty)}{\alpha_u} + \delta\frac{N_v - S_v(\infty)}{\alpha_v}\right]$$

$$= \frac{\beta N_u}{\alpha_u}\left(1 - \frac{S_u(\infty)}{N_u}\right) + \delta\frac{\beta N_v}{\alpha_v}\left(1 - \frac{S_v(\infty)}{N_v}\right)$$

$\Rightarrow (1)$

$$= \sigma\beta\left[\frac{(N_u - S_u(\infty))}{\alpha_u} + \delta\frac{(N_v - S_v(\infty))}{\alpha_v}\right]$$

$$= \frac{\sigma\beta N_u}{\alpha_u}\left(1 - \frac{S_u(\infty)}{N_u}\right) + \delta\frac{\sigma\beta N_v}{\alpha_v}\left(1 - \frac{S_v(\infty)}{N_v}\right)$$

posons :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta N_u}{\alpha_u} & \frac{\delta\beta N_v}{\alpha_v} \\ \frac{\sigma\beta N_u}{\alpha_u} & \frac{\delta\sigma\beta N_v}{\alpha_v} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ln\frac{S_u(0)}{S_u(\infty)} = K_{11}\left(1 - \frac{S_u(\infty)}{N_u}\right) + K_{12}\left(1 - \frac{S_v(\infty)}{N_v}\right) \\ \ln\frac{S_v(0)}{S_v(\infty)} = K_{21}\left(1 - \frac{S_u(\infty)}{N_u}\right) + K_{22}\left(1 - \frac{S_v(\infty)}{N_v}\right) \end{cases}$$

. calcul de R_0 :

calcul de R_0 :

$$\begin{cases} \dot{S}_u = -\beta S_u (I_u + \delta I_v) \\ \dot{S}_v = -\sigma\beta S_v (I_u + \delta I_v) \\ \dot{I}_u = \beta S_u (I_u + \delta I_v) - \alpha_u I_u \\ \dot{I}_v = \sigma\beta S_v (I_u + \delta I_v) - \alpha_v I_v \end{cases}$$

$DFE = (N_u, N_v, 0, 0)$.

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta S_u (I_u + \delta I_v) \\ \sigma \beta S_v (I_u + \delta I_v) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\beta S_u (I_u + \delta I_v) \\ -\sigma\beta S_v (I_u + \delta I_v) \\ -\alpha_u I_u \\ -\alpha_v I_v \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \beta N_u & \beta \delta N_u \\ \sigma \beta N_v & \sigma \beta \delta N_v \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & -\alpha_v \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_u} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_v} \end{pmatrix}$$

$$-FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta N_u}{\alpha_u} & \delta \frac{\beta N_u}{\alpha_u} \\ \frac{\sigma \beta N_v}{\alpha_v} & \frac{\sigma \delta \beta N_v}{\alpha_v} \end{pmatrix}$$

$$|-FV^{-1} - \lambda I| = \lambda^2 - \left(\frac{\beta N_u}{\alpha_u} + \frac{\sigma \delta N_v}{\alpha_v} \right) \lambda$$

$$\Rightarrow R_0 = \frac{\beta N_u}{\alpha_u} + \frac{\sigma \delta N_v}{\alpha_v}.$$

Ex : Considérons le modèle de McKendrick avec dynamique de population et une loi de densité dépendante

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu_S S \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu_I I \end{cases}$$

calculer R_0 ?

prenons $\Lambda = \mu N$.

$$S^* = \frac{\mu N}{\mu_S}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \frac{SI}{N} \end{pmatrix} \Rightarrow F = \frac{\beta \mu}{\mu_S}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{\gamma + \mu_I}$$

$$\rho(-FV^{-1}) = \frac{\beta \mu}{\mu_S(\gamma + \mu_I)}.$$

Modèle SIR structuré en âge

Rappel : Modèle de McKendrick Von Foerster

$u(a,t)$: la densité de la pop d'âge a à l'instant t.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu(a)\, u(a,t) & a \geq 0,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\, u(a,t)\, da = B(t) \\ u(a,0) = \Phi(a) \end{cases}$$

$$c_1(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + c_2(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} = c_3(x,y,u).$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1 \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = c_2.$$

ds notre cas :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds} = 1.$$

$$\frac{dt}{da} = 1 \Rightarrow t = a + k \qquad k \in \mathbb{R}.$$

. Si $a > t$: $\quad a = t + c$

$w(t) = u(t+c, t)$.

$w'(t) = -\mu(t+c)\, w(t)$.

$\Rightarrow w(t) = w_0\, e^{-\int_0^t \mu(s+c)\,ds}$.

$w(t) = u(c,0)\, e^{-\int_0^t \mu(s+a-t)\,ds}$.

$= \Phi(a-t)\, e^{-\int_0^t \mu(s+a-t)\,ds}$

$u(a,t) = \Phi(a-t)\, e^{-\int_{a-t}^{a} \mu(s)\,ds}$.

. Si $a < t$: $\quad t = a + c$.

$w(a) = u(a, a+c)$.

$w'(a) = -\mu(a)\, w(a)$.

$\Rightarrow w(a) = w(0)\, e^{-\int_0^a \mu(s)\,ds}$.

$w(a) = u(0,c)\, e^{-\int_0^a \mu(s)\,ds}$.

$u(a,t) = B(t-a)\, e^{-\int_0^a \mu(s)\,ds}$.

Notons par $\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(s)\,ds}$: le taux de survie de la pop jusqu'à l'age a.

$$u(a,t) = \begin{cases} \Phi(a-t)\,\dfrac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} & a \geq t. \\ B(t-a)\,\Pi(a) & a < t. \end{cases}$$

$B(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\, u(a,t)\,da$

$= \int_0^t \beta(a)\, u(a,t)\,da + \int_t^{+\infty} \beta(a) u(a,t)\,da.$

$= \int_0^t \beta(a)\, B(t-a)\,\Pi(a)\,da + \int_t^{+\infty} \beta(a)\,\Phi(a-t) \cdot \dfrac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}\,da$

$= \int_0^t \beta(a)\Pi(a)\, B(t-a)\,da + \int_0^{+\infty} \beta(a+t) \cdot \dfrac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)}\,\Phi(a)\,da$

$B(t) = \int_0^t K(a)\, B(t-a)\,da + L(t)$.

Eq. de Renouvelement.

l'eq. de McKendrick peut etre résolue par séparation de variable

posons $u(a,t) = A(a) \cdot T(t)$.

l'éq. devient:

$$T(t).A'(a) + A(a).T'(t) = -\mu(a) A(a).T(t)$$

$$\frac{A'(a)}{A(a)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = -\mu(a).$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\left[\frac{A'(a)}{A(a)} + \mu(a)\right] = \lambda.$$

$$\frac{T'}{T} = \lambda \Rightarrow T(t) = e^{\lambda t}.$$

$$-\left[\frac{A'}{A} + \mu(a)\right] = \lambda \Rightarrow \frac{A'}{A} = -(\mu(a) + \lambda).$$

$$A(a) = A(0)\, e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds}$$

$$u(a,t) = A(0)\, e^{\lambda(t-a) - \int_0^a \mu(s)ds}$$

$$u(a,t) = A(0)\, \pi(a)\, e^{\lambda(t-a)}.$$

$$A(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a).A(0)\, e^{-\lambda a} \pi(a)\, da.$$

$A(0) \neq 0.$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \beta(a)\, \pi(a)\, e^{-\lambda a}\, da = 1.$$

Éq. caractéristique

Lemme.

Si $\beta(a) \geq \bar{\beta} > 0$ pour $a \in [a_1, a_2]$, alors:

$\exists \lambda^* !$ sol de l'éq. caractéristique.

λ^* s'appelle le taux de croissance de la pop similaire au taux de croissance Malthusien.

Preuve.

Posons $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \beta(a).\pi(a).e^{-\lambda a}\, da.$

$F \searrow$, $\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = 0.$

posons $R = F(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a).\pi(a)\, da.$

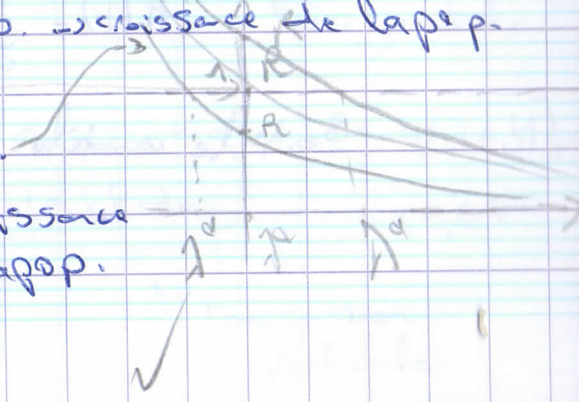
R: s'appelle taux de reproduction net de la pop.

si $R > 1 \Leftrightarrow \lambda^* > 0.$ → croissance de la pop.

si $R = 1 \Leftrightarrow \lambda^* = 0.$

si $R < 1 \Leftrightarrow \lambda^* < 0.$

décroissance de la pop.



$A(0) = ?$

$u(a,t) = A_0 \, \Pi(a) \, e^{\lambda^* t} \, e^{-\lambda^* a}$

$P(0) = \int_0^{+\infty} \Phi(a) \, da = \int_0^{+\infty} u(a,0) \, da.$

$= A_0 \int_0^{+\infty} \Pi(a) \, e^{-\lambda^* a} \, da.$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{\int_0^{+\infty} \Phi(a) \, da.}{\int_0^{+\infty} \Pi(a) \, e^{-\lambda^* a} \, da}.$$

$\boxed{S}$ $\boxed{I}$ $\boxed{R}$

$u(a,t) = s(a,t) + i(a,t) + r(a,t).$

$S(t) = \int_0^{+\infty} s(a,t) \, da \; ; \; I(t) = \int_0^{+\infty} i(a,t) \, da \; ;$

$R(t) = \int_0^{+\infty} r(a,t) \, da.$

Soit le modèle SIR structuré en âge

$$(1) \begin{cases} s_a + s_t = -\lambda(a,t) \, s(a,t) - \mu(a) \, s(a,t). \\ i_a + i_t = \lambda(a,t) \, s(a,t) - (\mu(a) + \gamma(a)) \, i(a,t). \\ r_a + r_t = \gamma(a) \, i(a,t) - \mu(a) \, r(a,t) \end{cases}$$

la force d'infection $\lambda(a,t)$ est définie comme suite

$\lambda(a,t) = \mathcal{J}(a) \, i(a,t) + \int_0^{+\infty} k(a,\tau) \, i(\tau, t) \, d\tau.$

$\lambda(a,t) = f(a) \, i(a,t).$ ← les infectés infecte les sub qui le même âge

$\lambda(a,t) = \int_0^{+\infty} k(a,\tau) \, i(\tau,t) \, d\tau.$ que ceux

l'infection ne dépend pas de l'âge

$k(a,\tau) = k_1(a) \, . \, k_2(\tau)$ $\quad i(a,t) \overset{k(a,\tau)}{\rightsquigarrow} s(a,t)$

$$\begin{cases} s(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a) \, u(a,t) \, da. \\ i(0,t) = 0 \\ r(0,t) = 0 \end{cases}$$

← transmission horizontale

$$\begin{cases} s(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a) \left[s(a,t) + r(a,t) + (1-q) \, i(a,t) \right] da. \\ i(0,t) = q \int_0^{+\infty} \beta(a) \, i(a,t) \, da. \quad 0 \leq q \leq 1. \\ r(0,t) = 0 \end{cases}$$

↑ transmission verticale

avec les conditions initiales:

$s(a,0) = S_0(a)$; $i(a,0) = i_0(a)$; $r(a,0) = r_0(a)$

Etat d'equilibre et Taux de reproduction de base

$$\begin{cases} s_a = -\lambda(a)\, s(a) - \mu(a)\, s(a) \\ i_a = \lambda(a)\, s(a) - (\mu(a) + \gamma(a))\, i(a) \\ r_a = \gamma(a)\, i(a) - \mu(a)\, r(a) \end{cases}$$

$S(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a) u(a)\, da$; $i(0) = 0$; $r(0) = 0$

$\lambda(a) = k_1(a) \int_0^{+\infty} k_2(\tau)\, i(\tau)\, d\tau = \hat{\lambda}\, k_1(a)$.

