Dernière partie du chapitre I
Courbes Paramétrées

H.BENALLAL

III.6. Formules de Frenet

Les formules de Frenet expriment la dérivée du repère de Frenet.

Proposition 1 *Soit* α: $I \to \mathbb{R}$ *une courbe paramétrée par la longueur de l'arc de classe* C^3. *Alors, on a*

$$\left\{\begin{array}{lcr} T'(t) & = & k(t).N(t) \\ N'(t) & = & -k(t).T(t) + \tau(t).B(t) \\ B'(t) & = & -\tau(t).N(t) \end{array}\right.$$

Preuve:
Il nous reste que la deuxième formule à montrer. soient a, b, c les coordonnées de $N'(t)$ dans la base $\{T, N, B\}$: $N'(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$.
Pour tout $t \in I$, on a: $N(t).N(t) = 1$. Cela donne: $N'(t).N(t) = 0$ et donc $b = 0$.
Puis: $\forall t \in I$:

$$N'(t).T(t) = -N(t).T'(t) = -N(t).k(t).N(t) = -k(t)$$

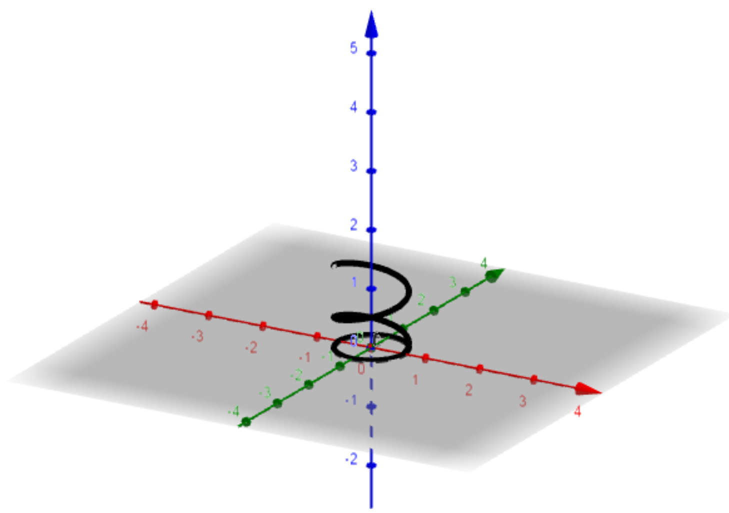
donc : $a = -k(t)$.
De même $\forall t \in, B(t).N(t) = 0$, donc

$$N'(t).B(t) = -B'(t).N(t) = -N(t)(-\tau(t).N(t)) = \tau(t)$$

d'où $c = \tau(t)$.
Ce qui donne: $N'(t) = -k(t).T(t) + \tau(t).B(t)$
Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

Exemple: L'hélice
$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telle que : $\alpha(t) = (a\cos(\frac{t}{c}), a\sin(\frac{t}{c}), \frac{bt}{c})$ où $c = \sqrt{a^2+b^2}, a > 0$



On a $\|\alpha(t)\| = \left(\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$

Vecteur tangent :

$$T(t) = \alpha'(t) = \left(\tfrac{-a}{c}\sin(\tfrac{t}{c}), \tfrac{a}{c}\cos(\tfrac{t}{c}), \tfrac{b}{c}\right)$$

La courbure : On a $T'(t) = \dfrac{1}{c^2}\left(-a\cos(\frac{t}{c}), -a\sin(\frac{t}{c}), 0\right)$, et

$$k(t) = \|T'(t)\| = \frac{1}{c^2}\sqrt{a^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

le vecteur normal : $N(t) = \dfrac{T'(t)}{k(t)} = \dfrac{a^2+b^2}{a}.\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos(\frac{t}{c}), -a\sin(\frac{t}{c}), 0\right)$,

d'où $\quad N(t) = \left(-\cos(\frac{t}{c}), -\sin(\frac{t}{c}), 0\right)$

La binormale : $B(t) = T(t) \wedge N(t) = \begin{vmatrix} -\dfrac{a}{c}\sin(\frac{t}{c}) & \dfrac{a}{c}\cos(\frac{t}{c}) & \frac{b}{c} \\ -\cos(\frac{t}{c}) & -\sin(\frac{t}{c}) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{c}\sin(\frac{t}{c}), -\frac{b}{c}\cos(\frac{t}{c}), \frac{a}{c}\right)$,

par suite: $\quad B'(t) = \dfrac{b}{c^2}\left(\cos(\frac{t}{c}), \sin(\frac{t}{c}), 0\right)$. Ainsi:

$$\tau(t) = -B'(t).N(t) = -\frac{b}{c^2}\left(\cos(\tfrac{t}{c}), \sin(\tfrac{t}{c}), 0\right).\left(-\cos(\tfrac{t}{c}), -\sin(\tfrac{t}{c}), 0\right)$$

$$= -\left(-\frac{b}{c^2} + 0\right) = \frac{b}{c^2}. \text{ D'où } \tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Remarque 5:
Si α n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc, on peut donc la reparamétriser par une nouvelle courbe $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ telle que $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ où $s(t)$ est une abscisse curviligne: $I \to s(I) = J \to \mathbb{R}^3$. En dérivant, on obtient: $\alpha'(t) = \beta'(t).s'(t)$
Posons $v(t) = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ la vitesse de α.

