Chapitre 3 : Théorie du contrôle optimal non linéaire.

<u>Introduction</u> : Ce chapitre est consacré au problème de contrôle optimal pour des systèmes non-linéaires. Le résultat principal est le principe du maximum de Pontryaguine (PMP). Nous verrons que le PMP ne fournit que des conditions nécessaires d'optimalité dont la formulation fait intervenir les notions d'état adjoint et de Hamiltonien. En revanche, le PMP ne dit rien sur l'existence d'un contrôle optimal ni sur le caractère suffisant de ces conditions. L'intérêt pratique du PMP est de nous permettre de faire un premier tri des contrôles candidats à l'optimalité, en espérant que les contrôles vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du PMP ne sont pas trop nombreux, on pourra ensuite les examiner individuellement pour en déterminer le caractère optimal ou non.

3.1°) Systèmes de contrôle non-linéaire

On se donne un intervalle de temps $[t_0, T]$, avec $T > t_0$, on considère un état à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et un contrôle à valeurs dans un sous-ensemble fermé non vide $U \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

On s'intéresse au système de contrôle non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avec $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

L'ensemble des contrôles admissibles est ici le sous-ensemble

$$U_{adm} = L^1([t_0, T]; U) \subset L^1([t_0, T]; \mathbb{R}^k)$$

L'objectif est de trouver un contrôle optimal $u^* \in U_{adm}$ qui minimise le critère

$$C(u) = \Psi(T, x(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))\, dt,$$

$\boxed{3.2°}$

où
$$\psi : [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$
et
$$g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$
sont deux fonctions données.

Le problème de contrôle optimal est donc le suivant :

Chercher $u^* \in U_{adm}$ tel que $C(u^*) = \inf\limits_{u \in U_{adm}} C(u)$.

Avant d'énoncer le PMP, on donne d'abord quelques hypothèses sur f qui assurent que pour chaque $\underline{\underline{u \in U_{adm}}}$ le problème initial suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad (3.1)$$

admet une $\underline{\underline{\text{unique}}}$ solution $\underline{\text{globale}}$ $x \in AC([t_0, T], \mathbb{R}^n)$

et des hypothèses sur Ψ et g qui assurent que pour tout contrôle $u \in U_{adm}$, le coût $C(u)$ est <u>bien défini</u> et <u>l'infimum de C sur U_{adm} est fini.</u>

Tout d'abord sur la fonction f on met les hypothèses suivantes:

H1) $f \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U; \mathbb{R}^n)$ et f est de classe C^1 par rapport à x;

H2) $\exists\, C > 0$ tq $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in U$, on a

$$|f(t, y, v)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant C\left(1 + |y|_{\mathbb{R}^n} + |v|_{\mathbb{R}^k}\right);$$

H3) Pour tout $r > 0$, $\exists\, C_r > 0$ tq $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall y \in \overline{B}(0, r)$, $\forall v \in U$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, y, v)\right|_{\mathbb{R}^{n \times m}} \leqslant C_r\left(1 + |v|_{\mathbb{R}^k}\right).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1 : Supposons que les hypothèses H1), H2) et H3) sont satisfaites, alors pour tout contrôle $u \in U_{adm}$, il existe une unique trajectoire associée $x \in AC([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ solution de (3.1).

Preuve : Soit $u \in U_{adm}$ et supposons que les hypothèses H1), H2) et H3) sont satisfaites.

On peut écrire le problème (3.1) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avec $F(t, x(t)) = f(t, x(t), u(t))$.

La fonction F est mesurable, et elle est continue en x.

Vérifions maintenant que F est localement lipschitzienne par rapport à x.

Pour tout $t \in [t_0, T]$ et tout $x_1, x_2 \in \overline{B}(0,r)$, on a

$$|F(t,x_1) - F(t,x_2)|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= |f(t,x_1,u(t)) - f(t,x_2,u(t))|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq K(t)\, |x_1 - x_2|_{\mathbb{R}^n}, \text{ avec } K(t) = \sup_{y \in \overline{B}(0,r)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y,u(t))\right|_{\mathbb{R}^{n\times n}}$$

Comme $K(t) \leq C_r\,(1 + |u(t)|_{\mathbb{R}^k})$, il résulte que

$K \in L^1([t_0,T]; \mathbb{R})$.

