Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2019/2020.
Master1_EDP&Appli_S2

Modélisation en Dynamique des Fluides

- Lois de conservation -

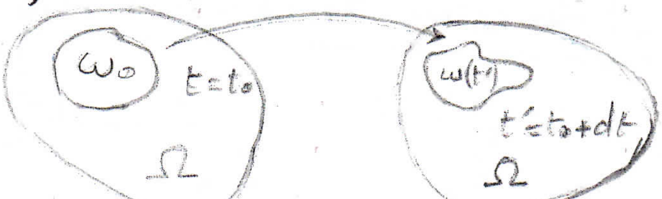
(Support de cours)

Par Fethi ABI-AYAD
E-mail : fethi65@yahoo.com

II - Equations de bilan

On distingue alors 4 équations de bilan décrivant en particulier la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et la seconde loi de la thermodynamique.

La conservation de la masse exprime que la masse d'un ensemble de particules occupant un certain volume reste constante dans le temps malgré un éventuel changement du volume.



$\omega_0 = \omega(t_0)$ $\quad \omega_t = \Phi(\omega_0, t)$
$(=\omega(0)$ si $t_0=0)$ $\quad = \{\Phi(x,t),\ x \in \omega_0\}$

c.à.d $\omega_t = \{y \in \Omega,\ \exists x \in \omega_0 / \Phi(x,t) = y\}$

a) • On déduit alors la loi de conservation de la masse :

A l'instant 0, $\rho(x,0)$ étant la densité (masse volumique ou masse par unité de volume) à l'instant 0 et $\int_{\omega_0} \rho(x,0)\,dx$ est la masse de ω_0 à l'instant 0, on obtient en conservant la masse : $\int_{\omega_0} \rho(x,0)\,dx = \int_{\omega_t} \rho(x,t)\,dx = C^{ste} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(x,t)\,dx = 0}$

b) • Conservation de la quantité de mouvement

A partir de l'équation exprimant la force en fonction de l'accélération :

$$F = m\gamma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) \quad v \text{ est la vitesse } \left(\gamma = \frac{dv}{dt} \text{ accél.}\right)$$

On déduit alors l'équation de conserv. de la quantité de mvt.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(x,t)\,\underline{u}(x,t)\,dx = \int_{\omega_t} \underline{\varphi}(x,t)\,dx + \int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}(x,t)\,d\sigma(x)}$$

où $\int_{\omega_t} \underline{\varphi}(x,t)\,dx$ désigne la force de volume s'exerçant sur ω_t c.à.d la force résultante des forces extérieures : force de pesanteur, magnétisme etc...

$\underline{\varphi}$ est la densité volumique des forces extérieures (pesanteur, etc...)

$\int_{\partial\omega_t} \Psi(x,t)\, d\sigma(x)$ désigne les forces de surface qu'exercent les forces extérieures ou le restant des fluides sur $\partial\omega_t$ (pression du reste des fluides etc...)

et Ψ sa densité surfacique de force.

c) • Conservation de l'énergie

L'énergie contenue dans le volume ω_t est la somme de l'énergie interne $E_0 = \int_{\omega_t} \rho e\, dx$ et de l'énergie cinétique $\int_{\omega_t} \rho \frac{\underline{u}^2}{2}\, dx$. La dérivée en temps de cette somme est égale à la somme des travaux des forces et du taux de chaleur reçu.

d'après le thm de l'énergie cinétique

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho\left(e + \frac{\underline{u}^2}{2}\right) dx = \int_{\omega_t} W\, dx - \int_{\partial\omega_t} \underline{q}\, \underline{n}\, d\sigma + \int_{\omega_t} \underline{\varphi}\,.\,\underline{u}\, dx + \int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}\, \underline{u}\, d\sigma}$$

Selon le principe : Variation d'énergie ds le tps dt = Apport de Chaleur + Travail des forces

$\int_{\omega_t} \rho\left(e + \frac{\underline{u}^2}{2}\right) dx$ désigne l'énergie de ω_t, et e l'énergie interne par unité de masse (ou de volume si on enlève ρ ?)

$\int_{\omega_t} W\, dx$ désigne l'apport de chaleur et W est la densité volumique d'apport de chaleur, $\underline{q}$ est le flux de chaleur par unité de surface ; $\int_{\partial\omega_t} \underline{q}\cdot\underline{n}\, d\sigma$ constitue alors le flux de chaleur à travers la frontière de ω_t.

Rem : On retranche $\int \underline{q}.\underline{n}\, d\sigma$ à cause de l'orientation de $\underline{n} = -(-\underline{n})$ ... se dirige vers l'extérieur

$\int_{\omega_t} \underline{\varphi}\,.\,\underline{u}\, dx$ est le travail des forces à l'intérieur de ω_t

et $\int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}\,.\,\underline{u}\, d\sigma$ le travail des forces s'exerçant sur la frontière de ω_t.