Le vecteur tangent : $\alpha'(t) = v(t).T(s(t)) \Rightarrow T(s(t)) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)}$

La courbure :

$$(T'(s(t)))' = T'(s(t)).s'(t) = v(t).k(s(t)).N(s(t)) \quad ,$$

c-à-d: $\dfrac{T(s(t))}{dt} = \dfrac{dT}{ds}.\dfrac{ds}{dt} = v(t).k(s(t)).N(t)$

ou encore $\; k(s(t)).N(s(t)) = \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{dT}{dt}.\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{v}.\dfrac{dT}{dt}$

De même:
$-\tau((s(t)).N(s(t)) = \dfrac{dB(s(t))}{ds} = \dfrac{dB}{dt}.\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{v}.\dfrac{dB}{dt}$.
Donc $\quad B'(t) = -v(t).\tau(s(t)).N(s(t))$.
Finalement: $T'(t) = v.k.N$ et $B'(t) = -v.\tau.N$

Exemple:
Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par:

$$\alpha(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right)$$

On a $\forall t \in \mathbb{R} : \alpha'(t) = 3\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right)$ et $\|\alpha'(t)\| = 3\sqrt{2}(1 + t^2) \neq 1$. Donc α n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc.
Soit $v(t) = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$, déterminons (T, k, N, τ, B).

Le vecteur tangent : $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right)$.

La courbure : $T'(t) = v(t).k(t).N(t)$. Or $T'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)$.
Donc

$$k(t).N(t) = \frac{1}{v}.T'(t) = \frac{1}{3(1+t^2)}\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3(1+t^2)^2}}.\underbrace{\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)} = k.N$$

Ou simplement: $k(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{1}{3(1+t^2)^2}$ et
$N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T(t)\|} = \left(-\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}, \dfrac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)$
$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}, 1\right)$. Donc
$-\tau(t).N = \dfrac{1}{v}.B'(t) = -\dfrac{1}{3(1+t^2)^2}\left(-\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right)$

Ce qui donne: $\tau(t) = k(t) = \dfrac{1}{3(1+t^2)}$

Théorème 2
Soit α une courbe régulière paramétrée de classe C^2, alors la courbure et la torsion sont données par:

$$k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Et

$$\tau(s(t)) = \frac{\alpha'(t).(\alpha''(t) \wedge \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

Où le produit mixte: $u.(v \wedge w) = \det(u, v, w)$
Preuve: Voir TD.

Proposition 2 : *Une courbe est une droite si et seulement si sa courbure est nulle.*

Preuve

1. Soit α une droite: $\alpha(t) = tv(t) + c$ où v vecteur unitaire et c vecteur constant. On a $\alpha'(t) = v$ et $\|\alpha'(t)\| = \|v\| = 1$, donc $T(t) = v = constant$. C'est-à-dire $T'(t) = 0$. Ce qui donne: $k(t) = \|T'(t)\| = 0$.

2. Inversement
   Soit α une courbe paramétrée par la longueur de l'arc telle que sa courbure $k(t) = 0, \forall t \in I$.
   On a $T(t) = \alpha'(t)$, et $T'(t) = \alpha''(t) = k(t).N(t) = 0, \forall t \in I$. C-à-d: $T(t) = T_0$ constant $\forall t \in I$. Ainsi $\alpha'(t) = T_0$, d'où $\alpha(t) = tT_0 + c$, (c vecteur constant). Par suite α est une droite.

Proposition 3 . *Une courbe α est plane si et seulement si sa torsion est partout nulle.*

Preuve:

1. Soit α une courbe plane régulière paramétrée par abscisse curviligne, c-à-d α est dans un plan P engendré par les vecteurs T et N.
   Le vecteur $B = T \wedge N$ unitaire et orthogonal au plan P . Donc $\alpha(t).B(t) = 0$.
   En dérivant: $\alpha'(t).B(t)+\alpha(t).B'(t) = 0$. Or $\alpha'(t).B(t) = T(t).B(t) = 0$. Donc $\alpha(t).B'(t) = 0$.
   Ou bien $-\tau(t).\alpha(t).N(t) = 0 \quad \forall t$. Ce qui donne $-\tau(t).\alpha(t).\|N(t)\| = 0 \;\; \forall t$. C-à-d $\tau(t).\alpha(t) = 0 \;\; \forall t$.
   Or $\alpha(t)$ peut être nulle en un nombre fini de point, et comme $\tau(t)$ est continue, alors $\tau \equiv 0$.

