Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2019-2020**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 2

Cours et TD sur : Les Espaces Vectoriels

Définition .1 *Soient un $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un ensemble muni de deux lois de composition, l'une interne notée*

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longrightarrow x + y,$$

et l'autre externe notée

$$. : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x, \alpha) \longrightarrow \alpha x.$$

E est dit espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et on note $\mathbb{K}$.e.v si et seulement si :

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif.*
2. *. vérifie :*
   - $\forall x \in E : 1.x = x.$
   - $\forall x \in E, \forall a, b \in \mathbb{K} : a.(b.x) = (a.b).x.$
   - $\forall x \in E, \forall a, b \in \mathbb{K} : (a + b).x = a.x + b.x.$
   - $\forall x, y \in E, \forall a \in \mathbb{K} : a.(x + y) = a.x + a.y.$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** *et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés* **scalaires***.*

Définition .2 *Soient E un $\mathbb{K}$.e.v et $v_1, v_2, ..., v_n$, n vecteurs de E. On appelle combinaison lináire des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$, toute expression de la forme*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2 + ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de la combinaison linéaire.

1 Sous-espaces vectoriels

1.1 Définitions et exemples

Définition .3 *Une partie F, non vide d'un $\mathbb{K}$.e.v E est un sous espace vectoriel de E, et on note F s.e.v de E si et seulement si :*

1. *$(F, +)$ un sous-groupe de $(E, +)$.*
2. *$\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha.x \in F.$*

Ces deux conditions sont équivalentes à :
- $\forall x, y \in F : x - y \in F.$
- $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha.x \in F.$

Ces dernières conditions sont équivalentes à :

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha.x + \beta.y \in F.$$

1.2 Opérations sur les s.e.v

1.2.1 Intersection

Proposition .1 *Si $F_1, F_2, ..., F_n$ sont des s.e.v de E alors $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_i$ est aussi un s.e.v de E.*

1.2.2 Somme

Définition .4 *Soient F, F' deux parties de E. Alors*

$$F + F' = \{y \in E / \exists x \in F, \exists x' \in F' : y = x + x'\}.$$

Proposition .2 *Si F et F' sont des s.e.v de E alors $F + F'$ est le plus petit s.e.v de E qui contient à la fois F et F'.*

Définition .5 *Une somme de deux s.e.v F et F' de E est dite directe si et seulement si :*
- $F \cap F' = \{0_E\}$.
- $F + F' = E$.

On note alors $F \oplus F' = E$.

Remarque .1 *Si F et F' sont en somme directe, on dit que F et F' sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.*

1.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition .6 *Le sous-espace vectoriel engendré par une partie A non vide de E, est le plus petit s.e.v de E qui contient A. On le note s.e.v $< A >$.*

Proposition .3 *Si $A \neq \emptyset$ alors $lin(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A est égale à s.e.v $< A >$.*

2 Dépendance et indépendance linéaire

Définition .7 *n vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ de E est dites linéairement indépendants si et seulement si*

$$(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0) \Rightarrow (a_1 = a_2 = ... = a_n = 0).$$

Définition .8 *n vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ de E est dites linéairement dépendants si et seulement si l'équation*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0,$$

admet au moins une solution $a_i \neq 0$.

Proposition .4 *On a les propriétés suivantes :*
- *Toute famille de vecteurs qui contient 0 est une famille liée.*
- *Toute famille qui a une sous famille liée et liée.*
- *Toute sous famille d'une famille libre et libre.*

3 Bases et dimension d'un e.v

Définition .9 *Une famille* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *est dite génératrice dans* E *si net seulement si*

$$E = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i / \alpha_i \in \mathbb{K}\}.$$

Autrement dit, $E = lin(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Définition .10 *On appelle base d'un e.v* E *toute famille libre et génératrice dans* E.

Proposition .5 *Si* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est une base de l'e.v* E *alors* $\forall a_i \neq 0$, *la famille* $\{a_1e_1, a_2e_2, ..., a_ne_n\}$ *est aussi une base de* E.

Remarque .2 *Cela veut dire qu'une base n'est pas unique.*

Définition .11 *Si* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est une base de l'e.v* E *alors* E *est de dimension finie* n. *On note* $dimE = n$.

3.1 Base extraite et base par complétion

Proposition .6 *De toute famille génératrice d'un e.v* E *de dimension finie on peut extraire une base de* E.

Proposition .7 *Toute famille libre d'un e.v* E *de dimension finie peut etre complétée en une base de* E.

Proposition .8 *Si* $A = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *est une famille libre d'un e.v* E *de dimension* n *où* $1 \leqslant p \leqslant n$, *alors on peut trouver* $(n-p)$ *vecteurs de* E *tel que la famille* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *soit une base de* E.

4 Sous-espaces vectoriels et bases

Proposition .9 *Soit* E *un e.v de dimension finie* n. *Si* $F \subset E$ *est un s.e.v de* E *alors :*

1. F *admet une base à* p *èléments.*
2. $dimF = p$ *et* $p \leqslant n$.
3. *Si* $p = n$ *alors* $F = E$.

5 Dimension d'une somme de s.e.v

Proposition .10 *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux s.e.v d'un e.v* E *de dimension finie alors* $F_1 + F_2$ *est de dimension finie, et*

$$dim(F_1 + F_2) = dimF_1 + dimF_2 - dim(F_1 \cap F_2).$$

Proposition .11 *Si* $F_1 \oplus F_2$ *alors*

$$dim(F_1 \oplus F_2) = dimF_1 + dimF_2.$$

Exercices

Exercice 1 :
1. Soit $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un réel.
a. Montrer que $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b. Que se passe-t-il si on prend $\mathbb{R}[X]_{=n}$?
2. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous le munissons d'une :

— **Loi interne $\bigoplus$:** Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f \bigoplus g$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} : (f \bigoplus g)(x) = f(x) + g(x).$$
(où le signe $\bigoplus$ désigne la loi interne de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

— **Loi externe $\otimes$:** Si α est un nombre réel et f une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $(\alpha \otimes f)$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} : (\alpha \otimes f)(x) = \alpha \times f(x).$$
(Nous désignons par $\otimes$ la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$).

Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 :
Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1)$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = t \text{ et } y = z\}$ 2)$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1\}$
3)$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy \geqslant 0\}$ 4)$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
5)$E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(0) = 1\}$ 6)$E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(1) = 0\}$
7)$E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f \text{ est croissante }\}$ 8)$E_8 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

Exercice 3 :
1. Les familles suivantes sont-elles libres ?
i. $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 2, 2)$ et $u_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
ii. $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?
a. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
b. (e_1, e_3).
c. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
d. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
e. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Exercice 4 :
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :
$E_1 = \{(a + b, b - 3a, a) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 | c \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
4. A-t-on $E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^3$?

Exercice 5 : (SUPP)

Soient $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2), P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B, et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$$R(0) = A, R(1) = B \text{ et } R(2) = C.$$

Exercice 6 : (SUPP)

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(-1) = P(1) = 0\}$.
1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Références

---

1. Algèbre, Cours de Mathématiques pour la première année , site web : http ://exo7.emath.fr/
2. Algèbre linéaire, 5e édition, de Joseph Grifone.
3. Le succès en algèbre en fiches-méthodes : 1re année, de Abdelaziz El Kaabouchi.

Auteur

M. Mamchaoui

Laboratoire de Statistiques et Modélisation Aléatoires (LSMA). Faculté des Sciences. Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, BP 119, 13000 Tlemcen, Algérie.

`mohamed.mamchaoui@univ-tlemcen.dz`