$\hat{\lambda} \geq 0$

DFE (Equilibre sans maladie). ($i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = 0$).

$S(a) = S_0\, e^{-\int_0^a \mu(\sigma)\, d\sigma} = S_0\, \pi(a)$.

DFE $(S_0 \pi(a), 0, 0)$

Equilibre Endimique $\hat{\lambda} \neq 0$:

$S(a) = S(0)\, \pi(a)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^a k_1(\sigma)\, d\sigma}$.

① + ② + ③ $\Rightarrow$

$u_a = -\mu(a)\, u(a) \Rightarrow u(a) = u_0\, \pi(a) = S_0 \pi(a)$.

2/ $\Rightarrow i_a + (\mu(a) + \gamma(a))\, i(a) = \lambda(a)\, s(a) = \hat{\lambda}\, k_1(a) S_0\, \pi(a)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^a k_1(\sigma)\, d\sigma}$

$$\frac{d}{da}\left[i(a)\, e^{\int_0^a (\mu(s)+\gamma(s))\, ds} \right] = \hat{\lambda}\, k_1(a) S_0\, \pi(a)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^a k_1(\sigma)\, d\sigma}\, e^{\int_0^a (\mu(s)+\gamma(s))\, ds}$$

$$i(a)\, e^{\int_0^a (\mu(s)+\gamma(s))\, ds} = \int_0^a \hat{\lambda}\, k_1(\eta) S_0\, \pi(\eta)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^\eta k_1(\sigma)\, d\sigma}\, e^{\int_0^\eta (\mu(s)+\gamma(s))\, ds}\, d\eta$$

$$i(a) = \hat{\lambda}\, S(0) \int_0^a k_1(\eta)\, \pi(\eta)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^\eta k_1(\sigma)\, d\sigma}\, e^{\int_0^\eta (\mu(s)+\gamma(s))\, ds}\, e^{-\int_0^a (\mu(s)+\gamma(s))\, ds}\, d\eta$$

$$= \hat{\lambda}\, S(0) \int_0^a k_1(\eta)\, e^{-\int_0^\eta \mu(s)\, ds}\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^\eta k_1(\sigma)\, d\sigma}\, e^{-\int_\eta^a (\mu(s)+\gamma(s))\, ds}\, d\eta$$

$$i(a) = \hat{\lambda}\, S(0)\, \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^\eta k_1(\sigma)\, d\sigma}\, e^{-\int_\eta^a \gamma(s)\, ds}\, d\eta$$

$\hat{\lambda}$: existe ? $\hat{\lambda}$? $n(a)$ existe ?
EE ($i \neq 0$).

$\hat{\lambda} = ?$

$$\hat{\lambda} = \int_0^{+\infty} k_2(\tau)\, i(\tau)\, d\tau$$

$$= \cancel{k_1(a) \int_0^{+\infty} k_2(\tau) \hat{\lambda} S(0) \bar{\pi}(\tau) \int_0^{\tau} k_2(\eta)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^{\eta} k_1(\sigma)d\sigma}}$$

$$\int_0^{+\infty} k_2(\tau)\, \hat{\lambda} S(0) \bar{\pi}(\tau) \cdot \int_0^{\tau} k_2(\eta)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^{\eta} k_1(\sigma) d\sigma}\, e^{-\int_\eta^{\tau} \gamma(s) ds}\, d\eta\, d\tau$$

$$S(0) \int_0^{+\infty} k_2(\tau)\, \bar{\pi}(\tau) \int_0^{\tau} k_1(\eta)\, e^{-\hat{\lambda}\int_0^{\eta} k_1(\sigma) d\sigma}\, e^{-\int_\eta^{\tau} \gamma(s) ds}\, d\eta\, d\tau$$

$$F(\lambda) = S(0) \int_0^{+\infty} k_2(\tau)\, \bar{\pi}(\tau) \int_0^{\tau} k_1(\eta)\, e^{-\lambda \int_0^{\eta} \cdots}\, d\eta\, d\tau$$

~~est strictement~~

$\int_0^{\eta} k_1(\sigma) d\sigma \neq 0$, $F(\lambda)$ est strictement decroissante en λ.

$$\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = 0$$

definit le taux de reproduction de base

$$R_0 = S_0 \int_0^{+\infty} k_2(a)\, \bar{\pi}(a) \int_0^{a} k_1(\eta)\, e^{-\int_\eta^{a} \gamma(\sigma) d\sigma}\, d\eta\, da$$

$R_0 = F(0)$

si $R_0 > 1$, $\exists\, \hat{\lambda}_1 > 0$ sol de l'eq $F(\lambda) = 1$.
la sol $i^*(a)$ et $r^*(a)$ sont obtenu à partir de λ^*

$$r^*(a) = n(a) - S^*(a) - i^*(a).$$

prop : le modèle (2) admet un DFE $(S^*(a), 0, 0)$

si $R_0 > 1$, le modèle admet un equilibre endémique $(S^*(a), i^*(a), r^*(a))$.

Rappel :

<u>DFE</u> $(S^*(a), 0, 0)$

$$R = f(0) = \int^{\infty} \beta(a)\, \bar{\pi}(a)\, da.$$

si $R > 1 \iff \lambda^* > 0$

si $R < 1 \iff \lambda^* < 0$.

<u>EE</u> $(S^*(a), i^*(a), r^*(a))$

$R_0 > 1$, EE existe

Etude de stabilité

Stabilité locale du DFE :

on perturbe ξ^*

$S(a,t) = S^*(a) + x(a,t)$.

$i(a,t) = i^*(a) + y(a,t)$.

$u(a,t) = u^*(a) + p(a,t)$.

on remplace dans (*) (on perturbe λ ce qu'il dépend du temps $\lambda(a,t)$)

$$x_t + S^*_a + x_a = -(\lambda^*(a) + \tilde{\lambda}(a,t))(S^*(a) + x(a,t)) - \mu(a)(S^*(a) + x(a,t)).$$

$$y_t + i^*_a + y_a = (\lambda^*(a) + \tilde{\lambda}(a,t))(S^*(a) + x(a,t)) - (\mu(a) + \delta(a))(i^*(a) + y(a,t))$$

$$p_t + u^*_a + p_a = -\mu(a)(u^*(a) + p(a,t))$$

$$S^*(0) + x(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)(u^*(a) + p(a,t))\,da.$$

$$i^*(0) + y(0,t) = 0.$$
$$u^*(0) + p(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)(u^*(a) + p(a,t))\,da.$$

avec

$$\lambda^*(a) = k_1(a) \int_0^{+\infty} k_2(a)\, i^*(a)\, da.$$

$$\tilde{\lambda}(a,t) = k_1(a) \int_0^{+\infty} k_2(a)\, y(a,t)\, da.$$

$$\lambda(a,t) = \lambda^*(a) + \tilde{\lambda}(a,t) = k_1(a) \int_0^{+\infty} k_2(a)(i^*(a) + y(a,t))\, da$$

le système linéarisé de (*)

$$\begin{cases} x_t + x_a = -\lambda^*(a)x(a,t) - \tilde{\lambda}(a,t)S^*(a) - \mu(a)x(a,t) \\ y_t + y_a = \lambda^*(a)x(a,t) + \tilde{\lambda}(a,t)S^*(a) - (\mu(a) + \delta(a))y(a,t) \\ p_t + p_a = -\mu(a)p(a,t) \end{cases}$$

$$x(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(a,t)\,da.$$

$$y(0,t) = 0$$
$$p(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(a,t)\,da.$$

(sachant que : $\tilde{\lambda}(a,t)\, x(a,t)$ est négligeable / les puissances d'ordre supérieure, on les néglige) on cherche des sols de la forme :

$x(a,t) = x(a)\, e^{\rho t}$; $y(a,t) = y(a)\, e^{\rho t}$;

$p(a,t) = p(a)\, e^{\rho t}$.

$$\begin{cases} x_a + \rho x(a) = -\lambda^*(a) x(a) - \tilde{\lambda}(a) S^*(a) - \mu(a) x(a) \\ y_a + \rho y(a) = \lambda^*(a) x(a) + \tilde{\lambda}(a) S^*(a) - (\mu(a) + \gamma(a)) y(a) \\ p_a + \rho p(a) = -\mu(a) p(a) \\ x(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a) p(a)\, da \\ y(0) = 0 \\ p(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a) p(a)\, da \end{cases}$$

Pour l'equilibre sans maladie

DFE $(S^*(a), 0, 0)$.

$$\begin{cases} x_a + \rho x(a) = -\tilde{\lambda}(a) S_0 \pi(a) - \mu(a) x(a) \\ y_a + \rho y(a) = \tilde{\lambda}(a) S_0 \pi(a) - (\mu(a) + \gamma(a)) y(a) \\ P_a + \rho p(a) = -\mu(a) p(a) \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}(a) = k_1(a) \int_0^{+\infty} k_2(a) y(a)\, da = \tilde{\lambda}\, k_1(a).$$

$\tilde{\lambda}$: constante inconnue.

l'eq en y (indépendante des autres).

$$y_a + (\rho + \mu(a) + \gamma(a)) y = \tilde{\lambda}\, k_1(a) S_0 \pi(a).$$

$$\frac{d}{da}\left[y\, e^{\int_0^a (\rho + \mu(s) + \gamma(s))\, ds} \right] = \tilde{\lambda}\, k_1(a) S_0 \pi(a) \cdot e^{\int_0^a \rho + \mu(s) + \gamma(s)\, ds}$$

⋮

$$y(a) = \tilde{\lambda} S_0 \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)\, e^{-\int_\eta^a (\rho + \gamma(s))\, ds}\, d\eta.$$

$\tilde{\lambda} = ?$

$$\tilde{\lambda} = \int_0^{+\infty} k_2(a) y(a)\, da = \int_0^{+\infty} k_2(a) \tilde{\lambda} S_0 \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)\, e^{-\int_\eta^a (\rho + \gamma(s))\, ds}\, d\eta\, da$$

$$1 = S_0 \int_0^{+\infty} k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)\, e^{-\int_\eta^a (\rho + \gamma(s))\, ds}\, d\eta\, da$$

posons : $G(\lambda) = S_0 \int_0^{+\infty} k_2(a)\bar{n}(a) \int_0^{+\infty} k_1(\eta)\, e^{-\int_\eta^a (\lambda + \delta(s))\, ds}\, d\eta\, da.$

et $R_0 = G(0)$.