$\underline{\varphi}$ et $\underline{\Psi}$ sont respectivement la densité volumique et surfacique correspondantes.

d) • 2^{nd} loi de la thermodynamique

Généralisant l'inéquation donnant l'entropie minorée par le flux de chaleur : $ds \geqslant \frac{dq}{T}$, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}\rho s\,dx \geqslant \int_{\omega_t}\frac{w}{T}\,dx - \int_{\partial\omega_t}\underline{q}\cdot\frac{\underline{n}}{T}\,d\sigma(x).}$$

"s" étant l'entropie spécifique par unité de masse et l'intégrale du 1er membre de l'inéquation constitue la variation dans le laps de temps dt de l'entropie de ω_t

Le 2nd principe de la thermodynamique signifie que les lois phénoménologiques introduites dans les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie pour décrire le comportement du fluide ne devront pas conduire à une évolution des caractéristiques du fluide en contradiction avec cette inégalité. Il faudra donc vérifier que les solutions obtenues donnent bien une production interne d'entropie positive et on démontrera, grâce à cela, l'impossibilité de tel ou tel phénomène.

Dans tout ce qui précède, on remarque alors qu'on obtient dans toutes les équations (resp. inéquations) des membres du type : $\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}F(x,t)\,dx$: Intégrale (ou variation dans le temps d'1 intégrale d'1 ou plusieurs paramètres physiques) d'une fonction dépendant du temps t sur un domaine dépendant du temps aussi.

<u>Thm</u> (Leibnitz): $F:\mathbb{R}^n\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $\mathcal{U}=\mathcal{V}(0)\subset[0,T]$ alors on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}F(y,t)\,dy = \int_{\omega_t}\frac{\partial F}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{\partial\omega_t}F(y,t)(\underline{u}\cdot\underline{n})(y,t)\,d\sigma(y)$$

où $\omega_t=\{y\in\mathbb{R}^n : \exists x\in\omega_0 / y=\Phi(x,t)\}$, $\underline{n}(y,t)$ normale extérieure à $\partial\omega_t$ en $y\in\partial\omega_t$ et $\underline{u}(\Phi(x,t),t)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,t)$. On prend ω_t $(\forall t\in\mathcal{V}(0))$ régulier a') <u>Equation de conservation de la masse</u>

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{\omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\,dx + \int_{\partial\omega_t} \rho(x,t)\left(\underline{u}\cdot\underline{n}\right)(x,t)\,d\sigma(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\,dx + \int_{\omega_t} \operatorname{div}\left(\rho\,\underline{u}\right)(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{\omega_t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\,\underline{u}\right)dx = 0$$

$\forall t \in U$ et si $\forall \omega$ on a $\displaystyle\int_{\omega}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\,\underline{u}\right)dx = 0$ alors $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\underline{u}) = 0}$

$\operatorname{div}(\rho\underline{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)$

b') <u>Equation de conservation de la quantité de mouvement</u>

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(x,t)\,\underline{u}(x,t)\,dx = \int_{\omega_t} \underline{\varphi}(x,t)\,dx + \int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}(x,t)\,d\sigma(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\underline{u})\,dx + \int_{\partial\omega_t} \rho\,\underline{u}\left(\underline{u}\cdot\underline{n}\right)d\sigma(x) = \int_{\omega_t} \underline{\varphi}\,dx + \int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}\,d\sigma(x).$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\underline{u}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\,\underline{u})u_i\right]dx = \int_{\omega_t} \underline{\varphi}\,dx + \int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}\,d\sigma(x)$$

$$\Leftrightarrow \left.\int_{\omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_j u_i)\right]dx = \int_{\omega_t} \varphi_j\,dx + \int_{\partial\omega_t} \Psi_j\,d\sigma(x)\right\}\ j = \overline{1,n}$$

On montre alors que : $\underline{\Psi}(x,\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(x)\cdot\underline{n} \Rightarrow \underline{\Psi} = \sum_{j=1}^{n} n_j\,\underline{\sigma}_j$ où $\underline{\underline{\sigma}}$ est sym.

