1 Énoncés

Exercice 1 :
Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$ deux réels. Pour $i,j \in \mathbb{N}$ on pose $p_{ij} = \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j$.
1. Montrer qu'en posant $\mathbb{P}((i,j)) = p_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit une mesure de probabilités sur $\mathbb{N}^2$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.
Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ on pose $X((i,j)) = i$ et $Y((i,j)) = j$.
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(X = Y)\mathrm{et}\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 2 :
On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'œufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On suppose également que chaque œuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres œufs.
On considère une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de V.A. de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$. On suppose que les V.A. $(N, X_1, X_2, ...)$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.
1. Écrire D en fonction des variables aléatoires N et X_i.
2. Pour tout $(n,d) \in mathbbN^2$, calculer $\mathbb{P}(D = d | N = n)$.
3. En déduire la loi de D et la loi du vecteur aléatoire de $\mathbb{N}^2$ $Z = (D, N)$.
4. Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice de cette variable aléatoire.

Exercice 3 :
Soit (X,Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp -\frac{x^2+y^2}{2}$$

Déterminer les lois de $X, Y, X+Y, X^2+Y^2$.

Exercice 4 :
Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y).$$

Déterminer les lois de X, Y et $Z = XY$.

Exercice 5 :
1. Soient $\theta > 0$ un nombre réel et $k, l \geq 1$ deux nombres entiers. Déterminer l'unique réel c tel que la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = cx^{k-1}y^{l-1} \exp -\theta(x+y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2_+(x,y)}$$

soit la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la loi de X.
3. C'est la loi Gamma de paramètres θ et k,on écrit $X \sim \Gamma(\theta, k)$. Quelle est cette loi lorsque $k = 1$?
4. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité $f_{(X,Y)}$. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 6 :
Soient p et q deux réels compris entre 0 et 1. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que X suive

la loi de Bernoulli de paramètre p et Y la loi de Bernoulli de paramètre q. Montrer qu'on a

$$max(p+q-1,0)-pq \leq Cov(X,Y) \leq min(p,q)-pq$$

et que les deux bornes de cette égalité peuvent être atteintes.

Exercice 7 :
Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n dont chaque composante est de carré intégrable. On rappelle matrice de variance-covariance (ou matrice de covariance) de X la matrice

$$D = (Cov(X_i, X_j))_{i,j=1...n}.$$

Montrer que cette matrice est symétrique et positive, au sens où pour tout vecteur ligne $A = (a_1, ..., a_n)$ de n réels, on a l'inégalité

$$AD^tA = \sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j \geq 0.$$

2 Solutions

Exercice 1 :
1. Il s'agit de vérifier que pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} p_{ij} = 1$. La positivité des p_{ij} est évidente par définition.
Comme $\alpha, \beta \in]0,1[$, on peut utiliser la somme d'une série géométrique : $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} x^i = 1/(1-x)$ avec $x = 1-\alpha$ et $x = 1-\beta$, on obtient :

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} p_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j = \alpha\beta \sum_{i \in \mathbb{N}} (1-\alpha)^i \sum_{j \in \mathbb{N}} (1-\beta)^j = 1.$$

2. Remarquons que la loi jointe du vecteur (X,Y) est pij car on a

$$\mathbb{P}[X=i, Y=j] = \mathbb{P}[(i',j') \in \mathbb{N}^2 : X((i',j')) = i, Y((i',j')) = j] = \mathbb{P}[(i,j)] = p.$$

La loi marginale de X est donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X=i] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X=i, Y=j] = \alpha(1-\alpha)^i \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta(1-\beta)^j = \alpha(1-\alpha)^i.$$

ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $1-\alpha$.
$\mathbb{P}(Y=j) = \beta(1-\beta)^j$, et Y suit une loi géométrique de paramètre $1-\beta$.

3. $$\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X<Y\}}] = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{i<j\}} \mathbb{P}[X=i, Y=j] = \sum_{i,j \in \mathbb{N}, i<j} p_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \geq i+1} p_{ij}.$$

Comme pour tout $i \in \mathbb{N}, \sum_{j \geq i+1} \beta(1-\beta)^j = (1-\beta)^{i+1}$, cela donne

$$\mathbb{P}[X<Y] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(1-\alpha)^i(1-\beta)^{i+1} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(1-\beta)((1-\alpha)(1-\beta))^i = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha-\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

De même on déduit $\mathbb{P}[X>Y] = \frac{\beta-\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$.
On peut calculer $\mathbb{P}[X=Y]$ directement en sommant les p_{ii}, ou alors on peut utiliser le fait que les parties $X=Y, X<Y et X>Y$ forment une partition de $\mathbb{N}^2$ et les résultats précédents :

$$\mathbb{P}[X=Y] = 1-\mathbb{P}[X>Y]-\mathbb{P}[X<Y] = \frac{\alpha+\beta-\alpha\beta-(\beta-\alpha\beta)-(\alpha-\alpha\beta)}{\alpha+\beta-\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