G est decroissante si $k_1(a) \geq 0$ et $\not\equiv 0$.

Ainsi : si $R_0 > 1$ $(G(0) > 0)$
l'eq $G(\lambda) = 1$ a une sol réelle $\lambda > 0$ et
l'equilibre est instable.

si $R_0 < 1$:
on demontre que toute sol complexe à une
partie relle negative
supposons :
$\lambda = \xi_1 + i\xi_2$ avec $\xi_1 \geq 0$.

$$|G(\lambda)| \leq S_0 \int_0^{+\infty} k_2(a)\,\bar{n}(a) \int_0^{+\infty} k_1(\eta)\, e^{-\int_\eta^a \delta(s)\, ds}\, e^{-\int_\eta^a \xi_1\, ds}\, \left|\cos(a-\eta)\xi_2 - i\sin(a-\eta)\xi_2\right|$$

$$\leq G(\xi_1) \leq G(0) = R_0 < 1.$$

or G décroissante

contradiction $\Rightarrow \xi_1 < 0$.

Thm : si $R_0 < 1$ le DFE est LAS.
si $R_0 > 1$ le DFE est instable

Etude d'un modèle non linéaire structuré en âge

Considérons le modèle :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial a}(t,a) = -\mu(a, S(t))\, p(t,a) & t>0,\ a\in[0,w] \\ p(t,0) = \displaystyle\int_0^w \beta(\sigma, S(t))\, p(t,\sigma)\, d\sigma = B(t, S(t)) & t>0 \\ S(t) = \displaystyle\int_0^w \gamma(\sigma)\, p(t,\sigma)\, d\sigma \\ p(0,a) = p_0(a) \end{cases}$$

Si $\gamma \equiv 1 \Rightarrow$ Modèle de Gurtin MacCamy (1974)

si $\gamma = 1$: $S(t)$ représente la ... de la pop.
sinon → à prop de la pop.

$$\frac{dt}{1} = \frac{da}{1} \Rightarrow t - a = c \Rightarrow t = a + c$$
ou $a = t + c$

Si $t > a \Rightarrow t = a + c$.

$w(a) = p(a+c, a)$.

$$\frac{dw}{da} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -\mu(a, S(a+c))\, w(a).$$

$$w(a) = w(0)\, e^{-\int_0^a \mu(\xi, S(\xi+c))\, d\xi}$$

$$p(t,a) = p(t-a, 0)\, e^{-\int_0^a \mu(\xi, S(\xi+c))\, d\xi}.$$

$$= \int_0^w \beta(\sigma, S(t-a))\, p(t-a,\sigma)\, d\sigma\, e^{-\int_0^a \mu(\xi, S(\xi+c))\, d\xi}$$

$$\boxed{p(t,a) = B(t-a, S(t-a))\, e^{-\int_0^a \mu(\xi, S(\xi+t-a))\, d\xi}}$$

Si $a \geq t \Rightarrow a = t + c$

on pose $w(t) = p(t, t+c)$

$$\frac{dw}{dt} = -\mu(t+c, S(t))\, w(t)$$

$$\Rightarrow w(t) = w(0)\, e^{-\int_0^t \mu(\xi+c, S(\xi))\, d\xi}.$$

$$\boxed{p(t,a) = p_0(a-t)\, e^{-\int_0^t \mu(\xi+a-t, S(\xi))\, d\xi}}.$$

Notons par :

$$\pi(h, t, a, S) = e^{-\int_0^h \mu(a+\xi, S(t+\xi))\, d\xi} \qquad h \geq 0$$

$$\Pi(t,0,a-t,S) = e^{-\int_0^t \mu(a-t+\xi,\, S(\xi))\, d\xi}$$

$$\Pi(a,t-a,0,S) = e^{-\int_0^a \mu(\xi,\, S(t-a+\xi))\, d\xi}$$

$$P(t,a) = \begin{cases} P_0(a-t)\,\Pi(t,0,a-t,S) & a \geq t \\ B(t-a,S)\,\Pi(a,t-a,0,S) & a < t \end{cases}$$

existe-t-elle
elle va être de cette forme

S, B sont inconnus, on cherche des eq pr les déterminer

par B :

$$B(t) = \int_0^{+\infty} \beta(\sigma, S(t))\, p(t,\sigma)\, d\sigma \quad \text{avec } \beta(a) = 0 \text{ si } a \geq w$$

$$= \int_0^t \beta(\sigma, S(t))\, p(t,\sigma)\, d\sigma + \int_t^{+\infty} \beta(\sigma, S(t))\, p(t,\sigma)\, d\sigma$$

$$= \int_0^t \beta(\sigma, S(t))\, B(t-a)\, \Pi(a,t-a,0,S)\, d\sigma + \int_t^{+\infty} \beta(\sigma, S(t))\, P_0(a-t)\, \Pi(t,0,a-t,S)\, d\sigma$$

$$B(t) = G(t,S) + \int_0^t \beta(\sigma, S(t))\, \Pi(a,t-a,0,S)\, B(t-a)\, d\sigma$$

$$\text{avec } G(t,S) = \int_t^{+\infty} \beta(\sigma, S(t))\, P_0(a-t)\, \Pi(t,0,a-t,S)\, d\sigma$$

par S :

$$S(t) = \int_0^{+\infty} \gamma(\sigma)\, p(t,\sigma)\, d\sigma$$

$$= \int_0^t \gamma(\sigma)\, B(t-\sigma,S)\, \Pi(\sigma,t-\sigma,0,S)\, d\sigma + \int_t^{+\infty} \gamma(\sigma)\, P_0(\sigma-t)\, \Pi(t,0,\sigma-t,S)\, d\sigma$$

$$H(t,S) = \int_t^{+\infty} \gamma(\sigma)\, P_0(\sigma-t)\, \Pi(t,0,\sigma-t,S)\, d\sigma$$

$$\Rightarrow S(t) = H(t,S) + \int_0^t \gamma(\sigma)\, \Pi(\sigma,t-\sigma,0,S)\, B(t-\sigma,S)\, d\sigma$$

on obtient finalement un système d'équation intégrale de Volterra :

$$\begin{cases} B(t) = G(t,S) + \int_0^t \beta(\sigma, S(t))\, \Pi(a,t-a,0,S)\, B(t-a)\, d\sigma \\ S(t) = H(t,S) + \int_0^t \gamma(\sigma)\, \Pi(\sigma,t-\sigma,0,S)\, B(t-\sigma,S)\, d\sigma \end{cases}$$

si (B, S) est connu alors la sol du pb (1) est connue faisons les hypothèses suivantes

$\int_0^w \mu(\sigma,x)\,d\sigma = +\infty$

Hyp :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\beta(\cdot,x) \in L^1(0,w)$

$\mu(\cdot,x) \in L^1_{loc}(0,w)$, $\mu(a,x) \geq 0$

et $\exists \bar\beta > 0$ tq $0 \leq \beta(a,x) < \bar\beta$

$\forall (a,x) \in [0,w] \times \mathbb{R}_+$.

$\forall M > 0$, $\exists L(M)$ tq :

$|\beta(a,x) - \beta(a,\bar x)| \leq L(M)\,|x - \bar x|$.

$|\mu(a,x) - \mu(a,\bar x)| \leq L(M)\,|x - \bar x|$.

si $|x| \leq M$ et $|\bar x| < M$

$\gamma \in L^\infty_+(0,w)$.

si $S \in C_+[0,T]$.

$\Rightarrow P(t,\cdot) \in C_+([0,T], L^1(0,w))$

Posons $E = C([0,T], L^1(0,w))$

et $K = \{ q \in E$, $q(t,a) \geq 0$, $\|q(t,\cdot)\|_{L^1} \leq M \}$

si $q \in K$.

$Q(t) = \int_0^w \gamma(a)\, q(t,a)\,da$.

$K \subset E$ fermé ~~fermé~~ (on peut le voir comme image réciproque d'un fermé par une fct continue)

on définit F opérateur

$F : K \subset E \longrightarrow E$.

$$(Fq)(t,a) = \begin{cases} P_0(a-t)\,\Pi(t,0,a-t,Q) & a \geq t \\ B(t-a,Q)\,\Pi(a,t-a,0,Q) & a < t \end{cases}$$

on $P_0 \in L^1(0,w)$.

Prop: Soit $P_0 \in L^1(0,w)$, alors $\exists$ un unique p ds K tq :

$$P(t,a) = \begin{cases} P_0(a-t)\,\Pi(t,a,a-t,S) & a \geq t \\ B(t-a,S)\,\Pi(a,t-a,a,S) & a < t \end{cases}$$

en plus P satisfait :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial a} = -\mu(a,S(t))\,P(t,a)$$

$(t,a) \in \mathbb{R}_+ \times [0,w]$

$$\|P(t,.)\|_{L^1} \leq e^{\bar{\beta}t}\,\|P_0\|_{L^1}.$$

$$\|P(t,.) - \bar{P}(t,.)\| \leq e^{C(M,T)}\,\|P_0 - \bar{P}_0\|_{L^1}$$

où $C(M,T)$ est une cte qui dep de M et T

et $\bar{P}$ est la sol correspond à la condition initiale $\bar{P}_0$.

Preuve : 2 pts à vérifie :

1). $F : K \longrightarrow K$ $\quad (F(K) \subset K)$

2) F est une contraction

Thm de Banach-Picard

existence et unicité de la sol.