Alors, on a :

$$\forall t \in [t_0,T],\ \forall x_1, x_2 \in \overline{B}(0,r),\ \exists K \in L^1([t_0,T];\mathbb{R})$$

tq

$$|F(t,x_1) - F(t,x_2)|_{\mathbb{R}^n} \leq K(t)\,|x_1 - x_2|_{\mathbb{R}^n}$$

Par conséquent le problème (3.1) admet une unique solution qui est globale c'st-à-dire elle est définie sur $[t_0, T]$ grâce à l'hypothèse H2).

Maintenant on met les hypothèses suivantes sur g et Ψ.

H4) $\forall R>0,\ \exists C_R>0$ tq $\forall t\in[t_0,T],\ \forall y\in\overline{B}(0,R)$,

$\forall v\in U,\ |g(t,y,v)|\leq C_R\,(1+|v|_{\mathbb{R}^k})$

H5) Les fonctions g et Ψ sont minorées respectivement sur $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n\times U$ et sur $[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$.

L'hypothèse H4) assure que le coût $C(u)$ est bien défini et l'hypothèse H5) que l'infimum de $C(u)$ sur U_{adm} est fini.

3.2°) Principe du maximum de Pontryaguine (PMP)

3.2.1°) Problèmes de contrôle optimal de type A

Les problèmes de contrôle optimal de type A sont les problèmes de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \\ \inf\limits_{u \in U_{adm}} C(u), \end{cases} \qquad \text{C.O.A.}$$

avec $$C(u) = \Psi(T, x(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))\,dt,$$

$x(T)$ libre (c'st-à-dire non spécifiée)

et T est libre ou fixé.

Définition (Hamiltonien) : Le Hamiltonien associé au système de controle optimal C.O.A. est l'application

$$H : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que}$$

$$H(t, x, \lambda, u) = \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u)$$

Lorsque l'application H ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le Hamiltonien est autonome.

Avant d'énoncer le principe du maximum de Pontryaguine (PMP) on suppose que les fonctions g et Ψ satisfait aux hypothèses supplémentaires suivantes:

H6) $g \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U; \mathbb{R})$ et g est de classe C^1 par rapport à x; de plus, $\Psi \in C^1([t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$;

H7) Pour tout $R>0$, il existe $\tilde{C}_R > 0$ tq $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall y \in \overline{B}(0, R)$, $\forall v \in U$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t, y, v)\right| \leq \tilde{C}_R \cdot (1 + |v|_{\mathbb{R}^e})$.

Théorème 3.2 (Principe du maximum de Pontryaguine).

On considère le problème de contrôle optimal (COA) et on suppose que les hypothèses Hi) pour $i = 1, \dots, 7$ sont satisfaites.

Si u^* est un contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée. Alors il existe une application

$\lambda : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint tels que

a)

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$= f(t, x^*(t), u^*(t)), \text{ p.p. } t \in [t_0, T],$$

$$x^*(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$= -{}^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right] \cdot \lambda(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)), \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$\lambda(T) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(T, x^*(T)) : \text{Condition de transversalité.}$$

b) $$u^*(t) \in \arg\min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), v), \text{ p.p. } t \in [t_0, T],$$

c'est-à-dire,

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), v), \text{ p.p. } t \in [t_0, T].$$

c) Si de plus le temps final T est libre, on a :

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), u^*(T)) = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}(T, x^*(T)).$$

Un triplet (x^*, u^*, λ) satisfaisant les conditions ci-dessus est appelé une extrémale.

Remarque : Le principe du maximum de Pontryaguine ne fournit qu'une condition <u>nécessaire</u> d'optimalité. En revanche, le PMP ne dit rien sur l'existence d'un contrôle optimal, et il ne fournit pas en général de condition suffisante. L'intérêt pratique du PMP est de restreindre le champ des possibles en vue de l'obtention d'un contrôle optimal : on commence par considérer les extrémales et, en espérant qu'elles ne sont pas trop nombreuses, on en fait ensuite le tri.

<u>Remarque</u> : Dans le cas où $U = \mathbb{R}^k$, c'est-à-dire, lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition b) du théorème précédent devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

<u>Preuve du Théorème 3.2</u>

On suppose que les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites.

On suppose que T est <u>fixé</u>. L'idée fondamentale est de tester l'optimalité de $C(u^*)$, avec u^* le contrôle optimal en faisant des variations aiguille :

il s'agit de perturbations de u^* d'ordre 1 mais sur un intervalle de temps de longueur très petit $\delta << 1$.