En effet, Chaque composante de la fonction $\underline{\Psi}$ est la somme des produits des éléments des lignes de la matrice $\underline{\underline{\sigma}}$ par les composantes correspondantes du vecteur $\underline{n}$: $\Psi_i = \sum_{j=1}^{n} n_j \sigma_{ij}$ où i compte les lignes et j les colonnes σ_{ij} étant un élément de $\underline{\underline{\sigma}}$ ($i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne) ; $\underline{\sigma}_j$ constitue donc le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice $\underline{\underline{\sigma}}$ et donc il est clair que

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \vdots \\ \Psi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} n_j\sigma_{1j}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} n_j\sigma_{nj}\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} n_j\,\underline{\sigma}_j .$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ s'appelle le tenseur des contraintes (symétrique) et on a, tout calcul fait :

$$\int_{\partial\omega_t} \underline{\Psi}\,d\sigma = \int_{\partial\omega_t}\left(\sum_{j=1}^{n} n_j\,\underline{\sigma}_j\right)d\sigma = \int_{\partial\omega_t}\begin{pmatrix}\underline{n}\cdot\underline{\sigma}_1\\ \vdots \\ \underline{n}\cdot\underline{\sigma}_n\end{pmatrix}d\sigma = \int_{\omega_t}\begin{pmatrix}\operatorname{div}\underline{\sigma}_1\\ \vdots \\ \operatorname{div}\underline{\sigma}_n\end{pmatrix}dx = \int_{\omega_t} \underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\sigma}})\,dx$$

En effet, la divergence d'1 fonction matricielle est 1 vecteur dont chaque composante constitue la divergence scalaire de la colonne correspondante dans la matrice : $\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\right)_{j=1}^{n}$ où i compte les lignes et j les colonnes toujours. $\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_n) \Rightarrow \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = (div\,\underline{\sigma}_1, \dots, div\,\underline{\sigma}_n)$

L'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit alors sous la forme intégrale :

$$\int_{\omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{u}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\underline{u}\,u_i)\right] = \int_{\omega_t}\underline{\varphi} + \int_{\omega_t}\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})$$

On écrit alors l'équation aux dérivées partielles vectorielle correspondante

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{u}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\,\rho\underline{u}) - \underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\varphi} \quad \text{où } \underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{\sigma}_j$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}\underline{u} + \rho\frac{\partial\underline{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\rho\,u_i\frac{\partial\underline{u}}{\partial x_i} + div(\rho\underline{u})\,.\,\underline{u} - \underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\varphi}$$

mais l'équation de conservation de masse donne $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\rho\underline{u} = 0$

De plus $\sum_{i=1}^{n}\rho\,u_i\frac{\partial\underline{u}}{\partial x_i} = \rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}$

L'E.D.P. du mouvement s'écrit alors $\boxed{\rho\frac{\partial\underline{u}}{\partial t} + \rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} - \underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\varphi}}$

ou $\rho\frac{D\underline{u}}{Dt} - \underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\varphi}$ qui s'appelle aussi équation d'impulsion.

c) <u>Equation du bilan d'énergie</u>

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)dx = \int_{\omega_t}\underline{\varphi}\,.\,\underline{u}\,dx + \int_{\partial\omega_t}\underline{\Psi}\,.\,\underline{u}\,d\sigma + \int_{\omega_t}W\,dx - \int_{\partial\omega_t}\underline{q}\,.\,\underline{n}\,d\sigma$$

On prend alors $\underline{\Psi} = (\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n})$ d'où $\underline{\Psi}\,.\,\underline{u} = (\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n})\,.\,\underline{u} = (\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{u})\,.\,\underline{n}$ car $\underline{\underline{\sigma}}$ sym.

et nous obtenons :

$$\int_{\omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)dx + \int_{\partial\omega_t}\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\underline{u}\,.\,\underline{n}\,d\sigma = \int_{\omega_t}\underline{\varphi}\,.\,\underline{u}\,dx + \int_{\partial\omega_t}(\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{u})\,.\,\underline{n}\,d\sigma$$
$$+ \int_{\omega_t}W\,dx - \int_{\partial\omega_t}\underline{q}\,.\,\underline{n}\,d\sigma.$$

$$\int_{\omega_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right) + div\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\underline{u}\right]\right)dx = \int_{\omega_t}\left[\underline{\varphi}\,.\,\underline{u} + div(\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{u})\right]dx$$
$$+ \int_{\omega_t}W\,dx - \int_{\omega_t}div\,\underline{q}\,dx.$$

L'équation intégrale s'écrit encore

$$\int_{\omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\,\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right)\right]dx=\int_{\omega_t}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{u})_i-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right)dx+\int_{\omega_t}\left(\underline{\varphi}\cdot\underline{u}+W\right)dx$$

et enfin l'E.D.P. du bilan d'énergie s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_i\,\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u})_i-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right]=\underline{\varphi}\cdot\underline{u}+W.}$$

mais pour toute fonction f dérivable en (x,t) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho f+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\rho f)=f\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\right)+\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$=f\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\underline{u})\right)+\rho(\underline{u}\cdot\nabla)f+\rho\frac{\partial f}{\partial t}\quad\text{mais}\quad\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\underline{u})=0$$

et donc $\frac{\partial}{\partial t}\rho f+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\rho f)=\rho\frac{\partial f}{\partial t}+\rho(\underline{u}\cdot\nabla)f=\rho\frac{Df}{Dt}$. Posant alors $f=e+\frac{u^2}{2}$

l'E.D.P. de l'énergie s'écrit donc :