Etats stationnaires :

Soit $p^*(a)$ un etat stationnaire du pb (1)

$$\begin{cases} \dfrac{dp^*}{da} = -\mu(a,S)\,p^*(a) & \dots (1) \\ p^*(0) = \int_0^w \beta(\sigma,S)\,p^*(\sigma)\,d\sigma. & \dots (2) \\ S^* = \int_0^w \gamma(\sigma)\,p^*(\sigma)\,d\sigma & \dots (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow p^*(a) = p^*(0)\,e^{-\int_0^a \mu(\sigma,S)\,d\sigma}.$$

$$p^*(0) = \int_0^w \beta(a,S^*)\,p^*(0)\,e^{-\int_0^a \mu(\sigma,S^*)\,d\sigma}\,da$$

$p^*(0) = 0$, on a $p^*(a) = 0$. $\forall a$.

si $p^* \neq 0$.

$$\int_0^w \beta(a,S^*)\,e^{-\int_0^a \mu(\sigma,S^*)\,d\sigma}\,da = 1.$$

posons $\Pi(a,S^*) = e^{-\int_0^a \mu(\sigma,S^*)\,d\sigma}.$

d'où : $\int_0^w \beta(a,S^*)\,\Pi(a,S^*) = 1$.

et $P^*(a) = P^*(0)\,\pi(a, S^*)$.

$$S^* = \int_0^w \gamma(a) P^*(a)\,da = \int_0^w \gamma(a)\, P^*(0)\,\pi(a, S^*)\,da$$

$$P^*(0) = \frac{S^*}{\int_0^w \gamma(a)\,\pi(a, S^*)\,da}$$

$$\Rightarrow P^*(a) = \frac{S^*\,\pi(a, S^*)}{\int_0^w \gamma(a)\,\pi(a, S^*)\,da}$$

on pose :

$$R(S) = \int_0^w \beta(a,S)\,\pi(a,S)\,da$$

on appelle R le taux de reproduction de base.

état stationnaire existe si $R(S^*) = 1$.

Hyp : (technique)

$$\begin{cases} R'(S) > 0 & \text{si } 0 < S < S_0 \\ R'(S) < 0 & \text{si } S > S_0 \\ \lim_{S \to \infty} R(S) = 0 \end{cases}$$

Rappel $\frac{dP}{dt} = \alpha(P)\,P$ effet Allée

$\alpha(P) = r(1 - \frac{P}{K})$ $\alpha(P) = r(K-P)(P-M)$

$\alpha(P) < 0$ si $P < K$ $\alpha(P) > 0$ si

$\frac{dP}{dt} = \alpha(P)\,P$ $\alpha(P) = r(1 - \frac{P}{K})$

$\alpha(P) = r(K-P)(P-K)$ $\alpha'(P) < 0$

$$\begin{cases} \alpha'(P) > 0 \\ \alpha'(P) < 0 \end{cases}$$

Prop : Soit $R_0 = R(0)$.

1) si $R_0 > 1$ $\exists$ une solution stationnaire unique.

2) si $R_0 < 1$ et $R(S_0) > 1$, il existe 2 sol stationnaire.

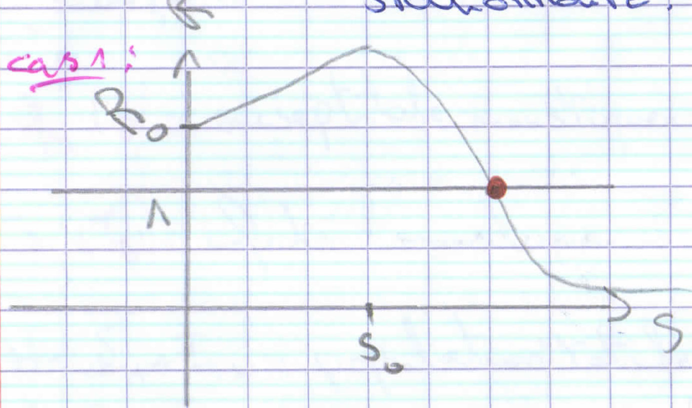
3) si $R_0 < 1$ et $R(S_0) < 1$ il n'existe pas de solution stationnaire.

si $S_0 = 0$: on a 2 cas possible

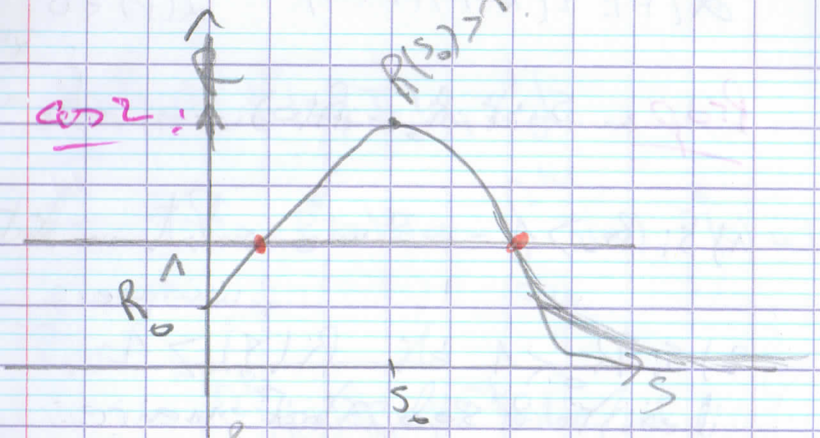
i) si $R_0 > 1$ $\exists$ un equilibre unique non triviale.

ii) si $R_0 \leq 1$ il n'existe pas de sol stationnaire.

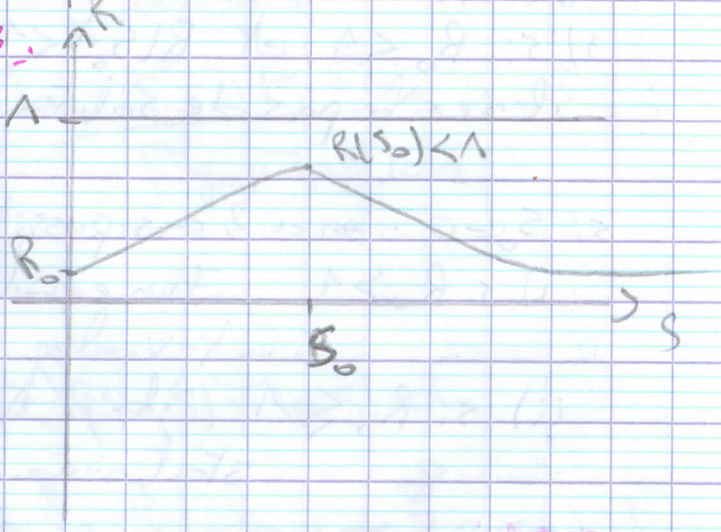
cas 1 :



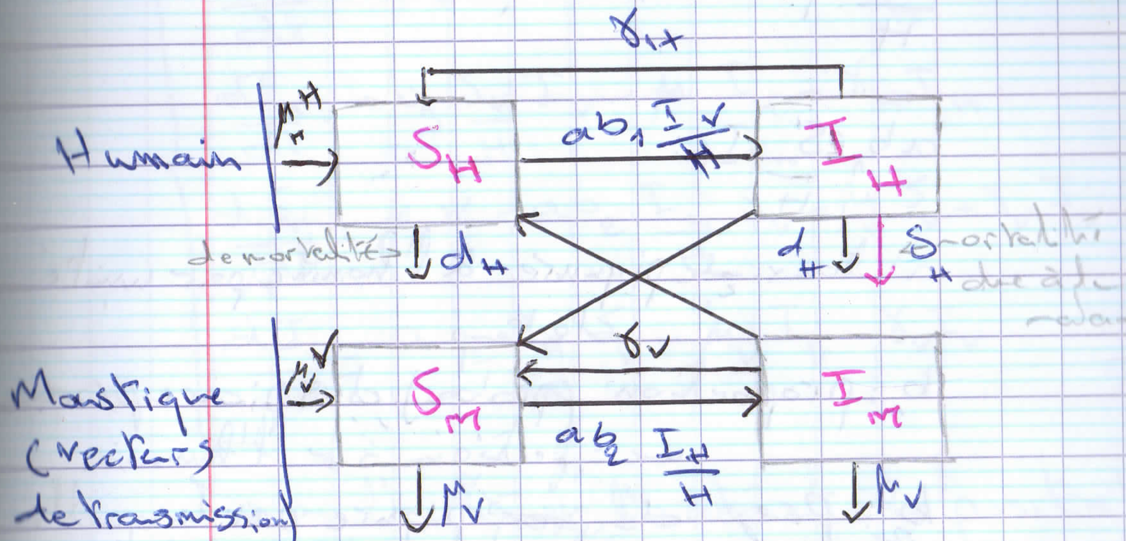
cas 2 :



cas3 :



Modèle de Ronald-Ross :



S_H : susceptible humain.

I_H : infecté.

S_M (S_V) : susceptible moustique

I_M (I_V) : infecté moustique

$H = S_H + I_H$: population totale des humains

$V = S_V + I_V$: " " des moustiques

$\frac{S_H}{H}$: proba qu'un être humain est susceptible

$ab_1 \frac{S_H}{H} I_V$:

a : taux de piqure à l'homme par unité de temp.

b_1 : proportion (proba) des picure produisant infection sur l'humain

b_2 : prop de ~~prop~~ piqure par lesquelle un moustique sus devient infecté

γ_H : taux de guerrison des etre humain

d_H : taux de mortalité naturelle des humains

δ_H : taux de mortalité du à la maladie

μ_V : taux de mortalité naturelle des moustiques

γ_V : taux te guerrison des moustique

(pour Rosse il n'a pas considerer la mortalité du à la maladie, et il a considerer la pop cst) !

$$\begin{cases} \frac{dS_H}{dt} = \mu_H H + \gamma_H I_H - ab_1 \frac{S_H}{H} I_V - \mu_H S_H \\ \frac{dI_H}{dt} = ab_1 \frac{S_H}{H} I_V - \mu_H I_H - \gamma_H I_H \\ \frac{dS_V}{dt} = \mu_V V - ab_2 \frac{I_H}{H} S_V - \mu_V S_V + \gamma_V I_V \\ \frac{dI_V}{dt} = ab_2 \frac{I_H}{H} S_V - \mu_V I_V - \gamma_V I_V \end{cases}$$

on a l'existence, l'unicité et la positivité de la sol, m̂ la globalité.

la globalité :

$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = c^{st}$ d'où $S_H < c^{st}$ et $I_H < c^{st}$.

etude mathématique :

$S_H = H - I_H$, $S_V = V - I_V$

notre systeme devient :

$$\begin{cases} \dot{I}_H = ab_1 (H - I_H) \frac{I_V}{H} - (\mu_H + \gamma_H) I_H \\ \dot{I}_V = ab_2 \frac{I_H}{H} (V - I_V) - (\mu_V + \gamma_V) I_V \end{cases}$$

on pose: $x=\frac{I_H}{H}$, $y=\frac{I_V}{V}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = ab_1\frac{V}{H}(1-x)y-(\mu_H+\gamma_H)x \\ \dot{y} = ab_2\,x(1-y)-(\mu_V+\gamma_V)y \end{cases}$$

$r=\frac{V}{H}$, $\mu_H+\gamma_H=\gamma$, $\mu_V+\gamma_V=\mu$.

r: le ration du nbr de moustique femelle par humain

$x,y\in[0,1]$.

OFE: l'equilibre sans maladie $(0,0)$.