Soit τ un point de continuité du contrôle optimal $u^*(t)$ (On suppose que le contrôle est continue par morçeaux). On fixe un élément $v \in U$ et on considère le contrôle

$$u(t; \tau, \delta) = u_\delta(t) = \begin{cases} u^*(t), & si \ t \notin [\tau - \delta, \tau), \\ v, & si \ t \in [\tau - \delta, \tau). \end{cases}$$

On note par $x_\delta(t) = x(t; \tau, \delta)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u_\delta(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On a

$$x_\delta(t) = x^*(t) \ si \ t_0 \leq t \leq \tau - \delta.$$

De plus comme le problème de Cauchy pour l'équation differentielle

$$\dot{x} = f(t, x, v),$$

admet une unique solution dans un voisinage du point $(\tau, x^*(\tau))$ et par conséquent la fonction $t \longmapsto x_\delta(t)$ est définie dans l'intervalle $[\tau-\delta, \tau]$, si δ est suffisament petit.

Si le contrôle optimal $t \longmapsto u^*(t)$ est continue au point τ, alors elle est continue dans un δ voisinage de ce point. Pour cette raison, la fonction $t \longmapsto \dot{x}(t)$ est aussi continue dans ce voisinage et on a

$$x^*(\tau) = x^*(\tau-\delta) + \delta \dot{x}^*(\tau-\delta) + o(\delta)$$
$$= x^*(\tau-\delta) + \delta . f(\tau-\delta, x^*(\tau-\delta), u^*(\tau-\delta)) + o(\delta).$$

De même, on a :

$$x_\delta(\tau) = x^*(\tau-\delta) + \delta f(\tau-\delta, x^*(\tau-\delta), v) + o(\delta).$$

Par suite, il résulte que

$$y(\tau) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{x_\delta(\tau) - x^*(\tau)}{\delta} \text{ existe,}$$

et on a

$$y(\tau) = f(\tau, x^*(\tau), v) - f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \qquad (*)$$

Les deux fonctions $x^*(.)$ et $x_\delta(.)$ sont les deux solutions de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x, u^*(t)),$$

dans l'intervalle $[\tau, T]$.

Par suite d'aprés le théorème de la continuité et la différentiabilité de la solution d'une équation différentielle par rappot à la condition initiale que, pour $\delta > 0$ suffisament petit, le fonctions $t \longmapsto x_\delta(t)$ définis sur $[\tau, T]$, converge uniformément vers $x^*(t)$, et la limite

$$y(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{x_\delta(t) - x^*(t)}{\delta},$$

existe pour tout $t \in [\tau, T]$.

Maintenant pour tout $t > \tau$, on a

$$x_\delta(t) = x_\delta(\tau) + \int_\tau^t f(s, x_\delta(s), u^*(s))ds,$$

$$x^*(t) = x^*(\tau) + \int_\tau^t f(s, x^*(s), u^*(s))ds.$$

Alors,

$$\frac{x_\delta(t) - x^*(t)}{\delta} = \frac{x_\delta(\tau) - x^*(\tau)}{\delta} + \int_\tau^t \frac{f(s, x_\delta(s), u^*(s)) - f(s, x^*(s), u^*(s))}{\delta} ds.$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)) \cdot y(s) ds.$$

C'st-à-dire la fonction y est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)) y, & t \in [\tau, T], \\ y(\tau) = f(\tau, x^*(\tau), v) - f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)). \end{cases}$$

Maintenant soit $\lambda : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction tq

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -{}^t\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right].\lambda(t) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)), \\ \lambda(T) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(T, x^*(T)). \end{cases}$$

Pour tout $t \geqslant \tau$, on a

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda(t), y(t) \rangle$$

$$= \langle \dot{\lambda}(t), y(t) \rangle + \langle \lambda(t), \dot{y}(t) \rangle$$

$$= -\langle {}^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right] \lambda(t), y(t) \rangle - \langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)), y(t) \rangle$$

$$+ \langle \lambda(t), {}^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right] y(t) \rangle.$$

$$= - \langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)), y(t) \rangle.$$

Par intégration entre t et T, on obtient:

$$\langle \lambda(T), y(T) \rangle - \langle \lambda(t), y(t) \rangle = -\int_t^T \langle \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)), y(s) \rangle ds.$$

C'est-à-dire,

$$\langle \lambda(t), y(t) \rangle = \int_t^T \langle \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)), y(s) \rangle ds + \langle \lambda(T), y(T) \rangle.$$