2. Inversement
   Si $\alpha(t)$ est de torsion partout nulle, alors
   $$B'(t) = -\tau(t).N(t) = 0$$
   D'où le vecteur binormal $B(t) = B_0$ est un vecteur constant.
   Considérons $\frac{d}{dt}(\alpha(t).B_0) = \alpha'(t).B_0 = T(t).B_0$. Comme T et B sont orthogonaux, alors: $T(t).B_0 = 0$. Par suite: $\frac{d}{dt}(\alpha(t).B_0) = 0$
   En intégrant:, on trouve: $\alpha(t).B_0 = constant$. C-à-d: $\alpha(t)$ est dans le plan défini par l'équation $\alpha(t).B_0 = C$ où C une constante quelconque.
   Si on pose $B_0 = (a, b, d)$ et $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ on aura
   $$\alpha(t).B_0 = ax(t) + by(t) + dz(t) = C$$

$\alpha(t)$ est donc appartient au plan d'équation caractéristique $ax+by+dz = C$, ce ci implique que α est une courbe plane.

III.7. Aspect d'une courbe paramétrée régulière:

Proposition 4 *: Soit α une courbe régulière de classe C^3, α est supposée paramétrée par abscisse curviligne. Si $\alpha(0) = 0$, alors, au voisinage de 0 on a:*

$$\alpha(t) = \left(t - \frac{k_0^2}{6}t^3 + t^3\varepsilon_1(t)\right)T(0) + \left(\frac{k_0}{2}t^2 + \frac{k_0'}{6}t^3 + t^3\varepsilon_2(t)\right)N(0)$$
$$+\left(\frac{1}{6}k_0\tau_0 t^3 + t^3\varepsilon_3(t)\right)B(0)$$

Où $k_0 = k(0), \tau_0 = \tau(0), k_0' = k'(0)$ et $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

Preuve: Le développement de Taylor de α au voisinage de 0 donne: $\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0) + \frac{t^2}{2}\alpha''(0) + \frac{t^3}{6}\alpha'''(0) + t^3\varepsilon(t)$.
On a $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = T(0)$, $\alpha''(0) = T'(t) = k(0).N(0), \alpha'''(0) = T''(0) = -k^2(0)T(0) + k'(0).N(0) + k(0).\tau(0).B(0)$. D'où

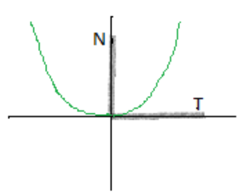
$$\alpha(t) = tT(0) + \frac{t^2}{2}k_0N(0) + \frac{t^3}{6}\left(-k_0^2T(0) + k_0'N(0) + k_0\tau_0B(0)\right) + t^3\varepsilon(t)$$
$$= \left(t - \frac{k_0^2}{6}t^3 + t^3\varepsilon_1(t)\right)T(0) + \left(\frac{k_0}{2}t^2 + \frac{k_0'}{6}t^3 + t^3\varepsilon_2(t)\right)N(0)$$
$$+\left(\frac{1}{6}k_0\tau_0 t^3 + t^3\varepsilon_3(t)\right)B(0)$$

On introduit les trois plans du trièdre de Frenet au point $\alpha(0) = 0$, donnée par:

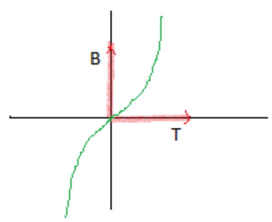
1. Plan osculateur: engendré par $T(0)$ et $N(0)$.
2. Plan rectifiant: engendré par $T(0)$ et $B(0)$.
3. Plan normal: engendrée par $N(0)$ et $B(0)$

On remarque que les projections de α sur ces plans sont:

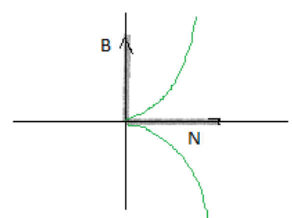
1. Sur le plan osculateur: $\left(u, \frac{k_0}{2}u^2 + ...\right)$.
2. Sur le plan rectifiant: $\left(u, \frac{k_0\tau_0}{6}u^3 + ...\right)$.
3. Sur le plan normal: $\left(u^2, \frac{\sqrt{2}}{3}.\frac{\tau_0}{k_0}u^3 + ...\right)$.



Plan osculateur



Plan réctifiant



Plan normal