EE: l'equilibre endimique: est sol de

$$ab_1r(1-x^*)y^*-\gamma x^*=0$$
$$ab_2x^*(1-y^*)-\mu y^*=0$$

$$x^*=\frac{\frac{a^2rb_1b_2}{\mu\gamma}-1}{\frac{a^2rb_1b_2}{\mu\gamma}+\frac{b_2a}{\mu}}\quad\Big|\ x^*,y^*<1$$

$$y^*=\frac{\frac{a^2rb_1b_2}{\mu\gamma}-1}{\frac{a^2rb_1b_2}{\mu\gamma}+\frac{rb_1a}{\gamma}}\quad\Big|\ \frac{a^2rb_1b_2}{\mu\gamma}>1$$

R_0^2.

amophel (le type de moustique qui transmet le palu

presk dépasse des [illegible]

$\Rightarrow(x^*,y^*)$ est EE.

calcul de R_0:

$$F.V^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{ab_1r}{\mu}\\ \frac{ab_2}{\gamma} & 0\end{pmatrix}$$

$$\to R_0=a\sqrt{\frac{b_1b_2r}{\gamma\mu}}$$

Stabilité local de l'OFE

$$J(0,0)=\begin{pmatrix}-\gamma & ab_1r\\ ab_2 & -\mu\end{pmatrix}=F-V$$

$(0,0)$ est L.A.S ssi $R_0<1$

instable si $R_0>1$.

$\mathrm{tr}\,J(0,0)=-\gamma-\mu<0$; $\det J(0,0)=\gamma\mu-ab_1b_2r$

$(0,0)$ L.A.S ssi $\det J>0\Rightarrow\frac{a^2b_1b_2r}{\gamma\mu}<1$.

paludisme

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -ab_1 r y - \gamma & ab_1 r(1-x) \\ ab_2(1-y) & -ab_2 x - \mu \end{pmatrix}$$

$$J(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) = \begin{pmatrix} -ab_1 r\overset{*}{y} - \gamma & ab_1 r(1-\overset{*}{x}) \\ ab_2(1-\overset{*}{y}) & -ab_2\overset{*}{x} - \mu \end{pmatrix}$$

on a :

$ab_1 r(1-\overset{*}{x})\overset{*}{y} - \gamma\overset{*}{x} = 0$

$ab_2\overset{*}{x}(1-\overset{*}{y}) - \mu\overset{*}{y} = 0.$

la matrice devient ;

$$J(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) = \begin{pmatrix} -ab_1 r\dfrac{\overset{*}{y}}{\overset{*}{x}} & ab_1 r(1-\overset{*}{x}) \\ ab_2(1-\overset{*}{y}) & -ab_2\dfrac{\overset{*}{x}}{\overset{*}{y}} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr} J(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) < 0.$

$\det J(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) = a^2 b_1 b_2 r\,(1-(1-\overset{*}{x})(1-\overset{*}{y})) > 0.$

d'où : $(\overset{*}{x},\overset{*}{y})$ est L.A.S s'il existe

i.e si : $\dfrac{a^2 b_1 b_2 r}{\gamma\mu} > 1.$

. calcul de R_0 :

$DFE = (0,0).$

$$F = \begin{pmatrix} ab_1 r y(1-x) \\ ab_2 x(1-y) \end{pmatrix} ; \quad V = \begin{pmatrix} \gamma x \\ \mu y \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} -ab_1 r y & ab_1 r(1-x) \\ ab_2(1-y) & -ab_2 x \end{pmatrix}.$$

$$F\Big|_{DFE} = \begin{pmatrix} 0 & ab_1 r \\ ab_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a b_1 r}{\mu} \\ \frac{a b_2}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(FV^{-1}) = a \sqrt{\frac{b_1 b_2 r}{\gamma \mu}} = R_0.$$

Modèle épidémiologique structuré en âge

Considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda(t) S(t). \\ \frac{\partial i(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial i(t,\tau)}{\partial \tau} = -\gamma(\tau)\, i(t,\tau). \\ \frac{dR}{dt} = \int_0^{+\infty} \gamma(\tau)\, i(t,\tau)\, d\tau \end{cases}$$

$i(t,\tau)$: la densité des individus infectés depuis un temps τ.

$\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \beta(\tau)\, i(t,\tau)\, d\tau$; la force d'infection

les infectés venant de tout les infectés

$S(0) = S_0$.

$i(t,0) = \lambda(t) S(t)$.

$R(0) = R_0$.

$i(0,\tau) \overset{\Sigma}{=} i_0(\tau)$!!

Supposons que la pop est constante.

$N = S + \int_0^{+\infty} i(t,\tau)\, d\tau + R.$

(Etat stationnaire)

$\int_{\tau - t}^{\tau}$

$i(t,\cdot) \in L^1_+(0,+\infty)$ et $i(t,+\infty) = 0$.

Etats d'equilibre:

$DFE = (N, 0, 0)$.

$S(t) = N + x(t)$.
$i(t,\tau) = 0 + y(t,\tau)$.
$R(t) = 0 + z(t)$

$$\frac{\partial y(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \tau}(t,\tau) = -\gamma(\tau)\, y(t,\tau).$$

(on néglige les equations de S et de R)

si $t > \tau$ $\quad t = \tau + c$.

$w(\tau) = y(\tau + c, \tau)$.

$$\frac{dw}{d\tau} = -\gamma(\tau) w(\tau) \Rightarrow w(\tau) = w(0)\, e^{-\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}$$

$$y(t,\tau) = y(t-\tau, 0)\, e^{-\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}$$

$$= v(t-\tau)\, e^{-\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}.$$

où $v(t) = y(t,0)$.

si $\tau > t \Rightarrow \tau = t + c$.

$w(t) = y(t, t+c)$.

$$\frac{dw}{dt} = -\gamma(t+c)\, w(t).$$

$$\Rightarrow w(t) = w(0)\, e^{-\int_0^t \gamma(s+c)\,ds}.$$

$$\Rightarrow y(t,\tau) = y(0, \tau - t)\, e^{-\int_0^t \gamma(s+\tau-t)\,ds}.$$

$$= y(0, \tau - t)\, e^{-\int_{\tau-t}^{\tau} \gamma(s)\,ds}.$$

$$= y(0, \tau - t)\, \frac{e^{-\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}}{e^{-\int_0^{\tau-t} \gamma(s)\,ds}}.$$

$$y(t,\tau) = y_0(\tau - t)\, \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau - t)}$$

où $\Gamma(\tau) = e^{-\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}$ prop d'être infecté jusqu'à τ

Finalement:

$$y(t,\tau) = \begin{cases} v(t-\tau)\, \Gamma(\tau) & \text{si } t > \tau. \\ y_0(\tau - t)\, \dfrac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau - t)} & \text{si } \tau > t \end{cases}$$

$$v(t) = y(t,0) = N\int_0^{+\infty} \beta(\tau)\, y(t,\tau)\, d\tau$$

$$= N\int_0^t \beta(\tau)\, y(t,\tau)\, d\tau + N\int_t^{+\infty} \beta(\tau)\, y(t,\tau)\, d\tau$$

$$v(t) = N\int_0^t \beta(\tau)\Gamma(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau + N\int_0^{+\infty} \beta(t+\tau)\frac{\Gamma(t+\tau)}{\Gamma(\tau)}\, y_0(\tau)\, d\tau$$

Notons:

$\psi(\tau) = \beta(\tau)\Gamma(\tau)$ et $(G y_0)(t) = \int_0^{\infty} \beta(t+\tau)\frac{\Gamma(t+\tau)}{\Gamma(\tau)}\, y_0(\tau)\, d\tau$

$$v(t) = N\int_0^t \psi(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau + N(G y_0)(t).$$

on suppose que.

$G : L^1_+(0,\infty) \to L^1_+(0,+\infty)$.

$\psi \in L^1_+(0,+\infty)$.

$\int_A^{+\infty} \gamma(s)\, ds = +\infty \quad \forall A > 0.$

$T = \int_0^{+\infty} \Gamma(\tau)\, d\tau$: le temps moyen d'infectiosité

$\gamma(\tau)$: psk dès qu'il vient à l'infect τ il devient guérit

T : le temps de sejour ds le compartiment des infectés.

$$T = \int_0^{+\infty} \tau\, \gamma(\tau)\, e^{-\int_0^{\tau} \gamma(s)\, ds}\, d\tau.$$

intégrant par partie.

$$\Rightarrow T = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^{\tau} \gamma(s)\, ds}\, d\tau = \int_0^{+\infty} \Gamma(\tau)\, d\tau.$$

taux de reproduction de base:

$$R_0 = N\int_0^{+\infty} \beta(\tau)\Gamma(\tau)\, d\tau = N\int_0^{+\infty} \psi(\tau)\, d\tau.$$

$\exists q_0 > 0$ tq $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda_0 t}\, v(t) = q_0$.

où λ_0 est la racine de l'éq. caractéristique

$$N\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_0 \tau}\, \psi(\tau)\, d\tau = 1.$$

astuce: (Pour R_0)

$$v(t) = N\int_0^{\infty} \psi(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau + N(G y_0)(t)$$

on neglige le $(N\, G y_0(t))$ car on suppose il n'y a pas d'infecté avant. et on pose $v(t-\tau) = 1$

c.à.d les nouveaux infectés à partir d'un infecté

$\text{Sign}(\lambda_0) = \text{Sign}(R_0 - 1)$. (exercice)

Ainsi :
si $R_0 > 1$ DFE n'est pas stable
si $R_0 < 1$ DFE est L.A.S.

Modèles de type Réaction diffusion

considérons l'éq :

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \qquad t>0 \quad , x \in \mathbb{R}^d.$$

$D=1$: taux de diffusion.

si $D \neq 1$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u.$

on pose :

$v(t,x) = u(\frac{t}{D}, x).$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_i} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v.$$

solution fondamental.

si $u(t,x)$ est une solution de (1) alors $v(t,x) = u(\lambda t, \sqrt{\lambda}\, x)$ est aussi une solution de (1) $(\lambda > 0)$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u = \lambda \Delta u.$$

$\Delta v = \lambda \Delta u$

$\lambda \dfrac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u. \implies$

$\implies \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v.$

$u(\lambda t, \sqrt{\lambda}\, x) = f(\lambda)\, u(t,x)$ (la sol. étant unique)

$|x| \in \mathbb{R}'_+$

$u(t,x) = \lambda^{\alpha}\, u(\lambda t, \sqrt{\lambda}\, x)$ $(\lambda > 0)$

en particulier pour $\lambda = \dfrac{1}{t}$

$u(t,x) = t^{-\alpha}\, u\left(1, \dfrac{x}{\sqrt{t}}\right).$

posons $v(s) = u(1,s)$.
$u(t,x) = t^{-\alpha}\, v\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right).$

Posons $v(s) = u(1,s)$.
$u(t,x) = t^{-\alpha}\, v\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right).$

$-\alpha\, t^{-\alpha-1}\, v\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) - \dfrac{1}{2}\, t^{-\alpha-1}\, \dfrac{x}{\sqrt{t}}\, \nabla v\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) = t^{-\alpha-1} \Delta v$

on pose $y = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$

$-\alpha\, t^{-\alpha-1}\, v(y) - \dfrac{1}{2} t^{-\alpha-1}\, y\, \nabla v(y) - t^{-\alpha-1} \Delta v = 0.$

$\alpha v(y) + \dfrac{1}{2}\, y\, \nabla v(y) + \Delta v = 0.$

on cherche une solution radiale :
$v(y) = w(|y|)$
$\Delta v(y) = w''(|y|) + \dfrac{d-1}{|y|}\, w'(|y|)$ (Exercice)

on pose :

$r = |y|.$

$\alpha w + \dfrac{1}{2} r w' + \dfrac{d-1}{r} w' + w'' = 0.$
qui est équivalent, en choisissant $\alpha = \dfrac{d}{2}$
$\left(\dfrac{r^{d} w}{2}\right)' + \left(r^{d-1} w'\right)' = 0.$

ie : $\dfrac{d}{2} w + \dfrac{1}{2} r w' + \dfrac{d-1}{r} w' + w'' = 0.$

$\dfrac{d}{2}\, r^{d-1} w + \dfrac{1}{2}\, r^{d} w' + (d-1)\, r^{d-2} w' + r^{d-1} w'' = 0$

$\left(\dfrac{r^{d} w}{2}\right)' + \left(r^{d-1} w'\right)' = 0$

$\exists K \in \mathbb{R}$ tq : $r\frac{w}{2} r^{d-1} + r^{d-1} w' = K$.

pour $r=0 \Rightarrow K=0$.