En particulier pour $t = \tau$, on a

$$\langle \lambda(\tau), y(\tau) \rangle = \int_\tau^T \langle \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)), y(s) \rangle ds + \langle \lambda(T), y(T) \rangle.$$

Par suite d'après $(*)$, on a :

$$\langle \lambda(\tau), f(\tau, x^*(\tau), v) - f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \rangle$$

Equat

$$= \int_\tau^T \langle \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)), y(s) \rangle ds + \langle \lambda(T), y(T) \rangle.$$

Maintenant comme (x^*, u^*) est un processus optimal, on a :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{C(u_\delta) - C(u^*)}{\delta} \geq 0.$$

C'st-à-dire,

$$0 \leqslant \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{\Psi(T, x_\delta(T)) - \Psi(T, x^*(T))}{\delta} + \int_{\tau-\delta}^{T} \frac{g(t, x_\delta(t), u_\delta(t)) - g(t, x^*(t), u^*(t))}{\delta} dt \right]$$

C'st-à-dire,

$$0 \leqslant \lim_{\delta \to 0} \left\{ \frac{\Psi(T, x_\delta(T)) - \Psi(T, x^*(T))}{\delta} + \int_{\tau-\delta}^{\tau} \frac{g(t, x_\delta(t), v) - g(t, x^*(t), u^*(t))}{\delta} dt \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{T} \frac{g(t, x_\delta(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u^*(t))}{\delta} dt \right\}.$$

C'st-à-dire,

$$0 \leqslant \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial x}(T, x^*(T)), y(T) \right\rangle + g(\tau, x^*(\tau), v) - g(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))$$

$$+ \int_{\tau}^{T} \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)), y(t) \right\rangle dt.$$

Sachant que $\lambda(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(T, x^*(T))$ et en utilisant Equal, on obtient

$$\boxed{3.29^{\circ}}$$

$$0 \leq \langle \lambda(\tau), f(\tau, x^*(\tau), v) - f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \rangle$$

$$+ g(\tau, x^*(\tau), v) - g(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)).$$

C'st-à-dire,

$$\langle \lambda(\tau), f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \rangle + g(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))$$

$$\leq \langle \lambda(\tau), f(\tau, x^*(\tau), v) \rangle + g(\tau, x^*(\tau), v)$$

Comme τ est un point arbitraire de continuité du contrôle optimal u^* et v est un élément arbitraire de l'ensemble U, on obtient

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), v), \text{ p.p. } t \in [t_0, T].$$

La preuve st achevée.

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes d'existence d'un contrôle optimal

Théorème 3.3. (Théorème de Mangasarian).

Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites, alors le principe du maximum de Pontryaguine (PMP) fournit une condition suffisante d'optimalité sous les hypothèses suivantes:

i) $\mathcal{U}_{adm} = L^2([t_0, T], U)$, avec T fixé et U un ensemble convexe fermé non vide;

ii) La fonction $(x, u) \longmapsto H(t, x, \lambda, u)$ est convexe pour presque tout $t \in [t_0, T]$;

iii) La fonction $x \longmapsto \Psi(T, x) = h(x)$ est convexe.

Exemple d'applications

Exemple 1 : On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \min \int_0^1 (u^2 - x)\, dt, \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{(P1)}$$

Déterminer le contrôle optimal u^* et la trajectoire optimale x^*.

Solution : ~~On~~ Le Hamiltonien H associé au problème (P1) est :

$$H(t, x, \lambda, u) = \lambda . u + (u^2 - x)$$

D'après le PMP (Théorème 3.2) u^* est un contrôle optimal avec x^* la trajectoire optimale associée si

a)
$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t) \\ x^*(0) = 2 \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \lambda, u^*) = 1, \\ \lambda(1) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*, \lambda, u^*) = 0$$ (car il n'ya pas de contraintes sur le contrôle).

C'st-à-dire,

$$\lambda(t) + 2u^*(t) = 0.$$

C'st-à-dire,

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2}.$$

D'aprés a), on a :

$$\boxed{\lambda(t) = t - 1}$$

Ce qui donne,

$$\boxed{u^*(t) = \frac{1-t}{2}}$$

Par suite d'aprés a), on obtient :

$$\boxed{x^*(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + 2}$$

Finalement comme le Hamiltonien H est convexe en x et u, alors u^* st un contrôle et x^* st la trajectoire optimale associée.