Exercice 2 :
1. On a $D = \sum_{i=1}^{N} X_i$. On notera que l'indice de la somme est lui même aléatoire.
2. On a

$$\mathbb{P}[D = d|N = n] = \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i = d|N = n\right] = \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = d|N = n\right] = \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{n} X_i = d],$$

par indépendance de $(N, X_1, X_2, ...)$. La variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ somme de n V.A. de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, est de loi binomiale de paramètres n et p, d'où

$$\mathbb{P}[D = d|N = n] = C_n^d p^d (1-p)^{n-d} \quad \text{si } d \leq n, \quad P(D = d|N = n) = 0 \quad \text{si } d > n$$

car le nombre de descendants ne peut être supérieur au nombre d'œufs.
3. La variable aléatoire $Z = (D, N)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$. Sa loi est donnée par les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[D = d \cup N = n], d \leq n$. On a alors

$$\mathbb{P}[D = d \cup N = n] = \mathbb{P}[D = d|N = n]\mathbb{P}[N = n] = \exp -\lambda \frac{\lambda^n}{n!} C_n^d p^d (1-p)^{n-d} \nVdash_{d \leq n}.$$

Pour obtenir la loi de D, on écrit avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[D = d] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[\{D = d\} \cup \{N = n\}] = \sum_{n \geq d} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} C_n^d p^d (1-p)^{n-d} \\ &= \frac{(\lambda p)^d}{d!} \exp(-\lambda) \sum_{n \geq d} \frac{\lambda^{n-d}(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} = \exp -p\lambda \frac{(p\lambda)^d}{d!}\end{aligned}$$

qui est une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Autre méthode en utilisant une fonction génératrice.

Complément de cours :
La fonction génératrice (forme polynomiale) d'une loi de Bernoulli de paramètre p est

$$M_1(s) = 1 - p + ps$$

à vérifier à titre d'exercice.Et celle d'une loi de Poisson de paramètre μ est

$$M_2(s) = \exp \mu(s-1).$$

A vérifier également. Nous rappelons la définition de la fonction génératrice (forme polynomiale) pour une V.A.réelle X :

$$M_X(s) := \mathbb{E}[s^X].$$

Nous pouvons alors calculer la fonction génératrice de la V.A. D comme suit

$$\begin{aligned}M_D(s) = \mathbb{E}[s^D] = \mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{N} X_i}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} s^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \nVdash_{(N=n)}\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \nVdash_{(N=n)}\right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{N} X_i}\right] \mathbb{E}\left[\nVdash_{(N=n)}\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[s^{X_i}]\mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - p + ps)^n \frac{(n\lambda)^d}{n!} \exp -\lambda = \exp[p\lambda(s-1)].\end{aligned}$$

C'est la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$, et comme la fonction génératrice caractérise la loi (exactement comme la fonction caractéristique ou la fonction de répartition ou la fonction de densité ou de masse).

Alors D suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

Rappel de cours :
l'espérance de l'indicatrice d'un événement est égale à la probabilité de celui-ci.
L'interversion entre série et espérance est justifiée par le théorème de convergence monotone en les V.A. qui interviennent dans la série sont positives.

Exercice 3 :
La loi de X est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et admet la densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Alors X est de loi normale centrée réduite. La loi de Y est égale à celle de X. Pour calculer la loi de $X+Y$, soit une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy.$$

Nous utilisons la transformation :

$$(u,v) = (x+y, x-y), \text{c'est-à-dire} (x,y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v).$$

Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Le calcul de $\mathbb{E}[g(X+Y)]$ donne

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$$

Exercice 6 :
On a $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - pq$.
On va encadrer $E[XY]$. D'une part, $XY \leq X$ donc $E[XY] \leq E[X] = p$.
De même, $E[XY] \leq q$. Ainsi $E[XY] \leq min(p,q)$.
D'autre part $E[XY] = \mathbb{P}(X = 1 \text{et} Y = 1)$. Or pour tous évènements A, B, $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - P(A \cup B)$ et l'inégalité $\mathbb{P}(A \sqcup B) \leq 1$ entraînent

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1.$$

Comme de plus $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 0$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) \geq max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0)$. Avec

$$A = X = 1 \text{et} B = Y = 1, E[XY] = \mathbb{P}(A \cup B) \geq max(p+q-1, 0)$$

. On a ainsi établi l'inégalité.
Montrons que les deux bornes peuvent être atteintes pour tous p et q. Supposons $p \leq q$. Si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = q - p, \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - q,$$

alors X et Y suivent respectivement des lois de Bernoulli de paramètres p et q et $Cov(X,Y) = min(p,q) - pq$.
Pour la borne inférieure, distinguons deux cas suivant le signe de $p+q-1$.
Supposons tout d'abord $p+q<1$ alors si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p, \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = q, P(X = 0, Y = 0) = 1 - p - q,$$

les lois de X et Y sont les bonnes et $Cov(X,Y) = -pq$.
Finalement, si $p+q \geq 1$ et si le couple (X,Y) suit la loi

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 1 - q, \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1 - p, P(X = 1, Y = 1) = p + q - 1,$$

alors les lois de X et Y sont les bonnes et $Cov(X,Y) = p + q - 1 - pq$.