$\Rightarrow r\frac{dw}{r} + r^{d-1} w' = 0$.

$\Rightarrow \frac{r}{2} w + w' = 0$.

$\Rightarrow w' = -\frac{r}{2} w \Rightarrow w(r) = c\, e^{-\frac{r^2}{4}}$.

$u(t,x) = t^{-d/2} v(y) = t^{-\frac{d}{2}} w(r) = c\, t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}}$

$$\boxed{u(t,x) = c\, t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad \forall c \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\text{La fct } \Phi(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

s'appelle la solution fondamentale de (1).

Lemme : on a pour tt $t>0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x)\,dx = 1.$$

2) Problème a valeur initiale ds $\mathbb{R}^d$:

considerons le pb de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \\ u(x,0) = u_0(x) & x\in\mathbb{R}^d \end{cases}$$

Thm :

soit $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

posons

$$u(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy$$

alors :

(i) $u \in C^\infty(]0,\infty[\times \mathbb{R}^d)$.

(ii) u verifie $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. $\forall t>0, x\in\mathbb{R}^d$

(iii) $\lim_{t\to 0} u(t,x_0) = u_0(x_0)$ pour tt $x_0 \in \mathbb{R}^d$

(condition de compatibilité)

(iv) $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\,dx \quad \forall t>0$

conservation de la masse

Re : la solution n'est pas unique (si $|u(t,x)| \leq A e^{a|x|^2}$ alors l'unicité ...

3/ Problème à valeur initiale dans un domaine borné

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ouvert borné connexe et régulier (à frontière C^3).

Ecriture du pb :

$$(2)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & t>0, x\in\Omega. \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x\in\Omega. \\ \text{condition au bord de } \Omega : \end{cases}$$

condition de Dirichlet :

$u=0$ sur $\partial\Omega$. ($\partial\Omega$ est défavorable pr la pop)

condition de Neumann :

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (la pop est C^{st} sur $\partial\Omega$ il y a pas de sortant ni entrant)

condition mixte (ou de Robin) :

$\alpha(t,x)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(t,x)u(t,x) = 0$ sur $\partial\Omega$.

(dépend de α, et β)

Existence de solution et régularité :

solution faible ou solution classique

c'est une sol u qui vérifie l'éq

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

avec : $u \in C^2_1(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ $\left(C^1(\mathbb{R}_+), C^2(\Omega) \right)$

$\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$.

$x_0 \in \partial\Omega$ cas dirichlet $u(t,x_0) = 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0} u(t,x_0) = 0 \Rightarrow u_0(x_0) = 0$.

Thm :

1) Cas Dirichlet :

Si $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ où $\alpha > 0$. et $u_0 = \Delta u_0 = 0$ sur $\partial\Omega$

il existe une solution unique u de (2) avec $u \in C^2_1(\mathbb{R}_+ \times \bar\Omega)$.

2) Cas Neumann :

Si $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ avec $\alpha > 0$ et $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$

il existe une unique sol u de (2) avec

$u \in C^2_1(\mathbb{R}_+ \times \bar\Omega)$

$f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ si $\sup\limits_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$

$[f]_\alpha = \sup\limits_{\bar{\Omega}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$

$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$

$f \in C^{k,\alpha} \iff f \in C^k$ et $\partial^{|k|} f \in C^{0,\alpha}$ $(= C^\alpha)$

$k = (k_1, \dots, k_n)$ $\quad \sum k_i = |k|$

$f \in C^{2,\alpha} \iff f \in C^2, \dfrac{\partial f}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \in C^{0,\alpha}$

$\|f\|_{C^{2,\alpha}} = \|f\|_{C^2} + \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_\alpha + \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_\alpha + \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_\alpha$

Modèle de réaction-diffusion (Dispersion-croissance)

Considérons le modèle suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,u) & t \geq 0, x \in \Omega \\ \text{condition de Dirichlet ou Neumann} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,u). & t \geq 0, x \in \Omega \\ \text{condition de Dirichlet ou Neumann} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Déf: Il y a persistance de la pop $u(t,x)$ si $u(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} p(x)$ avec $p(x) \geq 0$ et $p \neq 0$.

Déf: Il y a extinction si $u(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $\quad \forall x \in \Omega)$

Thm: Principe de comparaison parabolique

Soit $T > 0$ (peut être $= +\infty$), considérons une fct $f = f(t,x,u)$ tq $f, \dfrac{\partial f}{\partial u} \in C([0,T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Soit $\bar{u}$ et $\underline{u}$ ds $C_1^2(]0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C([0,T] \times \bar{\Omega})$ vérifiant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq D\Delta \bar{u} + f(t,x,\bar{u}) & t \in]0,T] \times \bar{\Omega} \\ \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} \leq D\Delta \underline{u} + f(t,x,\underline{u}) & t \in]0,T] \times \bar{\Omega} \end{cases}$$

on suppose également :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta}(t,x) \leq 0 \leq \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}(t,x) \quad \forall t \in [0,T], x \in \partial\Omega$$

et que $\underline{u}(t,x) \leq 0 \leq \overline{u}(t,x) \quad \forall t \in [0,T], x \in \partial\Omega$

et que

$$\underline{u}(x,0) \leq \overline{u}(x,0)$$

alors $\overline{u} \geq \underline{u}$ ds $[0,T] \times \Omega$, et soit

il existe $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \Omega$ tq:

$\underline{u}(t_0,x_0) = \overline{u}(t_0,x_0)$ et alors

$$\underline{u} \equiv \overline{u} \text{ ds } [0,t_0] \times \Omega$$

soit $\overline{u} > \underline{u}$ sur $[0,T] \times \Omega$.

Rq: $\overline{u}$ et $\underline{u}$ s'appellent sursolution, sous-solution

application : (positivité de la sol).

soit le pb:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - f(t,x,u). \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \end{cases}$$

si $f(t,x,0) = 0 \Rightarrow u \geq 0 \quad \forall t$.

avec $\underline{u}$ ($\leq$ ds (*)) ; $\overline{u} = u$ ($\geq$ ds

comparaison de deux sol de Dirichlet et Neumann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} \leq D\Delta u_1 + f(t,x,u_1). \\ u_1(x,t) = 0 \quad t \geq 0 \quad \partial\Omega. \\ u_1(x,0) = u_0(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} \geq D\Delta u_2 + f(t,x,u_2) \\ \partial u_2(x,t) = 0 \quad \partial\Omega. \\ u_2(x,0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

$\overline{u} = u_2$, $\underline{u} = u_1$

$\overline{u}(x,0) \geq \underline{u}(x,0)$

$\overline{u}(x,t) \geq 0 = \underline{u}(x,0) \quad \partial\Omega$

$\Rightarrow u_2 \geq u_1$.

Equation Réaction-diffusion : stabilité et instabilité

EDO: $\frac{du}{dt} = F(u)$, $u(0) = u_0$.

$F(0) = 0$, $u = 0$ est un pt stationnaire

$F'(0) < 0$, stabilité $u(t) \to 0$.

$F'(0) > 0$, instabilité $u(t) \not\to 0$

système de 2 eq. diff linéaire:

$\frac{du_1}{dt} = a u_1 + b u_2$

$\frac{du_2}{dt} = c u_1 + d u_2$ $\Rightarrow \frac{du}{dt} = Mu$.

avec $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

cherchons des solutions de la forme.

$u(t) = p_1 e^{\lambda_1 t} + p_2 e^{\lambda_2 t}$.

où: λ_i les val propres de M.
$i = 1, 2$

et p_i $(i = 1, 2)$ les vecteurs propres.

si $Re(\lambda_i) < 0$; $i = \overline{1, 2}$, alors $(0,0)$ est stable $u(t) \to (0,0)$.

si $Re(\lambda_i) > 0$ ou $\lambda_i > 0$, alors $(0,0)$ est instable $u(t) \not\to (0,0)$ pour certaines valeurs de condition initiales.

définition de stabilité pour une eq de réaction-diffusion (eq. parabolique)

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u, x) & t > 0, x \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 & t > 0 \end{cases}$$

soit $\bar{u}(x)$ une solution stationnaire c.à.d : elle ne dépend pas du temps, ~~elle~~ elle satisfait le pb elliptique

$\Delta \bar{u} + F(\bar{u}, x) = 0$ $\quad \bar{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$.

$-\Delta \bar{u} = F(\bar{u}, x)$ $\quad \bar{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$.

soit $\varepsilon(x)$ une fct qui satisfait les conditions limites et

(3) $\sup_{\Omega} |\varepsilon(x)| \leq \varepsilon_0$ pour un $\varepsilon_0 > 0$.

on dit que la solution stationnaire $\bar{u}(x)$ est asymptotiquement stable par rapport aux petites perturbations, s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq quelque soit la fct $\varepsilon(x)$ qui satisfait (3), la solution du pb (1) avec la condition initiale $u(x,0) = \bar{u}(x) + \varepsilon(x)$. converge vers cette solution stationnaire

c.à.d : $\sup_{\Omega} |u(x,t) - \bar{u}(x)| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (4)

la solution stationnaire $\bar{u}(x)$ est GAS si la convergence (4) a lieu $\forall$ la condition initiale $u(x,0)$.

Opérateur linéarisé :

soit $A(u)$ un operateur elliptique non linéaire

$A(u) = \Delta u + F(u,x)$.

l'operateur linearisé autour d'une fct $\bar{u}$ est par def :

$$A'(\bar{u}_0)\, v = \frac{d}{d\tau} A(\bar{u} + \tau v)\Big|_{\tau=0} = \Delta v + F'_u(\bar{u},x)\, v.$$

qu :

$$A(\bar{u}_0 + v) = A'(\bar{u}_0)\, v + o(\|v\|).$$

Thm : (stabilité de solution) :

si toutes les valeurs propres de l'operateur linearisé $A'(\bar{u})$ autour d'une solution stationnaire $\bar{u}$ sont dans le demi plan gauche, alors cette solution est asymptotiquement stable par rapport aux petites perturbations.