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\rho(\underline{u}\cdot\nabla)\left(e+\frac{u^2}{2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u})_i-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right]=\underline{\varphi}\cdot\underline{u}+W.$$

Par ailleurs $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u})_i=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}u_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}u_j\right)$

$\underline{\underline{\sigma}}=(\sigma_{ij})_{1\le i,j\le n}$ étant symétrique on peut montrer que $\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Nous avons, d'autre part, $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}u_j=\sum_{j=1}^{n}u_j\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\right)=\underline{u}\cdot\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}})$. C'est une écriture permise par la symétrie de la matrice $\underline{\underline{\sigma}}$.

Donc, finalement, on écrit : $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u})_i=\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}\,D_{ij}(\underline{u})+\underline{u}\cdot\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}})$

où $D_{ij}(\underline{u})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ qui s'appelle tenseur de déformation des vitesses.

La formule de dérivation dans 1 espace de Hilbert par rapport à la dérivée particulaire nous donne : $\frac{D}{Dt}(u^2)=2\left\langle\underline{u},\frac{D\underline{u}}{Dt}\right\rangle_H=2\,\underline{u}\cdot\frac{D\underline{u}}{Dt}$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ désigne le produit scalaire dont est muni l'esp. de Hilbert H.

Ceci dit, nous obtenons $\frac{\rho}{2}\frac{D(\underline{u}^2)}{Dt} = \rho\left\langle \underline{u}, \frac{D\underline{u}}{Dt}\right\rangle$
$= \left\langle \underline{u}, \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\varphi}\right\rangle$
car l'équation de l'impulsion nous renseigne que $\rho\frac{D\underline{u}}{Dt} - \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\varphi}$
et donc, par conséquent $\rho\frac{D(\frac{\underline{u}^2}{2})}{Dt} = \left\langle \underline{u}, \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})\right\rangle + \left\langle \underline{u}, \underline{\varphi}\right\rangle$
De ce fait on écrit l'E.D.P. du bilan d'énergie sous la forme :

$$\rho\frac{De}{Dt} + \rho\frac{D(\underline{u}^2/2)}{Dt} - \sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}D_{ij}(\underline{u}) - \underline{u}\cdot\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + div\,\underline{q} = \underline{\varphi}\cdot\underline{u} + W$$

et d'après ce qui précède nous obtenons

$$\rho\frac{De}{Dt} + \cancel{\underline{u}\cdot\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})} + \cancel{\underline{u}\cdot\underline{\varphi}} - \sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}D_{ij}(\underline{u}) - \cancel{\underline{u}\cdot\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})} + div\,\underline{q} = \cancel{\underline{\varphi}\cdot\underline{u}} + W$$

$$\boxed{\rho\frac{De}{Dt} + div\,\underline{q} - \sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}D_{ij}(\underline{u}) = W}$$

C'est l'équation de l'énergie interne où la quantité $\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)e\right)$ représente le transport de chaleur et W l'apport de chaleur.

d') Inéquation de l'entropie

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}\rho\, s\,dx \geqslant \int_{\omega_t}\frac{W}{T}dx - \int_{\partial\omega_t}\frac{\underline{q}\cdot\underline{n}}{T}\,d\sigma \qquad T : \text{température}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + div(\rho s\,\underline{u})\right]dx \geqslant \int_{\omega_t}\left(\frac{W}{T} - div\frac{\underline{q}}{T}\right)dx, \quad \forall t>0,$$

L'inéquation aux dérivées partielles s'écrit alors

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + div(\rho s\,\underline{u}) \geqslant \frac{W}{T} - div\frac{\underline{q}}{T}$ qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(u_i\rho)s + \frac{q_i}{T}\right] \geqslant \frac{W}{T} \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}s + \rho\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\rho)\cdot s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}u_i\rho\frac{\partial s}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{q_i}{T}\right) \geqslant \frac{W}{T} \Leftrightarrow s\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\rho)\right] +$$

$$+ \rho\left[\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial s}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{q_i}{T}\right) \geqslant \frac{W}{T}$$

et enfin $\boxed{\rho\frac{Ds}{Dt} \geqslant \frac{W}{T} - div\left(\frac{\underline{q}}{T}\right)}$ car l'équation de la conservation de la masse entraîne que $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\underline{u}) = 0$