Exemple 2 : On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min\left(x(T) + \int_0^T u^2(t)\,dt \right), \\ \dot{x} = \alpha x - u, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad (P2)$$

avec T libre, $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Déterminer le temps optimal T^*, le contrôle optimal u^* et la trajectoire optimal x^*.

Solution : Pour cet exemple, on a :

$$f(t,x,u) = \alpha x - u,$$

$$\Psi(T, x(T)) = \Psi(x(T)) = x(T),$$

et

$$g(t,x,u) = g(u) = u^2.$$

Le Hamiltonien H associée au problème de contrôle

$$H(t,x,\lambda,u) = \lambda(\alpha x - u) + u^2.$$

Si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, il existe une application $\lambda : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ tels que

a) $$\begin{cases} \dot{x}^* = \alpha x^* - u^*, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \lambda, u^*) = -\lambda \cdot \alpha \\ \lambda(T^*) = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(T^*, x(T^*)) = 1. \end{cases}$$

b) $$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*, \lambda, u^*) = 0$$ (car il n'ya aucune contrainte sur le contrôle).

C'st-à-dire,

$$-\lambda + 2u^* = 0.$$

C'st-à-dire,

$$\boxed{u^*(t) = \frac{\lambda(t)}{2}}$$ $\boxed{A1}$

c) $$H(T^*, x^*(T^*), \lambda(T^*), u^*(T)) = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}(T^*, x^*(T^*)).$$

C'st-à-dire.

$$\lambda(T^*) \cdot (\alpha x^*(T^*) - u^*(T^*)) + (u^*)^2(T^*) = 0.$$ $\boxed{B}$

$\boxed{3.25^\circ}$

Maintenant on va déterminer u^*, x^* et T^*.

D'après a) et en utilisant la 3ème équation et la 4ème égalité, on obtient:

$$\lambda(t) = e^{\alpha(T^*-t)}. \qquad \boxed{A2}$$

Ce qui donne d'après $\boxed{A1}$:

$$\boxed{u^*(t) = \frac{e^{\alpha(T^*-t)}}{2}} \qquad \boxed{A3}$$

Par suite d'après a) et en utilisant la 1ère équation et la 2ème égalité et en utilisant $\boxed{A3}$, on a le problème initial suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \alpha x^* - \dfrac{e^{\alpha(T^*-t)}}{2} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

ce qui donne après calcul:

$$x^*(t) = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha T^*}\left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{4\alpha}\right) \qquad \boxed{A4}$$

Maintenant pour déterminer T^*, on utilise $\boxed{A1}$, $\boxed{B}$, $\boxed{A3}$ et $\boxed{A4}$.

D'après $\boxed{B}$, on a :

$$\lambda(T^*).\left(\alpha X^*(T^*) - U^*(T^*)\right) + (U^*)^2(T^*) = 0.$$

Ce qui donne d'après $\boxed{A1}$ ~~et $\boxed{A3}$~~

$$\alpha \lambda(T^*) X^*(T^*) - \frac{\lambda^2(T^*)}{4} = 0.$$

Comme $\lambda(T^*) = 1$, on obtient :

$$\alpha X^*(T^*) - \frac{1}{4} = 0.$$

c'est-à-dire,

$$X^*(T^*) = \frac{1}{4\alpha}$$

Par suite d'après $\boxed{A4}$, il résulte que

$$x_0 e^{\alpha T^*} + e^{\alpha T^*}\left(\frac{e^{-\alpha T^*} - e^{\alpha T^*}}{4\alpha}\right) = \frac{1}{4\alpha}$$

Comme $e^{\alpha T^*} \neq 0$, on obtient :

$$e^{\alpha T^*} = 4\alpha x_0.$$

Ce qui donne,

$$\alpha T^* = \ln(4\alpha x_0) \quad \text{à condition que } 4\alpha x_0 > 1.$$

C'st-à-dire,

$$\boxed{T^* = \frac{\ln(4\alpha x_0)}{\alpha}}$$

En conclusion, on a :

$$u^*(t) = \frac{e^{\alpha(T^*-t)}}{2}, \quad t \in [0, T^*]$$

$$x^*(t) = x_0 e^{\alpha t} + \frac{e^{\alpha T^*}}{4\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}\right), \quad t \in [0, T^*],$$

$$T^* = \frac{\ln(4\alpha x_0)}{\alpha}.$$