Lemme de comparaison :

soient $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ les solutions du pb $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u,x)$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big| = 0$

$u_i(x,0) = u_i^0(x)$ $i = 1,2$

si $u_1^0(x) \geq u_2^0(x)$ $x \in \Omega$.

alors $u_1(x,t) \geq u_2(x,t)$ $\forall t \geq 0$.

$\forall x \in \Omega$.

Thm : "Instabilité de solution"
s'il existe une valeur propre de l'opérateur $A'(\bar{u})$ linéarisé dans le demi-plan droite, alors cette solution est instable par rapport aux petites perturbations.

Exemples
considérons le pb :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u). \qquad u(0) = u(1) = 0$$
$$\text{où } F(0) = 0.$$

KPP : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$.

1. trouver les conditions de stabilité.
$\bar{u} = 0$ pt d'équilibre
linéarisation au $v(\bar{u})$.
$v = u - \bar{u} = u$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + vF'(0) = \lambda v. \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \underbrace{(F'(0) + \lambda)}_{\gamma} v = 0$$

eq. caractéristique : $r^2 + \gamma = 0$
$r^2 = -\gamma$

si $\gamma < 0$:
$v(x) = c_1 e^{\sqrt{-\gamma}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\gamma}\, x}$

$v(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \iff c_1 = -c_2$
$v(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ $\Rightarrow v(x) =$

si $\gamma = 0$: $\Rightarrow r = 0$.

$v(x) = c_1 x + c_2$, $v(0) = v(1) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\Rightarrow v \equiv 0$

si $\gamma > 0$:
$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}$.

$v(x) = c_1 \cos\sqrt{\gamma}\, x + c_2 \sin\sqrt{\gamma}\, x$
$v(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
$v(1) = c_2 \sin\sqrt{\gamma} = 0 \Rightarrow \sqrt{\gamma} = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$
$\gamma = n^2\pi^2$
$F'(0) - \lambda = n^2\pi^2 \Rightarrow \lambda_n = F'(0) - n^2\pi^2$

$\lambda_n < 0$ si $F'(0) < \pi^2$.

donc si $F'(0) < \omega^2$, on a la stabilité
sinon on a l'instabilité,

structure de Turing :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u,v) \\ \frac{dv}{dt} = g(u,v) \end{cases}$$

Supposons que $(\overset{*}{u}, \overset{0}{v})$ $= (0,0)$ (choix) le pt d'équilibre est stable.

Introduisant un terme de diffusion ds le système (1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + F(u,v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + g(u,v) \end{cases}$$

$u(0) = u(L) = 0$; $v(0) = v(L) = 0$.

la matrice jacobienne associée au sys (1) au vois de $(0,0)$.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a = f_u(0,0)$; $b = f_v(0,0)$

$c = g_u(0,0)$; $d = g_v(0,0)$

$\det M = ad - bc > 0$

$\operatorname{tr} M = a + d < 0$.

Pour étudier la stabilité de l'état station. $(0,0)$ pr le pb 2, on résoud le pb de valeurs propres suivant

$$\begin{cases} d_1 u'' + au + bv = \lambda u. \\ d_2 v'' + cu + dv = \lambda v \\ u(0) = u(L) = 0 \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

recherche des solution de la forme
$u(x) = p \sin k x$; $v(x) = q \sin k x$.
avec $k = \frac{n\pi}{L}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -d_1 p k^2 + ap + bq = \lambda p. \\ -d_2 q k^2 + cp + dq = \lambda q \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a - d_1 k^2 & b \\ c & d - d_2 k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P \\ q \end{pmatrix}$$

$M(k)$.

$M(0) = M$ $\quad \left.\begin{array}{l} ad - bc > 0 \\ a + b < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

$\operatorname{tr} M(k) = a + d - k^2 (d_1 + d_2) < 0.$

$\det M(k) = ad - bc - k^2 (a d_2 + d d_1) + d_1 d_2 k^4$

si $a < 0, d < 0$ $\det > 0$.

on fixe tt les paramètres a, b, c, d, k, d_1, et on choisit d_2 assez grand pour rendre $\det M(k) < 0$, l'équilibre $(0,0)$ devient instable, c'est ce qu'on appelle l'instabilité de Turing.

Un modèle d'une maladie à transmission vectorielle avec une immunité temporaire

La plupart des maladies à transmission vectorielle entraîne une immunité acquise à la suite d'une exposition, cette immunité est partielle souvent temporaire, c'est notamment le cas du paludisme, chikungunya et la dengue, nous construisons un modèle de maladie à transmission vectorielle où les individus réfractaire sont immunisé mais perd graduellement leur immunité et devient susceptible à nouveaux à la maladie.

Pour proposer le modèle on divise la pop vecteur comme suite:

S_v: vecteur susceptible

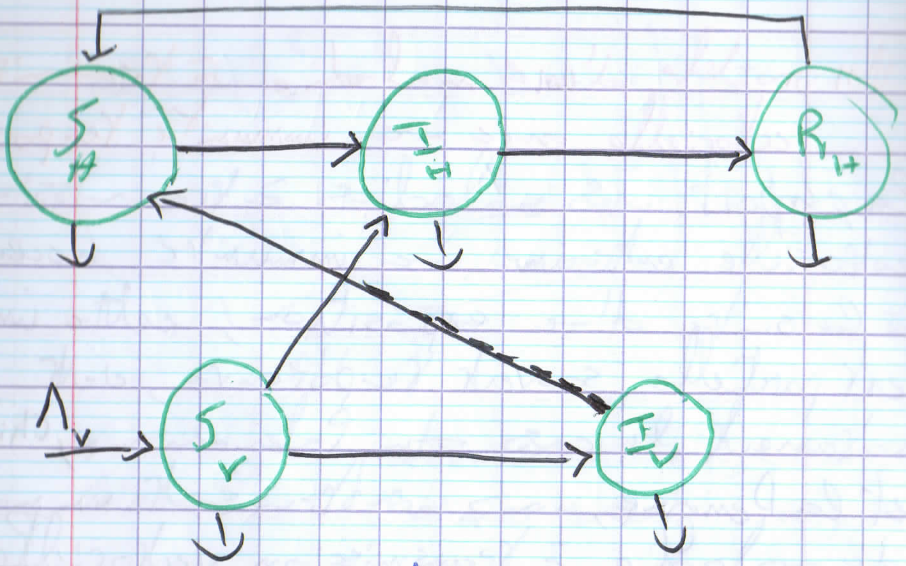
I_v: vecteur infecté

alors que la pop humaine et divisé en 3 compartiments:

S_H: susceptible humain

I_H: infecté humain

R_H: réfractaire humain.



le modèle de vecteurs est modélisé avec un modèle SI, comme suit

$$\begin{cases} \dot{S}_V = \Lambda_V - ap\, S_V I_H - \mu_V S_V \\ \dot{I}_V = ap\, S_V I_H - \mu_V I_V \end{cases}$$

Λ_V : recrutement (naissance)
a : taux de piqure
p : la probabilité de la transmission de maladie
μ_V : mortalité naturelle

la pop totale des vecteurs :
$N_V = S_V + I_V$

le modèle des humains est modélisé avec un modèle SIRS :

$$(II) \begin{cases} \dot{S}_H = \Lambda_H - aq\, S_H I_V - \mu_H S_H + \gamma_H R_H \\ \dot{I}_H = aq\, S_H I_V - (\mu_H + \alpha_H) I_H \\ \dot{R}_H = \alpha_H I_H - (\mu_H + \gamma_H) R_H \end{cases}$$

Λ_H : naissance (recrutement)

a : taux de piqure.
q : la prop de transmission de la maladie
μ_H : taux de mortalité naturelle des être humain
α_H : taux de guérison

γ_H : taux de perte d'immunité

$$\dot{N}_V = \Lambda_V - \mu_V N_V = f(N_V) \longrightarrow N_V(t) = \text{——}$$

$\exists!$ pt tq $N_V^0 = \dfrac{\Lambda_V}{\mu_V}$ Equi GAS

$f'(N_V) = -\mu_V < 0.$

la solution du système (I) est bornée car $S_V, I_V \leq N_V \leq N_V^0$

. La positivité de solution de système :

$\dot{S}_H \big|_{S_H=0, I_H \geq 0, R_H \geq 0, S_V \geq 0, I_V \geq 0} = \Lambda_H + \alpha R_H \geq 0$

$\dot{I}_H \big|_{I_H=0, S_H \geq 0, R_H \geq 0, S_V \geq 0, I_V \geq 0} = a q S_H I_V \geq 0.$

$\dot{R}_H \big|_{R_H=0, S_H, I_H, S_V, I_V \geq 0} = \gamma_H I_H \geq 0$

$\dot{I}_V \big|_{I_V=0, S_H, I_H, R_H, S_V \geq 0} = a p S_V I_H \geq 0.$

donc la solution $(S_H(t), I_H(t), R_H(t), S_V(t), I_V(t)) \in \mathbb{R}_+^5$

le système (I) peut se réécrire

$\rightarrow$ la sol du système (I) est bornée

$S_V, I_V < N_V \leq N_V^*$

en utilisant le thm de Thieme

en remplaçant $S_V = N_V^0 - I_V$:

$\dot{I}_V = a p (N_V^0 - I_V) I_H - \mu_V I_V.$

$\dot{N}_V = \dot{S}_V + \dot{I}_V.$

le système (I) :

$N_H = S_H + I_H + R_H$

Pour les êtres humains :

$\dot{N}_H = \dot{S}_H + \dot{I}_H + \dot{R}_H = \Lambda_H - \mu_H N_H$

$N_H^* = \dfrac{\Lambda_H}{\mu_H}$ GAS.

la solution du sys (I) est bornée

$S_H, I_H, R_H \leq N_H < N_H^*$

en remplaçant $R_H = N_H^* - S_H - I_H$

$$\begin{cases} \dot{S}_H = \Lambda_H - aq S_H I_V - \mu_H S_H + \gamma_H (N_H^* - S_H - I_H) \\ \dot{I}_H = aq S_H I_V - (\mu_H + \alpha_H) I_H \\ \dot{I}_V = ap(N_V^* - I_V) I_H - \mu_V I_V \end{cases}$$

avec $N_V^* = \frac{\Lambda_V}{\mu_V}$ et $N_H^* = \frac{\Lambda_H}{\mu_H}$.

DFE:

$\Lambda_H - aq S_H I_V - \mu_H S_H + \gamma_H (N_H^* - S_H - I_H) = 0$.

$$DFE = \left(\frac{\Lambda_H}{\mu_H}, 0, 0 \right)$$

$\vec{F} = (aq S_H I_V, ap(N_V^* - I_V) I_H)$.

$$V = \begin{pmatrix} -(\mu_H + \alpha_H) I_H \\ -\mu_V I_V \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & aq S_H \\ ap(N_V^* - I_V) & -ap I_H \end{pmatrix}_{DFE}$$

les élts de F sont respectivement

$$F = \begin{pmatrix} 0 & aq \frac{\Lambda_H}{\mu_H} \\ ap N_V^* & 0 \end{pmatrix}$$

f_{ij}: la transmission de la maladie du compartiment j à i.

$$V = \begin{pmatrix} -(\mu_H + \alpha_H) & 0 \\ 0 & -\mu_V \end{pmatrix}.$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_H + \alpha_H} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu_V} \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \rho(-FV^{-1}) = \sqrt{\frac{a^2 pq \Lambda_H N_V^*}{(\mu_H + \alpha_H) \mu_H \mu_V}}$$

les élts de V^{-1} (v_{ij}) sont respectivement le temps ~~…~~ la période passé des i ds le compartiment des j.

$$R_0^2 = \frac{a^2 pq N_V^* N_H^*}{\mu_V (\mu_H + \mu_H)} < 1.$$

le R_0 est interprété comme étant un individu infecté (humain ou vecteur) dans une population saine durant sa période d'infection.

pop. saine : pop des humains susceptible et vecteur susceptible.

(si on pose pas un vecteur infecté et un humain infecté à la fois.

$$J\left(\frac{\Lambda_H}{\mu_H},0,0\right)=\begin{pmatrix} -\mu_H-\gamma_H & -\gamma_H & -aq\frac{\Lambda_H}{\mu_H} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{A}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = -(\mu_H+\gamma_H+\lambda)\,G(\lambda)$

$\mathrm{tr}\, A = -(\mu_V + \alpha_H + \mu_H) < 0.$

$\det A = \mu_V(\mu_H+\alpha_H) - a^2 pq N_V^* N_H^* > 0$

$$\frac{a^2 pq N_V^* N_H^*}{\mu_V(\mu_H+\alpha_H)} < 1$$

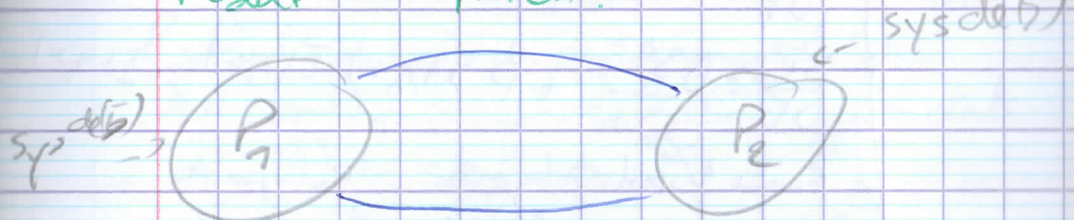
si $R_0^2 < 1$ DFE est L.A.S.

E.E.

$$J(\bar{S}_H,\bar{I}_H,\bar{I}_V)=\begin{pmatrix} -aq\bar{I}_V-\mu_H-\gamma_H & -\gamma_H & -aq\bar{S}_H \\ aq\bar{I}_V & -(\mu_H+\alpha_H) & aq\bar{S}_H \\ 0 & ap(N_V^*-\bar{I}_V) & -ap\bar{I}_H-\mu \end{pmatrix}$$

calculer le $P(\lambda)$ et Hurwitz.

modèle avec Patch :



$i=1,2$
$$\begin{cases} \dot{S}_{H,i} = \Lambda_{H,i} - aq S_{H,i} I_{V,i} + \gamma_{H,i} R_{H,i} + \\ \quad + \sum_{\Pi=S,I,R} a_{ij}\Pi_j - \sum_{S,I,R} a_{ij}\Pi_j \\ \dot{I}_{H,i} = \end{cases}$$

Modèle SI avec diffusion :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S I & S(0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I & I(0) = I_0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \beta S(t,x) I(t,x) & S(0,x) = S_0(x) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \beta S(t,x) I(t,x) & I(0,x) = I_0(x) \end{cases}$$

C. aux bord :

$\frac{\partial S}{\partial x}(t,0) = 0$; $\frac{\partial S}{\partial x}(t,L) = 0$.

$\frac{\partial I}{\partial x}(t,0) = 0$; $\frac{\partial I}{\partial x}(t,L) = 0$

$S(0,x) = S_0(x)$.

$I(0,x) = I_0(x)$.

on suppose :

$N(x,t) = S(t,x) + I(t,x)$.

en di 1 : $\frac{\partial S}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial S}{\partial x}(t,0) = 0$

$\frac{\partial I}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial I}{\partial x}(t,0) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial N}{\partial x}(t,L) = 0 \\ N(0,x) = N = c^{st} \quad (H_{yp}) \end{cases}$$

le système est conservative :

$I(t,x) + S(t,x) = N(t,x) = N(0,x) = N$.

Rem : ds un système qui commence par des conditions initiales c^{st}, les états d'équilibre sont des c^{st}

Q : mq les équilibres sont des c^{st} !

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \beta I (N - I). \\ \frac{\partial I}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial I}{\partial x}(t,L) = 0 \end{cases}$$

KPP.

solutions stationnaires

$$\begin{cases} -D \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \beta I (N - I). \\ \frac{\partial I}{\partial x}(0) = \frac{\partial I}{\partial x}(L) = 0 \end{cases}$$

$\overset{*}{I}_1 = 0$, $\overset{*}{I}_2 = N$.

- on m tq il n'existe pas de sol qui depend de x

supposons qu'il existe une solution non constante $\overset{*}{I}(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} = -\dfrac{\beta}{D} \displaystyle\int_0^x I(y)(N - I(y))\, dy \\ I(0) = I_0 < N \end{cases}$$

$\dfrac{\partial I}{\partial x} < 0 \Rightarrow \dfrac{\partial I}{\partial x}(L) < 0$ contradiction
avec $\dfrac{\partial I}{\partial x}(L) = 0$

d'où, il n'existe pas de solution non constante

- stabilité :

$I(t,x) = y(t,x)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(0) + f'(0)\, y$$

avec $f(I) = \beta I (N - I)$.

on cherche la sol ss la forme :

$y(t,x) = e^{\lambda t} \phi(x)$.

$\lambda \phi = D \phi_{xx} + \beta N \phi$.

$\Rightarrow (\lambda - \beta N)\phi = D \phi_{xx}$

Eq. caractéristique

$r^2 = \dfrac{\gamma}{D}$ avec $\gamma = \lambda - \beta N$.

si $\gamma < 0$: on pose $\gamma = -\sigma^2 \Rightarrow r = \pm i \dfrac{\sigma}{\sqrt{D}}$

$\phi(x) = c_1 \cos \dfrac{\sigma}{\sqrt{D}} x + c_2 \sin \dfrac{\sigma}{\sqrt{D}} x$

$\phi(0) = c_2 = 0$.

$\phi_x(L) = 0 \Rightarrow \dfrac{\sigma c_1}{\sqrt{D}} \sin \dfrac{\sigma}{\sqrt{D}} L = 0$.

$\phi_x = -\dfrac{c_1 \sigma}{\sqrt{D}} \sin \dfrac{\sigma}{D} x + \cancel{\dfrac{c_2 \sigma}{\sqrt{D}} \cos \dfrac{\sigma}{D} x}$

$c_1 = 0 \Rightarrow$ solution triviale.

$\sin \dfrac{\sigma}{\sqrt{D}} L = 0 \Rightarrow \dfrac{\sigma}{\sqrt{D}} L = m\pi$ $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \gamma = -\sigma^2 = -\dfrac{D m^2 \pi^2}{L^2}$.

$\Rightarrow \lambda - \beta N = -\dfrac{D m^2 \pi^2}{L^2}$.

$$\lambda_n = \beta W - D\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

donc :

$$y_n(t,x) = c_1 \cos\frac{n\pi}{L}x \, e^{\lambda_n t}$$

$$y_n(t,x) = c_1 \cos\frac{n\pi}{L}x \, e^{\left(\beta W - D\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$$

$$y(t,x) = \sum_{n\geq 0} c_n \cos\frac{n\pi}{L}x \, e^{\left(\beta W - D\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$$

$$= c_0 e^{\beta W t} + \sum_{n\geq 1} c_n \cos\frac{n\pi}{L}x \, e^{\left(\beta W - D\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$$

$$y(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \qquad \left(\text{mrq } c_n > 0 \ \forall n \text{ série de Fourier}\right)$$

$\Rightarrow I^* = 0$ est instable

pour $I^* = W$:

$$y(t,x) = c_0 e^{-\beta W t} + \sum_{n\geq 1} c_n \cos\frac{n\pi}{L}x \, e^{\left(-\beta W - D\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$$

$$y(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow I^* = W$ est L.A.S

Q : existe-t-il une onde progressive ?

$$-cw' = Dw'' + \beta w(W-w).$$

$$Dw'' + cw' + \beta w(W-w) = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} w(x) = A_1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} w(x) = A_2$$

on pose :

$$w' = u$$

$$u' = -\frac{c}{D}u - \frac{\beta}{D}w(W-w).$$

$$\begin{cases} w' = u \\ u' = -\frac{\beta}{D}w(W-w) - \frac{c}{D}u \end{cases}$$

pt d'équilibre (w^*, u^*) :

$(0,0)$; $(W,0)$.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\beta W}{D} + \frac{2\beta w}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\beta W}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix} \quad \det J_{(0,0)} > 0, \quad \operatorname{tr} J(0,0) < 0.$$

$\Rightarrow (0,0)$ est L.A.S

$$J(N,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\beta N}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix}$$ $\det J(N,0) <$ … $tr\, J(N,0) < 0$

$\Rightarrow (N,0)$ est instable

la nature des valeurs propres pr $(0,0)$?

$$\lambda^2 + \frac{c}{D}\lambda + \frac{\beta W}{D} = 0.$$

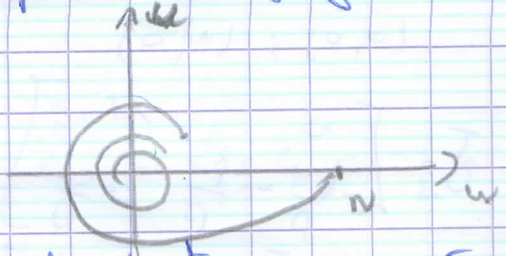
$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{D} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{D}\right)^2 - 4\frac{\beta W}{D}}$$

$(\Delta) \to$

si $\left(\frac{c}{D}\right)^2 > 4\frac{\beta W}{D} \iff c > 2\sqrt{\beta W D}$

$\Rightarrow (0,0)$ est un noeud stable

si $c < 2\sqrt{\beta W D} \Rightarrow$ foyer stable



~~et~~ contradiction avec I est po…

d'où une des conditions sur c

$$c > c_{min} = 2\sqrt{\beta W D}$$

vitesse minimale

$A_1 = N \,;\, A_2 = 0$